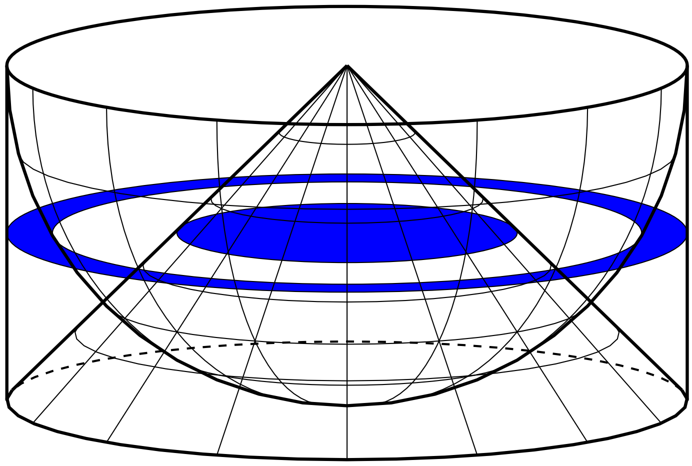
LUCIANO BATTAIA - ERCOLE SUPPA

MATEMATICA ALLA MATURITÀ

Tracce dei temi assegnati agli esami di stato di Liceo Scientifico, con appendice contenente le prove di Fisica



www.batmath.it - www.rotupitti.it

Matematica alla maturità
Tracce dei temi assegnati agli esami di stato di Liceo Scientifico, con appendice contenente le prove di Fisica

Luciano Battaia - Ercole Suppa

http://www.batmath.it-http://www.rotupitti.it

Versione 5.1 del 30 giugno 2022

Le immagini non prodotte dagli autori sono ricavate dai testi ministeriali dei temi d'esame.

In copertina: Proprietà della scodella di Galileo, argomento trattato in un quesito proposto nel tema d'esame della sessione ordinaria 2009.

Tutti sono d'accordo che la qualità della vita e il benessere della società nei paesi industrializzati con condizioni umane per il lavoro, l'aspettativa di una lunga vita, cibo ed energia sufficiente, protezione contro l'inclemenza della natura, facili trasporti, divertimenti di ogni genere si basano su ritrovati della tecnologia. Ciò che viene dimenticato sta nel fatto che le basi di questi ritrovati furono messe qualche tempo fa dagli scienziati i quali furono spinti dalla curiosità e non dalle promesse del mercato.

Samuel Chao Chung Ting, Nobel per la fisica, 1976 www.batmath.it: Il sito contiene una vasta raccolta di materiali di matematica e fisica per la scuola media superiore e per i primi anni di università: testi in formato pdf, testi in formato html, video, video presentazioni, video tutorial, applicazioni interattive, informazioni sui software di uso didattico, raccolte di esercizi e altri materiali utili allo studio della matematica e della fisica.

www.rotupitti.it: Il sito è rivolto a tutti gli appassionati di gare matematiche. In esso è possibile trovare informazioni sulle varie attività, materiale per la preparazione anche individuale, link utili e anche un forum di discussione.

Indice

Premessa xxvii

1 Un po' di storia 1
1.1 L'istruzione scientifica prima della riforma Gentile 1
1.2 Dalla riforma Gentile ai nostri giorni 4
1.3 L'esame di stato 9
1.4 I contenuti del tema di matematica 12

2 Esame di licenza Istituto Tecnico, sez. Fisico-Matematica 15
2.1 Anno scolastico 1870-1871 15
2.1.1 Sessione estiva 15
2.2 Anno scolastico 1871-1872 15
2.2.1 Sessione estiva 15
2.3 Anno scolastico 1872-1873 16
2.3.1 Sessione estiva 16
2.3.2 Sessione autunnale 16
2.4 Anno scolastico 1873-1874 16
2.4.1 Sessione estiva 16
2.4.2 Sessione autunnale 17
2.5 Anno scolastico 1874-1875 17
2.5.1 Sessione estiva 17
2.5.2 Sessione autunnale 17
2.6 Anno scolastico 1876-1877 17
2.6.1 Sessione estiva 17
2.7 Anno scolastico 1877-1878 18
2.7.1 Sessione estiva 18
2.7.2 Sessione autunnale 18
2.8 Anno scolastico 1878-1879 18
2.8.1 Sessione estiva 18
2.8.2 Sessione autunnale 18
2.9 Anno scolastico 1879-1880 18
2.9.1 Sessione estiva 18
2.9.2 Sessione autunnale 19
2.10 Anno scolastico 1881-1882 19

2.10.1 Sessione estiva 19
2.10.2 Sessione autunnale 19
2.11 Anno scolastico 1882-1883 20
2.11.1 Sessione estiva 20
2.12 Anno scolastico 1884-1885 20
2.12.1 Sessione estiva 20
2.13 Anno scolastico 1886-1887 20
2.13.1 Sessione estiva 20
2.13.2 Sessione autunnale 21
2.14 Anno scolastico 1887-1888 21
2.14.1 Sessione estiva 21
2.14.2 Sessione autunnale 21
2.15 Anno scolastico 1888-1889 21
2.15.1 Sessione estiva 21
2.16 Anno scolastico 1889-1890 21
2.16.1 Sessione estiva 21
2.16.2 Sessione autunnale 22
2.17 Anno scolastico 1890-1891 22
2.17.1 Sessione estiva 22
2.18 Anno scolastico 1895-1896 22
2.18.1 Sessione estiva 22
2.18.2 Sessione autunnale 23
2.19 Anno scolastico 1897/1898 23
2.20 Anno scolastico 1902-1903 23
2.20.1 Sessione estiva 23
2.20.2 Sessione autunnale 23
2.20.3 Sessione suppletiva 24
2.21 Anno scolastico 1903-1904 24
2.21.1 Sessione estiva 24
2.21.2 Sessione autunnale 24
2.22 Anno scolastico 1904-1905 25
2.22.1 Sessione estiva 25
2.22.2 Sessione autunnale 25
2.23 Anno scolastico 1905-1906 26
2.23.1 Sessione estiva 26
2.23.2 Sessione autunnale 26
2.24 Anno scolastico 1906-1907 26
2.24.1 Sessione estiva 26
2.24.2 Sessione autunnale 27
2.25 Anno scolastico 1907-1908 27
2.25.1 Sessione estiva 27
2.25.2 Sessione autunnale 28
2.26 Anno scolastico 1908-1909 28
2.26.1 Sessione estiva 28

2.27 Anno scolastico 1909-1910 28
2.27.1 Sessione estiva 28
2.27.2 Sessione autunnale 29
2.28 Anno scolastico 1910-1911 29
2.28.1 Sessione estiva 29
2.28.2 Sessione autunnale 29
2.29 Anno scolastico 1911-1912 30
2.29.1 Sessione estiva 30
2.29.2 Sessione autunnale 30
2.30 Anno scolastico 1912-1913 31
2.30.1 Sessione autunnale 31
2.31 Anno scolastico 1915-1916 31
2.31.1 Sessione estiva 31
2.32 Anno scolastico 1917-1918 31
2.33 Anno scolastico 1920-1921 32
2.34 Anno scolastico 1921-1922 32
2.35 Anno scolastico 1922-1923 32

3 Corso di ordinamento 33
3.1 Anno scolastico 1923-1924 33
3.1.1 Sessione estiva 33
3.1.2 Sessione autunnale 33
3.2 Anno scolastico 1924-1925 33
3.2.1 Sessione estiva 33
3.2.2 Sessione autunnale 34
3.3 Anno scolastico 1925-1926 34
3.3.1 Sessione estiva 34
3.3.2 Sessione autunnale 34
3.4 Anno scolastico 1926-1927 34
3.4.1 Sessione estiva 34
3.4.2 Sessione autunnale 35
3.5 Anno scolastico 1927-1928 35
3.5.1 Sessione estiva 35
3.5.2 Sessione autunnale 35
3.6 Anno scolastico 1928-1929 35
3.6.1 Sessione estiva 35
3.6.2 Sessione autunnale 36
3.7 Anno scolastico 1929-1930 36
3.7.1 Sessione estiva 36
3.7.2 Sessione autunnale 36
3.8 Anno scolastico 1930-1931 36
3.8.1 Sessione estiva 36
3.8.2 Sessione autunnale 37
3.9 Anno scolastico 1931-1932 37

3.9.1 Sessione estiva 37
3.9.2 Sessione autunnale 37
3.10 Anno scolastico 1932-1933 37
3.10.1 Sessione estiva 37
3.10.2 Sessione autunnale 38
3.11 Anno scolastico 1933-1934 38
3.11.1 Sessione estiva 38
3.11.2 Sessione autunnale 38
3.12 Anno scolastico 1934-1935 39
3.12.1 Sessione estiva 39
3.12.2 Sessione autunnale 39
3.13 Anno scolastico 1935-1936 40
3.13.1 Sessione estiva 40
3.13.2 Sessione autunnale 41
3.14 Anno scolastico 1936-1937 41
3.14.1 Sessione estiva 41
3.14.2 Sessione autunnale 42
3.15 Anno scolastico 1937-1938 42
3.15.1 Sessione estiva 42
3.15.2 Sessione autunnale 43
3.16 Anno scolastico 1938-1939 43
3.16.1 Sessione estiva 43
3.16.2 Sessione autunnale 44
3.17 Anno scolastico 1939-1940 44
3.17.1 Sessione estiva 44
3.17.2 Sessione autunnale 44
3.18 Anno scolastico 1940-1941 45
3.18.1 Sessione estiva 45
3.18.2 Sessione autunnale 45
3.18.3 Sessione straordinaria, marzo 1942 46
3.19 Anno scolastico 1941-1942 46
3.19.1 Sessione estiva 46
3.19.2 Sessione autunnale 46
3.19.3 Sessione straordinaria, gennaio 1943 46
3.20 Anno scolastico 1942-1943 47
3.20.1 Sessione estiva 47
3.21 Anno scolastico 1946-1947 47
3.21.1 Sessione estiva 47
3.21.2 Sessione autunnale 47
3.22 Anno scolastico 1947-1948 48
3.22.1 Sessione estiva 48
3.22.2 Sessione autunnale 48
3.23 Anno scolastico 1948-1949 49
3.23.1 Sessione estiva 49

3.23.2 Sessione autunnale 49
3.24 Anno scolastico 1949-1950 50
3.24.1 Sessione estiva 50
3.24.2 Sessione autunnale 51
3.25 Anno scolastico 1950-1951 51
3.25.1 Sessione estiva 51
3.25.2 Sessione autunnale 52
3.26 Anno scolastico 1951-1952 52
3.26.1 Sessione estiva 52
3.26.2 Sessione autunnale 52
3.27 Anno scolastico 1952-1953 53
3.27.1 Sessione estiva 53
3.27.2 Sessione autunnale 53
3.28 Anno scolastico 1953-1954 53
3.28.1 Sessione estiva 53
3.28.2 Sessione autunnale 54
3.29 Anno scolastico 1954-1955 54
3.29.1 Sessione estiva 54
3.29.2 Sessione autunnale 54
3.30 Anno scolastico 1955-1956 55
3.30.1 Sessione estiva 55
3.30.2 Sessione autunnale 55
3.31 Anno scolastico 1956-1957 55
3.31.1 Sessione estiva 55
3.31.2 Sessione autunnale 56
3.32 Anno scolastico 1957-1958 56
3.32.1 Sessione estiva 56
3.32.2 Sessione autunnale 57
3.33 Anno scolastico 1958-1959 57
3.33.1 Sessione estiva 57
3.33.2 Sessione autunnale 57
3.34 Anno scolastico 1959-1960 57
3.34.1 Sessione estiva 57
3.34.2 Sessione autunnale 58
3.35 Anno scolastico 1960-1961 58
3.35.1 Sessione estiva 58
3.35.2 Sessione autunnale 58
3.36 Anno scolastico 1961-1962 59
3.36.1 Sessione estiva 59
3.36.2 Sessione autunnale 59
3.37 Anno scolastico 1962-1963 60
3.37.1 Sessione estiva 60
3.37.2 Sessione autunnale 60
3.38 Anno scolastico 1963-1964 60

3.38.1 Sessione estiva 60
3.38.2 Sessione autunnale 61
3.39 Anno scolastico 1964-1965 61
3.39.1 Sessione estiva 61
3.39.2 Sessione autunnale 61
3.40 Anno scolastico 1965-1966 62
3.40.1 Sessione estiva 62
3.40.2 Sessione autunnale 63
3.41 Anno scolastico 1966-1967 63
3.41.1 Sessione estiva 63
3.41.2 Sessione autunnale 64
3.42 Anno scolastico 1967-1968 64
3.42.1 Sessione estiva 64
3.42.2 Sessione autunnale 64
3.43 Anno scolastico 1968-1969 65
3.43.1 Sessione unica 65
3.44 Anno scolastico 1969-1970 65
3.44.1 Sessione ordinaria 65
3.44.2 Sessione supplementare 65
3.45 Anno scolastico 1970-1971 66
3.45.1 Sessione ordinaria 66
3.45.2 Sessione suppletiva 66
3.46 Anno scolastico 1971-1972 67
3.46.1 Sessione ordinaria 67
3.46.2 Sessione suppletiva 67
3.47 Anno scolastico 1972-1973 68
3.47.1 Sessione ordinaria 68
3.47.2 Sessione suppletiva 68
3.48 Anno scolastico 1973-1974 69
3.48.1 Sessione ordinaria 69
3.48.2 Sessione suppletiva 70
3.49 Anno scolastico 1974-1975 71
3.49.1 Sessione ordinaria 71
3.49.2 Sessione suppletiva 71
3.50 Anno scolastico 1975-1976 72
3.50.1 Sessione ordinaria 72
3.50.2 Sessione suppletiva 72
3.51 Anno scolastico 1976-1977 73
3.51.1 Sessione ordinaria 73
3.51.2 Sessione suppletiva 74
3.52 Anno scolastico 1977-1978 75
3.52.1 Sessione ordinaria 75
3.52.2 Sessione suppletiva 75
3.53 Anno scolastico 1978-1979 76

3.53.1 Sessione ordinaria 76
3.53.2 Sessione suppletiva 77
3.54 Anno scolastico 1979-1980 77
3.54.1 Sessione ordinaria 77
3.54.2 Sessione suppletiva 78
3.55 Anno scolastico 1980-1981 79
3.55.1 Sessione ordinaria 79
3.55.2 Sessione suppletiva 79
3.56 Anno scolastico 1981-1982 80
3.56.1 Sessione ordinaria 80
3.56.2 Sessione suppletiva 81
3.57 Anno scolastico 1982-1983 81
3.57.1 Sessione ordinaria 81
3.57.2 Sessione suppletiva 82
3.58 Anno scolastico 1983-1984 83
3.58.1 Sessione ordinaria 83
3.58.2 Sessione suppletiva 84
3.59 Anno scolastico 1984-1985 84
3.59.1 Sessione ordinaria 84
3.59.2 Sessione suppletiva 85
3.60 Anno scolastico 1985-1986 85
3.60.1 Sessione ordinaria 85
3.60.2 Sessione suppletiva 86
3.61 Anno scolastico 1986-1987 87
3.61.1 Sessione ordinaria 87
3.61.2 Sessione suppletiva 88
3.62 Anno scolastico 1987-1988 89
3.62.1 Sessione ordinaria 89
3.62.2 Sessione suppletiva 89
3.63 Anno scolastico 1988-1989 90
3.63.1 Sessione ordinaria 90
3.63.2 Sessione suppletiva 91
3.64 Anno scolastico 1989-1990 92
3.64.1 Sessione ordinaria 92
3.64.2 Sessione suppletiva 92
3.65 Anno scolastico 1990-1991 93
3.65.1 Sessione ordinaria 93
3.65.2 Sessione suppletiva 94
3.66 Anno scolastico 1991-1992 94
3.66.1 Sessione ordinaria 94
3.66.2 Sessione suppletiva 95
3.67 Anno scolastico 1992-1993 96
3.67.1 Sessione ordinaria 96
3.67.2 Sessione suppletiva 97

3.68 Anno scolastico 1993-1994 98
3.68.1 Sessione ordinaria 98
3.68.2 Sessione suppletiva 99
3.69 Anno scolastico 1994-1995 100
3.69.1 Sessione ordinaria 100
3.69.2 Sessione suppletiva 101
3.70 Anno scolastico 1995-1996 102
3.70.1 Sessione ordinaria 102
3.70.2 Sessione suppletiva 103
3.71 Anno scolastico 1996-1997 105
3.71.1 Sessione ordinaria 105
3.71.2 Sessione suppletiva 106
3.72 Anno scolastico 1997-1998 107
3.72.1 Sessione ordinaria 107
3.72.2 Sessione suppletiva 108
3.73 Anno scolastico 1998-1999 109
3.73.1 Sessione ordinaria 109
3.73.2 Sessione suppletiva 111
3.73.3 Sessione straordinaria 112
3.74 Anno scolastico 1999-2000 112
3.74.1 Sessione ordinaria 112
3.74.2 Sessione suppletiva 114
3.74.3 Sessione straordinaria 115
3.75 Anno scolastico 2000-2001 116
3.75.1 Esempio di prova - 1 116
3.75.2 Esempio di prova - 2 118
3.75.3 Sessione ordinaria 120
3.75.4 Sessione suppletiva 122
3.76 Anno scolastico 2001-2002 124
3.76.1 Sessione ordinaria 124
3.76.2 Sessione suppletiva 127
3.76.3 Sessione straordinaria 130
3.77 Anno scolastico 2002-2003 132
3.77.1 Sessione ordinaria 132
3.77.2 Sessione suppletiva 134
3.77.3 Sessione straordinaria 135
3.78 Anno scolastico 2003-2004 137
3.78.1 Sessione ordinaria 137
3.78.2 Sessione suppletiva 139
3.78.3 Sessione straordinaria 141
3.79 Anno scolastico 2004-2005 143
3.79.1 Sessione ordinaria 143
3.79.2 Sessione suppletiva 144
3.79.3 Sessione straordinaria 147

3.80 Anno scolastico 2005-2006 149
- 3.80.1 Sessione ordinaria 149
- 3.80.2 Sessione suppletiva 150
- 3.80.3 Sessione straordinaria 152

3.81 Anno scolastico 2006-2007 154
- 3.81.1 Sessione ordinaria 154
- 3.81.2 Sessione suppletiva 156
- 3.81.3 Sessione straordinaria 158

3.82 Anno scolastico 2007-2008 160
- 3.82.1 Sessione ordinaria 160
- 3.82.2 Sessione suppletiva 162
- 3.82.3 Sessione straordinaria 164

3.83 Anno scolastico 2008-2009 166
- 3.83.1 Sessione ordinaria 166
- 3.83.2 Sessione suppletiva 168
- 3.83.3 Sessione straordinaria 169

3.84 Anno scolastico 2009-2010 171
- 3.84.1 Sessione ordinaria 171
- 3.84.2 Sessione suppletiva 173
- 3.84.3 Sessione straordinaria 175

3.85 Anno scolastico 2010-2011 176
- 3.85.1 Sessione ordinaria 176
- 3.85.2 Sessione suppletiva 178
- 3.85.3 Sessione straordinaria 180

3.86 Anno scolastico 2011-2012 181
- 3.86.1 Sessione ordinaria 181
- 3.86.2 Sessione suppletiva 183
- 3.86.3 Sessione straordinaria 185

3.87 Anno scolastico 2012-2013 187
- 3.87.1 Sessione ordinaria 187
- 3.87.2 Sessione suppletiva 190
- 3.87.3 Sessione straordinaria 192

3.88 Anno scolastico 2013-2014 194
- 3.88.1 Sessione ordinaria 194
- 3.88.2 Sessione suppletiva 196
- 3.88.3 Sessione straordinaria 198

3.89 Anno scolastico 2014-2015 200
- 3.89.1 Simulazione del 25 febbraio 2015 200
- 3.89.2 Simulazione del 22 aprile 2015 202
- 3.89.3 Sessione ordinaria 207
- 3.89.4 Sessione suppletiva 210
- 3.89.5 Sessione straordinaria 213

3.90 Anno scolastico 2015-2016 213
- 3.90.1 Simulazione del 10 dicembre 2015 213

3.90.2 Simulazione del 29 aprile 2016 216
3.90.3 Sessione ordinaria 219
3.90.4 Sessione suppletiva 223
3.90.5 Sessione straordinaria 227
3.91 Anno scolastico 2016-2017 230
3.91.1 Sessione ordinaria 230
3.91.2 Sessione suppletiva 235
3.91.3 Sessione straordinaria 238
3.92 Anno scolastico 2017-2018 241
3.92.1 Sessione ordinaria 241
3.92.2 Sessione suppletiva 246
3.92.3 Sessione straordinaria 249

4 Corso sperimentale PNI 255
4.1 Anno scolastico 1991-1992 255
4.1.1 Sessione ordinaria 255
4.1.2 Sessione suppletiva 256
4.2 Anno scolastico 1992-1993 257
4.2.1 Sessione ordinaria 257
4.2.2 Sessione suppletiva 258
4.3 Anno scolastico 1993-1994 259
4.3.1 Sessione ordinaria 259
4.3.2 Sessione suppletiva 260
4.4 Anno scolastico 1994-1995 261
4.4.1 Sessione ordinaria 261
4.4.2 Sessione suppletiva 263
4.5 Anno scolastico 1995-1996 264
4.5.1 Sessione ordinaria 264
4.5.2 Sessione suppletiva 266
4.6 Anno scolastico 1996-1997 267
4.6.1 Sessione ordinaria 267
4.6.2 Sessione suppletiva 268
4.7 Anno scolastico 1997-1998 269
4.7.1 Sessione ordinaria 269
4.7.2 Sessione suppletiva 271
4.8 Anno scolastico 1998-1999 272
4.8.1 Sessione ordinaria 272
4.8.2 Sessione suppletiva 274
4.9 Anno scolastico 1999-2000 275
4.9.1 Sessione ordinaria 275
4.9.2 Sessione suppletiva 276
4.10 Anno scolastico 2000-2001 278
4.10.1 Esempio di prova - 1 278
4.10.2 Esempio di prova - 2 280

4.10.3 Esempio di prova - 3 282
4.10.4 Sessione ordinaria 284
4.10.5 Sessione suppletiva 286
4.11 Anno scolastico 2001-2002 287
4.11.1 Sessione ordinaria 287
4.11.2 Sessione suppletiva 289
4.11.3 Sessione Straordinaria 290
4.12 Anno scolastico 2002-2003 293
4.12.1 Sessione ordinaria 293
4.12.2 Sessione suppletiva 295
4.12.3 Sessione Straordinaria 297
4.13 Anno scolastico 2003-2004 299
4.13.1 Sessione ordinaria 299
4.13.2 Sessione suppletiva 301
4.13.3 Sessione Straordinaria 304
4.14 Anno scolastico 2004-2005 306
4.14.1 Sessione ordinaria 306
4.14.2 Sessione suppletiva 307
4.14.3 Sessione straordinaria 310
4.15 Anno scolastico 2005-2006 312
4.15.1 Sessione ordinaria 312
4.15.2 Sessione suppletiva 314
4.15.3 Sessione straordinaria 316
4.16 Anno scolastico 2006-2007 318
4.16.1 Sessione ordinaria 318
4.16.2 Sessione suppletiva 319
4.16.3 Sessione Straordinaria 321
4.17 Anno scolastico 2007-2008 323
4.17.1 Sessione ordinaria 323
4.17.2 Sessione suppletiva 324
4.17.3 Sessione straordinaria 326
4.18 Anno scolastico 2008-2009 328
4.18.1 Sessione ordinaria 328
4.18.2 Sessione suppletiva 330
4.18.3 Sessione straordinaria 332
4.19 Anno scolastico 2009-2010 334
4.19.1 Sessione ordinaria 334
4.19.2 Sessione suppletiva 336
4.19.3 Sessione straordinaria 338
4.20 Anno scolastico 2010-2011 340
4.20.1 Sessione ordinaria 340
4.20.2 Sessione suppletiva 342
4.20.3 Sessione straordinaria 344
4.21 Anno scolastico 2011-2012 346

4.21.1 Sessione ordinaria 346
4.21.2 Sessione suppletiva 348
4.21.3 Sessione straordinaria 349
4.22 Anno scolastico 2012-2013 351
4.22.1 Sessione ordinaria 351
4.22.2 Sessione suppletiva 353
4.22.3 Sessione straordinaria 355
4.23 Anno scolastico 2013-2014 357
4.23.1 Sessione ordinaria 357
4.23.2 Sessione suppletiva 360
4.23.3 Sessione straordinaria 362

5 Altre sperimentazioni 365
5.1 Anno scolastico 1996-1997 365
5.1.1 Sessione suppletiva - Progetto Brocca 365
5.2 Anno scolastico 1997-1998 366
5.2.1 Sessione ordinaria - Progetto Brocca (Scientifico) 366
5.2.2 Sessione ordinaria - Progetto Brocca (Scientifico-Tecnologico) 367
5.2.3 Sessione suppletiva - Progetto Brocca 370
5.3 Anno scolastico 1999-2000 371
5.3.1 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome 371
5.4 Anno scolastico 2000-2001 372
5.4.1 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 372
5.4.2 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia) 374
5.4.3 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia) 377
5.4.4 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 379
5.5 Anno scolastico 2001-2002 381
5.5.1 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 381
5.5.2 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia) 383
5.5.3 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia) 385
5.5.4 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 388
5.5.5 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (II tipologia) 389
5.5.6 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (III tipologia) 391
5.6 Anno scolastico 2002-2003 392
5.6.1 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 392
5.6.2 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia) 394
5.6.3 Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia) 395
5.6.4 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia) 397
5.6.5 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (II tipologia) 399
5.6.6 Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (III tipologia) 401
5.7 Anno scolastico 2009-2010 403
5.7.1 Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione 403
5.7.2 Sessione suppletiva - Liceo della comunicazione 405
5.8 Anno scolastico 2010-2011 407

5.8.1 Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione 407
5.9 Anno scolastico 2011-2012 409
5.9.1 Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione 409
5.10 Anno scolastico 2012-2013 410
5.10.1 Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione 410
5.11 Anno scolastico 2013-2014 412
5.11.1 Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione 412
5.11.2 Sessione straordinaria - Liceo della comunicazione 414
5.12 Anno scolastico 2014-2015 416
5.12.1 Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 416
5.13 Anno scolastico 2015-2016 418
5.13.1 Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 418
5.14 Anno scolastico 2016-2017 422
5.14.1 Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 422
5.15 Anno scolastico 2017-2018 425
5.15.1 Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 425
5.15.2 Sessione suppletiva - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 428
5.15.3 Sessione straordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva 430

6 Maturità Italiana all'estero 435
6.1 Anno scolastico 1972-1973 435
6.1.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 435
6.2 Anno scolastico 1973-1974 436
6.2.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 436
6.3 Anno scolastico 1976-1977 436
6.3.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 436
6.3.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero 437
6.3.3 Sessione ordinaria - Buenos Aires 438
6.3.4 Sessione suppletiva - Buenos Aires 439
6.4 Anno scolastico 1977-1978 439
6.4.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 439
6.4.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero 440
6.4.3 Sessione ordinaria - Buenos Aires 441
6.4.4 Sessione suppletiva - Buenos Aires 441
6.5 Anno scolastico 1978-1979 442
6.5.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 442
6.5.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero 442
6.5.3 Sessione ordinaria - Buenos Aires 443
6.5.4 Sessione suppletiva - Buenos Aires 444
6.6 Anno scolastico 1979-1980 445
6.6.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo 445
6.6.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo 445
6.6.3 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo 446
6.6.4 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo 447

6.6.5 Sessione ordinaria - Buenos Aires 447
6.6.6 Sessione suppletiva - Buenos Aires 448
6.7 Anno scolastico 1980-1981 448
6.7.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo 448
6.7.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo 449
6.7.3 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo 450
6.7.4 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo 450
6.7.5 Sessione ordinaria - Buenos Aires 451
6.7.6 Sessione suppletiva - Buenos Aires 451
6.8 Anno scolastico 1981-1982 452
6.8.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 452
6.8.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero 452
6.8.3 Sessione ordinaria - Buenos Aires 453
6.8.4 Sessione suppletiva - Buenos Aires 454
6.9 Anno scolastico 1982-1983 454
6.9.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo 454
6.9.2 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo 455
6.9.3 Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo 455
6.9.4 Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo 456
6.9.5 Sessione ordinaria - Buenos Aires 456
6.9.6 Sessione suppeltiva - Buenos Aires 457
6.10 Anno scolastico 1992-1993 457
6.10.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 457
6.11 Anno scolastico 1993-1994 458
6.11.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 458
6.12 Anno scolastico 1994-1995 459
6.12.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 459
6.13 Anno scolastico 1996-1997 460
6.13.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 460
6.14 Anno scolastico 1997-1998 461
6.14.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 461
6.15 Anno scolastico 1998-1999 462
6.15.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 462
6.16 Anno scolastico 1999-2000 463
6.16.1 Sessione ordinaria - Scuole all'estero 463
6.17 Anno scolastico 2000-2001 464
6.17.1 Sessione ordinaria - Europa 464
6.17.2 Sessione ordinaria - America latina 465
6.17.3 Sessione suppletiva - America latina 467
6.18 Anno scolastico 2001-2002 468
6.18.1 Sessione ordinaria - Europa 468
6.18.2 Sessione ordinaria - America latina 470
6.18.3 Sessione suppletiva - America latina 471
6.19 Anno scolastico 2002-2003 472

6.19.1 Sessione ordinaria - Europa 472
6.19.2 Sessione suppletiva - Europa 473
6.19.3 Sessione ordinaria - Americhe 475
6.19.4 Sessione suppletiva - Americhe 476
6.19.5 Sessione ordinaria - America latina 478
6.19.6 Sessione suppletiva - America latina 479
6.20 Anno scolastico 2003-2004 480
6.20.1 Sessione ordinaria - Europa 480
6.20.2 Sessione ordinaria - Americhe 482
6.20.3 Sessione suppletiva - Americhe 483
6.20.4 Sessione ordinaria - America latina 485
6.20.5 Sessione suppletiva - America latina 486
6.21 Anno scolastico 2004-2005 487
6.21.1 Sessione ordinaria - Europa 487
6.21.2 Sessione ordinaria - Americhe 488
6.21.3 Sessione suppletiva - Americhe 489
6.21.4 Sessione ordinaria - America latina 491
6.21.5 Sessione suppletiva - America latina 492
6.22 Anno scolastico 2005-2006 493
6.22.1 Sessione ordinaria - Europa 493
6.22.2 Sessione ordinaria - Americhe 494
6.22.3 Sessione ordinaria - America latina 496
6.22.4 Sessione suppletiva - America latina 497
6.23 Anno scolastico 2006-2007 498
6.23.1 Sessione ordinaria - Europa 498
6.23.2 Sessione ordinaria - Americhe 499
6.23.3 Sessione ordinaria - America Latina 501
6.23.4 Sessione suppletiva - America Latina 502
6.24 Anno scolastico 2007-2008 503
6.24.1 Sessione ordinaria - Europa 503
6.24.2 Sessione ordinaria - Americhe 505
6.24.3 Sessione ordinaria - America latina 506
6.24.4 Sessione suppletiva - America latina 508
6.25 Anno scolastico 2008-2009 509
6.25.1 Sessione ordinaria - Europa 509
6.25.2 Sessione ordinaria - Americhe 510
6.25.3 Sessione ordinaria - America latina 511
6.25.4 Sessione suppletiva - America latina 513
6.26 Anno scolastico 2009-2010 514
6.26.1 Sessione ordinaria - Americhe 514
6.26.2 Sessione suppletiva - Americhe 515
6.26.3 Sessione ordinaria - America latina 517
6.26.4 Sessione suppletiva - America latina 518
6.26.5 Sessione ordinaria - Santiago del Cile 519

6.26.6 Sessione suppletiva - Santiago del Cile 521
6.27 Anno scolastico 2010-2011 522
6.27.1 Sessione ordinaria - Europa 522
6.27.2 Sessione ordinaria - Americhe 524
6.27.3 Sessione ordinaria - America latina 526
6.28 Anno scolastico 2011-2012 528
6.28.1 Sessione ordinaria - Europa 528
6.28.2 Sessione ordinaria - Americhe 529
6.28.3 Sessione ordinaria - America latina 531
6.28.4 Sessione suppletiva - America latina 533
6.28.5 Sessione ordinaria - Santiago del Cile 534
6.28.6 Sessione suppletiva - Santiago del Cile 536
6.29 Anno scolastico 2012-2013 537
6.29.1 Sessione ordinaria - Europa 537
6.29.2 Sessione ordinaria - Americhe 539
6.29.3 Sessione ordinaria - America latina 540
6.29.4 Sessione suppletiva - America latina 542
6.29.5 Sessione ordinaria - Santiago del Cile 543
6.29.6 Sessione suppletiva - Santiago del Cile 544
6.30 Anno scolastico 2013-2014 546
6.30.1 Sessione ordinaria - Europa 546
6.30.2 Sessione ordinaria - Americhe 547
6.30.3 Sessione ordinaria - America latina 549
6.30.4 Sessione ordinaria - Santiago del Cile 550
6.31 Anno scolastico 2014-2015 552
6.31.1 Sessione ordinaria - Europa 552
6.31.2 Sessione ordinaria - Americhe 555
6.32 Anno scolastico 2015-2016 558
6.32.1 Sessione ordinaria - Europa 558
6.32.2 Sessione ordinaria - Americhe 558

7 Prove assegnate a partire dal 2019 561
7.1 Anno scolastico 2018-2019 561
7.1.1 Simulazione di Matematica del 20 dicembre 2018 561
7.1.2 Simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018 565
7.1.3 Simulazione di Matematica e Fisica del 28 febbraio 2019 571
7.1.4 Simulazione di Matematica e Fisica del 2 aprile 2019 574
7.1.5 Sessione ordinaria 577
7.1.6 Sessione suppletiva 582
7.1.7 Sessione straordinaria 585
7.1.8 Sessione ordinaria - Scuole italiane all'estero, calendario australe 588

A Prove di Fisica 591
A.1 Anno scolastico 1998-1999 591

A.1.1 Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 591
A.1.2 Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione suppletiva 592
A.2 Anno scolastico 1999-2000 593
A.2.1 Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 593
A.3 Anno scolastico 2001-2002 595
A.3.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 595
A.4 Anno scolastico 2003-2004 596
A.4.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 596
A.5 Anno scolastico 2005-2006 599
A.5.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 599
A.6 Anno scolastico 2007-2008 600
A.6.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 600
A.7 Anno scolastico 2009-2010 601
A.7.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 601
A.8 Anno scolastico 2011-2012 602
A.8.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 602
A.8.2 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione suppletiva 604
A.9 Anno scolastico 2013-2014 606
A.9.1 Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione ordinaria 606
A.10 Anno scolastico 2014-2015 608
A.10.1 Simulazione di Fisica del 11 marzo 2015 608
A.11 Anno scolastico 2015-2016 610
A.11.1 Simulazione di Fisica del 25 gennaio 2016 610
A.12 Anno scolastico 2016-2017 618
A.12.1 Simulazione di Fisica del 25 ottobre 2016 618
A.12.2 Simulazione di Fisica del 12 gennaio 2017 625
A.13 Anno scolastico 2018-2019 630
A.13.1 Simulazione di Fisica del 20 dicembre 2018 630

B Esami di Licenza Liceale 635
B.1 Anno scolastico 1874-1875 635
B.2 Anno scolastico 1875-1876 635
B.2.1 Sessione estiva 635
B.2.2 Sessione autunnale 636
B.3 Anno scolastico 1888-1889 636
B.3.1 Sessione estiva 636
B.4 Temi pubblicati sul Periodico di Matematiche, V.5 (1890) 636
B.5 Anno scolastico 1889-1890 640
B.5.1 Sessione estiva 640
B.5.2 Sessione autunnale 643
B.6 Temi pubblicati sul Periodico di Matematiche, V.6 (1891) 645

C Prove assegnate all'esame di maturità dell'Istituto Magistrale 647
C.1 Anno scolastico 1955-1956 647
C.1.1 Sessione estiva 647
C.1.2 Sessione autunnale 647
C.2 Anno scolastico 1956-1957 647
C.2.1 Sessione estiva 647
C.2.2 Sessione autunnale 648
C.3 Anno scolastico 1957-1958 648
C.3.1 Sessione estiva 648
C.3.2 Sessione autunnale 648
C.4 Anno scolastico 1958-1959 648
C.4.1 Sessione estiva 648
C.4.2 Sessione autunnale 648
C.5 Anno scolastico 1959-1960 649
C.5.1 Sessione estiva 649
C.5.2 Sessione autunnale 649
C.6 Anno scolastico 1960-1961 649
C.6.1 Sessione estiva 649
C.6.2 Sessione autunnale 649
C.7 Anno scolastico 1961-1962 650
C.7.1 Sessione estiva 650
C.7.2 Sessione autunnale 650
C.8 Anno scolastico 1962-1963 650
C.8.1 Sessione estiva 650
C.8.2 Sessione autunnale 650
C.9 Anno scolastico 1963-1964 650
C.9.1 Sessione estiva 650
C.9.2 Sessione autunnale 651
C.10 Anno scolastico 1964-1965 651
C.10.1 Sessione estiva 651
C.10.2 Sessione autunnale 651
C.11 Anno scolastico 1965-1966 651
C.11.1 Sessione estiva 651
C.11.2 Sessione autunnale 652
C.12 Anno scolastico 1966-1967 652
C.12.1 Sessione estiva 652
C.12.2 Sessione autunnale 652
C.13 Anno scolastico 1967-1968 652
C.13.1 Sessione estiva 652
C.13.2 Sessione autunnale 653
C.14 Anno scolastico 1968-1969 653
C.14.1 Sessione estiva 653
C.15 Anno scolastico 1969-1970 653
C.15.1 Sessione estiva 653

C.15.2 Sessione suppletiva 654
C.16 Anno scolastico 1970-1971 654
C.16.1 Sessione estiva 654
C.17 Anno scolastico 1971-1972 654
C.17.1 Sessione estiva 654
C.18 Anno scolastico 1973-1974 654
C.18.1 Sessione estiva 654
C.19 Anno scolastico 1975-1976 655
C.19.1 Sessione estiva 655
C.19.2 Sessione estiva-2 655
C.19.3 Sessione suppletiva 655
C.20 Anno scolastico 1977-1978 655
C.20.1 Sessione estiva 655
C.21 Anno scolastico 1978-1979 656
C.21.1 Sessione estiva 656
C.21.2 Sessione suppletiva 656
C.22 Anno scolastico 1980-1981 656
C.22.1 Sessione estiva 656
C.23 Anno scolastico 1982-1983 657
C.23.1 Sessione estiva 657
C.24 Anno scolastico 1983-1984 657
C.24.1 Sessione estiva 657
C.25 Anno scolastico 1985-1986 657
C.25.1 Sessione estiva 657
C.26 Anno scolastico 1986-1987 658
C.26.1 Sessione estiva 658
C.27 Anno scolastico 1989-1990 658
C.27.1 Sessione estiva 658
C.28 Anno scolastico 1990-1991 659
C.28.1 Sessione estiva 659
C.29 Anno scolastico 1993-1994 659
C.29.1 Sessione estiva 659
C.30 Anno scolastico 1994-1995 660
C.30.1 Sessione estiva 660
C.31 Anno scolastico 1997-1998 660
C.31.1 Sessione estiva 660
C.32 Anno scolastico 1997-1998 (PNI) 661
C.32.1 Sessione estiva 661
C.33 Anno scolastico 1998-1999 662
C.33.1 Sessione estiva 662
C.34 Anno scolastico 2000-2001 662
C.34.1 Sessione estiva 662
C.35 Anno scolastico 2000-2001 (PNI) 663
C.35.1 Sessione estiva 663

C.36 Anno scolastico 664
C.36.1 Sessione estiva 664
C.36.2 Sessione autunnale 664
C.37 Anno scolastico 664
C.37.1 Sessione estiva 664
C.37.2 Sessione autunnale 664
C.38 Anno scolastico 664
C.38.1 Sessione estiva 664
C.38.2 Sessione autunnale 664

D Osservazioni e commenti 665
D.1 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1973, quesito 1 666
D.2 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1977, quesito 3 668
D.3 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1980, quesito 3 668
D.4 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1980, quesito 4 669
D.5 Scuole all'estero, II gruppo, sessione ordinaria 1980, quesito 2 670
D.6 Scuole all'estero, Buenos Aires, sessione ordinaria 1980, quesito 3 670
D.7 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1982, quesito 4 671
D.8 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1985, quesito 4 671
D.9 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1993, quesito 3 672
D.10 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1994, quesito 2 673
D.11 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1999, quesito 2 675
D.12 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1999, quesito 2 675
D.13 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2000, problema 2 676
D.14 Corso PNI, sessione ordinaria 2000, problema 3 677
D.15 Corso PNI, sessione ordinaria 2002, quesito 9 678
D.16 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2003, quesito 7 678
D.17 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2004, quesito 3 679
D.18 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2004, problema 1, domanda e) 680
D.19 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2004, quesito 1 680
D.20 Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2004, quesito 8 681
D.21 Corso PNI, sessione straordinaria 2004, problema 2 681
D.22 Scuole all'estero, America Latina, sessione suppletiva 2004, quesito 6 682
D.23 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2005, quesito 10 682
D.24 Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2005, quesito 4 683
D.25 Corso PNI, sessione suppletiva 2005, quesito 7 683
D.26 Corso PNI, sessione straordinaria 2005, quesito 7 684
D.27 Corso PNI, sessione suppletiva 2006, quesito 6 685
D.28 Corso PNI, sessione straordinaria 2006, quesito 6 686
D.29 Corso PNI, sessione suppletiva 2007, quesito 5 687
D.30 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2008, quesito 10 687
D.31 Corso PNI, sessione straordinaria 2008, quesito 4 688
D.32 Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2009, quesito 9 689
D.33 Corso PNI, sessione suppletiva 2009, problema 2 689

D.34 Corso PNI, sessione suppletiva 2009, quesito 3 690
D.35 Scuole all'estero, America Latina, sessione ordinaria 2009, quesito 2 690
D.36 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2010, quesito 3 691
D.37 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2010, quesito 4 691
D.38 Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2010, quesito 8 691
D.39 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2013, quesito 6 692
D.40 Corso PNI, sessione straordinaria 2013, problema 1 692
D.41 Corso PNI, sessione straordinaria 2013, quesito 6 692
D.42 Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2015, problema 2, domanda a) 692
D.43 Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2015 693
D.44 Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, considerazioni generali 694
D.45 Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, problema 2, domanda 4 695
D.46 Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, quesito 10 696
D.47 Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2016, problema 1 697
D.48 A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018, quesiti 697
D.49 A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018, problema 2 699
D.50 A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 28 febbraio 2019 703

Osservazioni sulle notazioni 705

Bibliografia 710

Premessa

Questo volume contiene una raccolta di temi di matematica assegnati agli esami di stato di Liceo Scientifico dalla sua nascita alla data di pubblicazione. Più precisamente sono presenti:

— tutti i temi assegnati nel corso di ordinamento nelle varie sessioni;

— tutti i temi assegnati nel corso sperimentale PNI nelle varie sessioni;

— una selezione dei temi assegnati in altre sperimentazioni;

— un'ampia selezione dei temi assegnati nelle scuole italiane all'estero.

Considerato che le indicazioni di legge, a partire dall'anno scolastico 2014-2015, prevedono la possibilità di assegnare anche Fisica, o prove multidisciplinari Fisica-Matematica, come seconda prova agli esami di stato di Liceo Scientifico, abbiamo raccolto anche le prove di Fisica assegnate nelle sperimentazioni "Brocca" fino al termine della sperimentazione e le prove e simulazioni ministeriali assegnate a partire dall'anno scolastico 2014-2015.

È anche presente una ampia selezione dei temi assegnati nella sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico, il "predecessore" del Liceo Scientifico, nonchè alcune prove della licenza liceale (liceo classico) precedenti la riforma Gentile.

Abbiamo anche inserito, per un utile confronto, una selezione delle prove assegnate all'esame di maturità dell'Istituto Magistrale dal 1956 al 2001.

Il lavoro è rivolto principalmente agli studenti che si accingono ad affrontare l'esame conclusivo del loro corso di studi di Liceo Scientifico, nella convinzione che l'analisi, la discussione e, perché no, la critica delle prove assegnate nel passato possa essere estremamente utile ed educativa per la preparazione a questo esame.

Il lavoro può anche avere un valore documentale per valutare l'evoluzione delle conoscenze matematiche richieste ai candidati nell'arco di oltre un secolo (la prima prova che pubblichiamo è del 1871).

Sono disponibili in letteratura e in internet numerose raccolte di temi d'esame, ma non ci risulta che esista alcuna altra raccolta così completa: tuttavia mancano numerose tracce in particolare delle scuole italiane all'estero e, soprattutto, della sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico. Saremo grati a tutti coloro che ci segnaleranno errori e imprecisioni e chiediamo la collaborazione per reperire quelle prove che non siamo riusciti a trovare. L'indirizzo mail a cui inviare eventuali segnalazioni o materiali è batmath@gmail.com.

È doveroso un ringraziamento al prof. Italo D'Ignazio, la cui collaborazione per la prima edizione di questa raccolta (2007) è stata preziosa, e all'ispettore Luciano Favini, grazie al quale siamo riusciti a reperire un gran numero di prove dei tempi più recenti, alcune delle quali sono qui pubblicate per la prima volta. Ringraziamo infine il dott. Roberto Carosi che ci ha fornito tutte le prove della maturità magistrale, le simulazioni dell'anno 2000-2001 e alcune prove precedenti la riforma Gentile.

Luciano Battaia, Ercole Suppa

1. Un po' di storia

In questo capitolo proponiamo alcuni cenni storici riguardanti l'insegnamento secondario superiore in Italia dopo il 1861, con particolare riguardo al Liceo Scientifico e alle scuole che, prima della sua nascita, hanno assicurato l'istruzione più propriamente scientifica nel Regno d'Italia.

Seguono alcune considerazioni sulla storia dell'esame di maturità scientifica, soprattutto con riferimento alla prova di matematica.

1.1. L'istruzione scientifica prima della riforma Gentile

Il Liceo Scientifico(1) è stato istituito nel 1923, con la riforma Gentile. Prima di allora era sostanzialmente ancora in vigore la legge Casati, emanata da Vittorio Emanuele II il 13 novembre 1859, mediante Regio Decreto: essa porta il nome del conte Gabrio Casati, ministro per la Pubblica Istruzione del Regno di Sardegna nel gabinetto Lamarmora. La legge riflette la realtà scolastica piemontese e lombarda, ma dopo la proclamazione del Regno d'Italia (1861) viene estesa gradualmente all'intero Paese. Questa legge, pur osteggiata(2), rappresentò il cardine dell'istruzione italiana fino al 1923.

La legge Casati prevedeva, dopo l'istruzione elementare di quattro anni (divisi in due bienni, di scuola elementare inferiore e di scuola elementare superiore(3) rispettivamente), sostanzialmente due(4) indirizzi di studio:

— l'Istruzione Classica, della durata di 8 anni e divisa in un ginnasio inferiore triennale, un ginnasio superiore biennale e il liceo classico triennale;

— l'Istruzione Tecnica, divisa in una scuola tecnica triennale e in un istituto tecnico, articolato in quattro sezioni, previsto triennale nella legge, ma poi effettivamente costituito da un biennio o un triennio, a seconda della sezione.

Solo l'istruzione classica dava accesso all'istruzione superiore, cioè all'Università nelle cinque facoltà allora esistenti: Teologia, Legge, Medicina, Scienze fisico-matematico-naturali, Lettere e Filosofia. Recita

---

[1]Molte delle notizie raccolte in questo breve excursus storico sono desunte da una serie di schede di Elena Bertonelli e Giaime Rodano, con la collaborazione di Giorgio Chiosso e Giuseppe Tognon [vedi 5] e da un lavoro di Elisa Patergnani [vedi 21].

[2]Basti citare una famosa critica di Carlo Cattaneo: "La legge Casati è indegna del tempo e dell'Italia. Non conviene porvi rimedio per rappezzarne la decima parte", oppure una affermazione di Francesco De Sanctis: "Io ho già incaricato il Consiglio superiore di esaminare la legge Casati perché proponga tutti i miglioramenti immediatamente attuabili [...]. E intanto - bisogna che non ve lo nasconda - noi dobbiamo rassegnarci a vivere per qualche tempo ancora con la legge Casati".

[3]L'istruzione nel grado inferiore, pur obbligatoria e gratuita, poteva essere anche svolta attraverso l'istruzione "paterna", cioè autonomamente dalle famiglie, oppure presso scuole private, altrimenti si poteva svolgere nelle scuole pubbliche istituite in ogni comune e dove il numero di alunni per classe è previsto oscillare tra 70 e 100. Il grado superiore viene istituito solo nei comuni con più di 4000 abitanti.

[4]Per completezza segnaliamo che erano anche previste le "Scuole normali", di durata triennale, a cui si poteva accedere al compimento dei 16 o 15 anni rispettivamente per i ragazzi e le ragazze: esse avevano lo scopo di formare i maestri, che potevano ottenere la patente per la scuola elementare inferiore già al termine del secondo anno.

infatti l'articolato della legge: "L'istruzione secondaria ha per fine di ammaestrare i giovani in quegli studi mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi speciali che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle Università dello Stato". Per contro "L'istruzione tecnica ha per fine di dare ai giovani che intendono dedicarsi a determinate carriere del pubblico servizio, alle industrie, ai commerci e alla condotta delle cose agrarie, la conveniente cultura generale e speciale". Nella sostanza il liceo classico con il successivo percorso universitario è il canale attraverso cui si forma la classe dirigente, mentre l'istruzione tecnica è deputata alla formazione dei quadri intermedi.

Prima della riforma Gentile furono fatti alcuni interventi legislativi (la legge Coppino del 15 luglio 1877, i "Provvedimenti Orlando", del 8 luglio 1904[5] e la legge Daneo-Credaro del 4 giugno 1911) e promulgati diversi "regolamenti" dai vari ministri, che adeguarono la legge Casati alle nuove richieste della società, senza però mutarne la struttura essenziale.

Per rendersi conto di quale era il ruolo dell'istruzione scientifica nei due tipi di scuola è opportuno esaminare le istruzioni del decreto sui programmi scolastici emanato dal ministro Coppino nel 1867 [vedi 22]. L'istruzione classica prevedeva l'insegnamento della matematica, a completamento della cultura generale che doveva contraddistinguere i membri della futura élite del paese, e con la finalità di contribuire alla preparazione logica degli allievi: "La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da risguardarsi come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza". Molto diverso il ruolo che gli stessi programmi affidavano alla matematica negli istituti tecnici, affermando che "il fine dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche è quello di fornire ai giovanetti in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri".

Il regolamento attuativo della legge Casati, promulgato con Regio Decreto del 19 settembre del 1860 n.4315 dal ministro Mamiani, istituiva quattro sezioni di Istituto Tecnico: Amministrativo-Commerciale, Agronomica, Chimica, Fisico-Matematica. Le prime tre avevano una durata biennale, l'ultima una durata triennale.

Sia per accedere alla scuola tecnica che all'istituto tecnico si doveva superare un esame di ammissione e all'ultimo anno si otteneva un attestato di licenza. Molto importante il fatto che, in contrasto con la legge Casati, il regolamento concesse ai possessori dell'attestato di licenza della sezione fisico-matematica la possibilità di accedere alla Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali.

Nel corso degli anni successivi si ebbero diverse modifiche e le sezioni dell'istituto tecnico arrivarono, per un breve periodo, fino a nove. La modifica più importante fu la riforma Minghetti-Luzzatti che portò la durata degli studi dell'istituto tecnico a quattro anni, con un biennio comune a tutte le sezioni e un successivo biennio articolato in sezioni specialistiche.

Con alti e bassi la sezione fisico-matematica rappresentò per un sessantennio il ramo di scuola secondaria in cui la matematica aveva il posto di maggiore rilievo ed ebbe il merito di aver formato matematici di alto profilo scientifico come Vito Volterra, Corrado Segre, Francesco Severi, Giuseppe Veronese. Essa riuscì nell'intento di raggiungere il doppio obiettivo di orientamento professionale e di preparazione

[5] È interessante notare che all'interno di questi provvedimenti era inserita una norma, abbastanza rivoluzionaria a nostro avviso, che consentiva agli studenti del liceo classico di scegliere tra matematica e greco a partire dalla seconda classe del triennio.

ai corsi universitari. Era la sezione più richiesta e acquisì molto prestigio: si studiavano, oltre alle materie scientifiche, le lingue moderne e il contenuto letterario era controbilanciato da un insegnamento delle scienze fisico matematiche molto intenso, tanto da far affermare al Direttore generale Chiarini, in una relazione[(6)] al Ministro della Pubblica Istruzione: "L'Italia, checché altri dica, ha già il suo liceo scientifico nella sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico".

È interessante, per un utile raffronto con le situazioni successive, considerare il quadro orario in vigore in questa sezione fisico-matematica, da quando fu definitivamente stabilizzato nel 1892, vedi la tabella 1.1.

	I	II	III	IV
Lettere italiane	6	5	4	6
Lingua francese	3	3	2	—
Lingua tedesca o inglese	—	3	5	5
Geografia	3	3	—	—
Storia	3	3	2	—
Disegno	6	6	4	6
Matematica	6	5	5	5
Fisica	—	—	5	3
Chimica	—	—	3	4
Storia naturale	3	3	—	—
Totale	30	31	30	29

Tabella 1.1.: *Il quadro orario della sezione fisico-matematica a partire dal* 1892

Per quanto riguarda i programmi di insegnamento della matematica molto sinteticamente segnaliamo che nel biennio iniziale era previsto lo studio di tutta l'aritmetica razionale, di tutta l'algebra elementare, della geometria elementare piana e solida, dei logaritmi e relative tavole, di questioni riguardanti l'interesse semplice e composto, gli sconti, gli ammortamenti. Successivamente si studiavano disequazioni di primo e secondo grado, problemi di massimo e minimo, frazioni continue, elementi di calcolo combinatorio, trigonometria piana e sferica, similitudini, omotetie, coniche, aree e volumi di figure sferiche, poliedri, elementi di geometria descrittiva. Significativo il fatto che restava escluso lo studio del calcolo differenziale e integrale, che i professori universitari consideravano loro competenza esclusiva.

Un cenno è doveroso alla breve esperienza del "liceo moderno", attuato dal ministro Credaro nel 1911 e che prevedeva, a fronte della soppressione del greco e dell'alleggerimento del latino, l'insegnamento di una seconda lingua straniera (tedesco o inglese, che si affiancava al francese), del diritto, dell'economia e un leggero incremento delle materie scientifiche. Vi si accedeva dopo il triennio del ginnasio inferiore, comune anche all'istruzione classica. Anche per il liceo moderno proponiamo, vedi la tabella 1.2, il quadro orario delle lezioni, segnalando che, come per il liceo classico, permaneva la distinzione tra il biennio di ginnasio superiore e il triennio di liceo vero e proprio. La proposta di istituire un liceo moderno in cui accanto all'insegnamento del latino fosse ben saldo il ruolo della matematica e della fisica circolava già da alcuni anni, ma fu respinta [vedi 22] anche, per esempio, dalla Federazione Nazionale degli Insegnanti (FNISM) nel suo settimo congresso, con la seguente motivazione: "Il congresso, ritenendo

6 Bollettino Ufficiale del 9/2/1899, pag.349.

	IV	V	I	II	III
Italiano	4	4	3	4	3
Latino	5	5	3	3	2
Francese	3	3	4	—	—
Tedesco o inglese	4	4	3	3	3
Storia e geografia	3	3	4	4	2
Diritto, economia e filosofia	—	—	—	3	4
Matematica	2	2	4	3	3
Fisica e chimica	—	—	4	3	3
Scienze naturali	2	2	—	3	3
Disegno	2	2	—	—	—
Educazione fisica	2	2	2	2	2
Totale	27	27	27	27	25

Tabella 1.2.: *Il quadro orario del ginnasio-liceo moderno a partire dal* 1911

che nessuna scuola preparatoria all'Università possa rispondere ai suoi fini, ed avere il carattere di una scuola di cultura, se si tenga estranea allo spirito dell'antichità classica, rifiuta ogni forma di scuola media di secondo grado esclusivamente moderna e scientifica". Lo stesso Giovanni Gentile così si espresse [vedi 22]: "di umanesimo ce n'è uno solo; non bisogna creare due licei, ma soltanto sfoltire quello classico, "sfollando" verso le scuole commerciali, industriali, professionali, agrarie e tecniche la "zavorra"; la sezione fisico-matematica non va trasformata, ma semmai abolita, poiché per trasformarla a dovere, se ne dovrebbe fare un liceo classico!" Sostanzialmente a queste idee Gentile si rifarà emanando i decreti di riforma del 1923.

1.2. Dalla riforma Gentile ai nostri giorni

La riforma Gentile viene varata a circa un anno dalla marcia su Roma, quando ancora il fascismo non ha assunto le vesti di regime, e si attua dunque in una situazione ancora caratterizzata dal rispetto formale delle norme del vigente Statuto Albertino e del sistema parlamentare. Le radici della riforma affondano nel progetto di Benedetto Croce, ministro della Pubblica Istruzione nell'ultimo governo Giolitti del 1920-21, progetto che Giovanni Gentile, ministro della Pubblica Istruzione nel primo governo Mussolini, rielabora, estende e conduce in porto.

Gentile emana tra il maggio e l'ottobre del 1923 tre regi decreti che rivedono sostanzialmente l'intero ordinamento dell'istruzione: con il R.D. 1054 del 6 maggio la scuola media di 1° e 2° grado, con il R.D. 2012 del 30 settembre l'università, con il R.D. 2185 del 1 ottobre la scuola elementare. Questi decreti vengono emanati senza discussione(7) parlamentare, in forza di una legge del 3 dicembre 1922 che conferisce al Governo del Re pieni poteri per il riordino del sistema tributario e della pubblica amministrazione.

[7] È da segnalare che anche la legge Casati era stata promulgata mediante Regio Decreto, anch'essa senza discussione parlamentare, in base ai poteri straordinari attribuiti al Governo del Re in quanto il Regno di Sardegna era allora impegnato nelle vicende inerenti la seconda guerra di indipendenza. Come già detto, la legge fu mantenuta anche dopo l'unità d'Italia, senza alcuna discussione parlamentare, ancora a causa dei gravissimi problemi che il nuovo stato si trovava ad affrontare.

La riforma Gentile prevede una istruzione elementare di complessivi 8 anni, divisi in un triennio preparatorio facoltativo (l'asilo infantile, successivamente denominato scuola materna), in un grado inferiore triennale e in un grado superiore biennale. Sono previsti un esame di compimento degli studi elementari sia inferiori che superiori, rispettivamente al terzo e quinto anno.

Successivamente si passa all'istruzione media, per accedere alla quale è necessario superare un apposito esame di ammissione (che sarà abolito solo con la nascita della scuola media unica nel 1962). L'istruzione media è articolata come segue.

— L'istruzione classica (che sostanzialmente ripropone lo schema della legge Casati) che "ha per fine di preparare all'Università ed agli Istituti superiori". Dura 8 anni ed è divisa in due gradi: il ginnasio a sua volta diviso in inferiore di 3 anni e superiore di 2 anni, e il liceo di durata triennale. È previsto un esame di passaggio dal ginnasio inferiore a quello superiore e un esame, abolito solo nel 1969, conclusivo della scuola ginnasiale che ha valore di ammissione al liceo. Alla fine del liceo si deve sostenere l'esame di maturità che dà l'accesso a tutte le facoltà universitarie. In sostanza il giovane che si iscrive all'università ha già superato ben sei esami nei primi 13 anni di studio.

— L'istruzione tecnica che "ha per fine di preparare ad alcune professioni". Dura 8 anni ed è divisa in un grado inferiore e uno superiore, entrambi quadriennali. Sono previsti un esame di ammissione al corso superiore e un esame di abilitazione professionale e maturità per l'accesso alle facoltà di Agraria, Economia e Commercio e Statistica.

— L'istruzione magistrale che "ha per fine di preparare i maestri". Dura 7 anni ed è divisa in un grado inferiore quadriennale e un grado superiore triennale. Sono previsti un esame di ammissione al corso superiore e un esame di abilitazione all'insegnamento elementare che consente l'accesso all'Istituto superiore di Magistero, che andava assumendo fisionomie di vero e proprio corso universitario.

— I licei scientifici che "hanno per fine di approfondire l'istruzione dei giovani che aspirino agli studi universitari nelle Facoltà di scienze e di medicina e chirurgia". La durata del corso è di 4 anni e *non è previsto* un grado inferiore. Alla prima classe del liceo scientifico hanno accesso alunni provenienti dal ginnasio classico, alunni provenienti dal corso inferiore dell'istituto tecnico, che abbiano conseguito l'ammissione al corso superiore, alunni del corso inferiore dell'istituto magistrale che abbiano conseguito l'ammissione al corso superiore, infine alunni che sostengano e superino una prova di ammissione al liceo scientifico, purché siano trascorsi almeno quattro anni dall'esame di ammissione alla scuola media di primo grado. Il liceo scientifico si conclude con l'esame di maturità che dà accesso alle facoltà di Medicina e di Scienze alle Università.

— I licei femminili che "hanno per fine di impartire un complemento di cultura generale alle giovanette che non aspirino agli studi superiori". La durata è triennale e, come per il liceo scientifico, non è previsto un grado inferiore. Vi si accede con le stesse modalità già indicate per il liceo scientifico. Si conclude con un esame di licenza che non dà accesso ad alcuna facoltà universitaria. Il liceo femminile ha vita breve e viene soppresso già nel 1928.

— L'istruzione complementare triennale che "fa seguito a quella elementare e la compie". Si conclude con un esame di licenza e non dà accesso ad alcuna altra forma di istruzione. Anche questa scuola dura poco tempo per lo scarso numero di iscritti e viene trasformata, tra il 1928 e il 1930, in scuola secondaria di avviamento professionale seguita da un biennio omologo.

— Per completezza segnaliamo anche l'istituzione di un triennio di classi integrative, destinate all'avviamento professionale e con poche aggiunte programmatiche rispetto alle scuole elementari.

Nella sostanza il nuovo liceo scientifico nasceva dalla fusione della sezione fisico-matematica e del liceo moderno, che furono soppressi. Tuttavia esso era solo un lontano parente in particolare della sezione fisico-matematica: è sufficiente confrontare il numero di ore settimanali dedicate alla matematica nei due casi per notare un forte ridimensionamento nel liceo scientifico. Anche le finalità assegnate allo studio della matematica erano diverse: nella sezione fisico-matematica era esplicitamente prevista la preparazione alle facoltà scientifiche, nel liceo scientifico la matematica serviva sostanzialmente a sviluppare "l'attività analitica e sistematica dello spirito". La stessa Accademia dei Lincei esprime forti critiche, in particolare per lo scarso peso degli insegnamenti scientifici e per l'insegnamento filosofico "troppo astratto o prolungato".

Il liceo scientifico ha inizialmente una vita molto stentata, anche a causa della mancanza di un grado inferiore preparatorio: gli studenti che intendevano affrontare questo corso di studi dovevano, dopo uno dei gradi inferiori relativo ad un altro percorso, cambiare, anche fisicamente, istituto scolastico e si trovavano a frequentare in classi molto eterogenee, a differenza di quanto succedeva per gli altri gradi superiori dell'insegnamento secondario.

Riportiamo il quadro orario previsto dalla riforma Gentile per il Liceo Scientifico, vedi tabella 1.3.

	I	II	III	IV
Lettere italiane	4	4	3	3
Lettere latine	3	4	4	4
Lingua straniera	4	4	3	3
Storia	3	3	2	2
Filosofia	—	—	4	4
Matematica	5	3	3	3
Fisica	—	2	3	3
Scienze naturali	3	3	2	2
Disegno e storia dell'arte	3	2	2	2
Totale	25	25	26	26

Tabella 1.3.: *Il quadro orario del liceo scientifico della riforma Gentile*

La scuola che Gentile proponeva era una scuola estremamente severa che consentiva l'accesso ai livelli superiori dell'istruzione solo a un ristretto numero di studenti: in particolare solo i figli dell'alta borghesia e pochissimi altri potevano frequentare il ginnasio-liceo, i più dotati dei figli del ceto medio potevano accedere al liceo scientifico o agli istituti tecnici, tutti gli altri, cioè la stragrande maggioranza, raggiunti i 14 anni[8] non dovevano proseguire gli studi.

Durante il ventennio fascista ci furono numerosi ritocchi[9] a questa riforma, in particolare per attenuarne la severità, fino all'intervento del ministro dell'Educazione nazionale Giuseppe Bottai che

[8] L'obbligo scolastico fu elevato da Gentile al quattordicesimo anno di età.

[9] Lo stesso Gentile, a fronte delle proteste di famiglie e insegnanti in particolare contro la scuola complementare, aggiunse, già nel 1923, a questa scuola un biennio integrativo che consentiva l'iscrizione al liceo scientifico e al corso superiore dell'istituto tecnico.

	I	II	III	IV	V
Lingua e lettere italiane	4	4	4	3	4
Lingua e lettere latine	4	5	4	4	3
Lingua e letteratura straniera	3	4	3	3	4
Storia	3	2	2	2	3
Geografia	2	—	—	—	—
Filosofia	—	—	2	3	3
Matematica	5	4	3	3	3
Fisica	—	—	2	3	3
Scienze naturali, chimica e geografia	—	2	3	3	2
Disegno e storia dell'arte	1	3	2	2	2
Educazione fisica	2	2	2	2	2
Religione cattolica	1	1	1	1	1
Totale	25	27	28	29	30

Tabella 1.4.: *Il quadro orario del liceo scientifico dal 1952 al 2010*

prevedeva varie innovazioni al sistema scolastico, in particolare all'istruzione elementare e al grado inferiore dell'istruzione secondaria. L'unica parte attuata della riforma Bottai portò, nel 1940, alla nascita della "scuola media unica", che in realtà unificava solo i trienni inferiori dei ginnasi, istituti magistrali e istituti tecnici. Venne contestualmente istituito un anno di collegamento con il liceo scientifico quadriennale, che così diventò quinquennale, come il ginnasio-liceo classico. L'orario del liceo scientifico fu più volte rimaneggiato, anche a causa degli eventi bellici e raggiunse la sua forma definitiva solo nel 1952, per rimanere inalterato, almeno nel corso di ordinamento, fino al 2010, vedi la tabella 1.4.

Il 1962 è un anno molto importante nella storia dell'istruzione postelementare: il 31 dicembre, con la legge(10) 1859, si dà finalmente attuazione al progetto di scuola media unica, di cui si discuteva fin dagli inizi del secolo e che era stata solo parzialmente realizzata dalla riforma Bottai.

La struttura dell'istruzione preuniversitaria in Italia risulta ora sostanzialmente semplificata.

- La scuola materna triennale (non obbligatoria).
- La scuola elementare quinquennale che si conclude con l'esame(11) di licenza. Fino al 1958 è previsto un esame alla fine della terza, successivamente spostato alla fine della seconda e poi definitivamente abolito nel 1977.
- La scuola media di primo grado che si conclude con l'esame di licenza che dà accesso a tutte le scuole medie superiori e che conclude l'obbligo scolastico.
- La scuola media superiore comprendente il ginnasio-liceo, il liceo scientifico, gli istituti tecnici, gli istituti professionali, tutti quinquennali, e il liceo artistico e l'istituto magistrale quadriennali.

[10] Questa riforma, a differenza di quanto era successo per la legge Casati e la riforma Gentile, fu varata dopo un ampio dibattito parlamentare, durato ben tre anni. Presidente del Consiglio era Amintore Fanfani, ministro della Pubblica Istruzione Luigi Gui.

[11] Questo esame sarà definitivamente abolito nel 2005

	I	II	III	IV	V
Lingua e letteratura italiana	4	4	4	4	4
Lingua e cultura latina	3	3	3	3	3
Lingua e cultura straniera	3	3	3	3	3
Storia e geografia	3	3	—	—	—
Storia	—	—	2	2	2
Filosofia	—	—	3	3	3
Matematica	5	5	4	4	4
Fisica	2	2	3	3	3
Scienze naturali	2	2	3	3	3
Disegno e storia dell'arte	2	2	2	2	2
Scienze motorie e sportive	2	2	2	2	2
Religione cattolica (att.altern.)	1	1	1	1	1
Totale	27	27	30	30	30

Tabella 1.5.: *Il quadro orario del liceo scientifico tradizionale, dopo la riforma Gelmini*

Nel 1962, con la stessa legge che istituiva la scuola media unica, si stabilì che la maturità scientifica era valida per l'iscrizione a qualsiasi facoltà, tranne lettere, e solo nel 1969 con la liberalizzazione totale dell'accesso all'università, venne tolto anche questo limite.

Intorno agli anni ′70 furono attivati nuovi indirizzi di istruzione tecnica e per esempio, a seguito della diffusione dei computer e della loro influenza sulla vita sociale e produttiva, vennero istituiti corsi per perito programmatore e perito informatico. A partire dal 1974 furono attivati molti progetti sperimentali, sia autonomi delle singole istituzioni scolastiche, naturalmente con approvazione ministeriale, che rientranti in progetti nazionali. Segnaliamo qui il Piano Nazionale Informatica (PNI) e il progetto Brocca, per l'importanza che hanno avuto nello sviluppo del liceo scientifico.

Il PNI prevedeva un potenziamento dell'insegnamento della matematica, con elementi di informatica, e della fisica, con aumento del numero di ore settimanali[(12)], senza alcuna variazione per le altre discipline. Il progetto Brocca era un progetto più articolato che, per il liceo scientifico, prevedeva diverse opzioni arrivando anche nella sperimentazione cosiddetta scientifico-tecnologica alla completa abolizione del latino. Era previsto anche l'insegnamento (una assoluta novità per il liceo scientifico) di Diritto ed economia.

Il primo settembre 2010 è entrata in vigore la riforma Gelmini, che, almeno per il liceo scientifico, sostanzialmente raccoglie le esperienze del PNI e del progetto Brocca. Sono previste due opzioni, quella cosiddetta "tradizionale" e quella delle "scienze-applicate". Nelle tabelle 1.5 e 1.6 sono riportati i rispettivi quadri orari

La riforma Gelmini prevede anche un liceo ad indirizzo sportivo, con un aumento delle ore di scienze motorie e sportive e l'introduzione dell'insegnamento di Diritto ed economia dello sport, mentre sono assenti la lingua latina e la storia dell'arte. Sono inoltre previsti un'autonomia scolastica che consente ad ogni istituto di redistribuire fino al 20% delle ore complessive tra i vari insegnamenti, o di attivarne di

[12]Rispettivamente 5 ore settimanali per matematica e 3 per fisica in tutti i cinque anni di liceo.

	I	II	III	IV	V
Lingua e letteratura italiana	4	4	4	4	4
Lingua e cultura straniera	3	3	3	3	3
Storia e geografia	3	3	—	—	—
Storia	—	—	2	2	2
Filosofia	—	—	2	2	2
Matematica	5	4	4	4	4
Informatica	2	2	2	2	2
Fisica	2	2	3	3	3
Scienze naturali	3	4	5	5	5
Disegno e storia dell'arte	2	2	2	2	2
Scienze motorie e sportive	2	2	2	2	2
Religione cattolica (att.altern.)	1	1	1	1	1
Totale	27	27	30	30	30

Tabella 1.6.: *Il quadro orario del liceo scientifico con opzione scienze applicate, dopo la riforma Gelmini*

nuovi, e l'insegnamento in lingua straniera di una disciplina non linguistica, recependo le esperienze fatte con i progetti CLIL (Content and Language Integrated Learning).

Il 2015 è stato il primo anno dell'esame di stato per gli indirizzi previsti dalla riforma Gelmini.

1.3. L'esame di stato

L'esame di stato come lo conosciamo oggi è nato con la riforma Gentile. In realtà già Benedetto Croce, ministro dell'istruzione nel quinto e ultimo governo Giolitti, ne aveva proposto l'istituzione nel 1920, nell'ambito del suo progetto di riforma della scuola elaborato anche con Gentile. Il progetto di Croce[(13)] fu però bocciato in parlamento, soprattutto ad opera di socialisti e radicali, contrari proprio all'esame di stato, oltre che all'inserimento della religione cattolica nella scuola elementare.

Le radici dell'esame di stato, in particolare per il liceo scientifico, risalgono all'esame di licenza della sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico, esame che consentiva l'accesso alla Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali.

L'intero impianto didattico della riforma Gentile, come abbiamo già sottolineato, era legato alle verifiche finali degli esami. L'esame finale dei due cicli liceali[(14)] era denominato[(15)] "esame di maturità", e consisteva in una vera e propria valutazione sulla complessiva maturità critica dell'allievo. La commissione d'esame era tutta di docenti esterni, nominati dal ministro fra professori e presidi di scuole

[13]Interessante la rilettura dell'intervento che Benedetto Croce fece in parlamento il 6 luglio del 1920, proprio a proposito dell'esame di stato: "Tornando all'esame di stato e alle sue presumibili conseguenze, la ragione per la quale noi lo proponiamo, è unicamente quella del rinvigorimento della scuola di Stato, di cui finora è stata curata piuttosto la quantità che la qualità, e noi vogliamo ora pensare alla sua qualità e non alla sua quantità."

[14]Per gli altri gradi dell'istruzione secondaria superiore l'esame finale era un esame di abilitazione all'esercizio della professione o all'insegnamento (per l'istituto magistrale).

[15]Questa denominazione è ancor oggi usata, nonostante la legge del 1997 abbia adottato la denominazione ufficiale di "esami di Stato conclusivi dei corsi di istruzione secondaria superiore".

secondarie di secondo grado e professori universitari[16]. Le sedi d'esame erano predefinite in tutta Italia e, per la maturità scientifica, erano solo 20. Erano previste quattro prove scritte e un orale su tutte le materie e sui programmi nazionali degli ultimi tre anni. L'esame si svolgeva in due sessioni: la sessione ordinaria a luglio e la sessione di riparazione a settembre. La valutazione prevedeva un voto per ciascuna disciplina e non una valutazione unica come avviene oggi. Lo stesso Gentile dichiarò esplicitamente che l'esame era volto alla selezione severa e rigorosa dei migliori, in modo da far crescere una élite dirigente per lo Stato. La severità della prova si rivelò pienamente nella prima sessione, quando il 75% degli allievi risultarono non promossi.

Come già detto, dopo Gentile, che si dimise dal governo l'1 luglio 1924, furono apportati numerosi ritocchi[17] alla riforma. Lo stesso Alessandro Casati, pronipote dell'autore della legge del 1859 e successore di Gentile al ministero dell'istruzione per un breve periodo, attenuò la rigidità dell'esame e aumentò il numero dei licei scientifici. Su questa strada procedette anche il successivo ministro Pietro Fedele, con riduzioni dei programmi e aumento delle sedi d'esame. Il ministero della Pubblica Istruzione divenne, a partire dal 1929, "Ministero dell'Educazione Nazionale", e nel 1936 il ministro Cesare Maria De Vecchi ridusse i programmi a quelli dell'ultimo anno. In pieno conflitto mondiale, il ministro Giuseppe Bottai ribaltò l'impostazione gentiliana, stabilendo che le commissioni d'esame fossero composte dai professori dei candidati, con il solo presidente (un docente universitario) e vicepresidente (un preside) esterni e di nomina ministeriale. Nel 1943, per ovvi motivi, l'esame è addirittura sostituito dallo scrutinio finale.

Nel 1948 l'esame di stato entra nella Costituzione della Repubblica Italiana che all'articolo 33 recita: "È prescritto un esame di Stato per l'ammissione ai vari ordini e gradi di scuole o per la conclusione di essi e per l'abilitazione all'esercizio professionale." Nel frattempo nel 1947 Guido Gonella riprende la forma anteguerra dell'esame, con due modifiche: l'introduzione di due commissari interni ad integrazione della commissione d'esame e la limitazione del programma ai due anni precedenti l'ultimo, per i quali erano richiesti solo "cenni". Nel 1952 il ripristino della maturità Gentile fu sancito per legge e si passò da due a soltanto un[18] commissario interno.

Nel 1969 la maturità di Gentile va definitivamente in soffitta. Il ministro Fiorentino Sullo promulga il 15 febbraio un decreto legge, successivamente convertito in legge il 5 aprile, che riordina l'esame di stato (oltre che gli esami di abilitazione e licenza della scuola media). Il nuovo esame prevede due soli scritti, l'orale su due materie di cui una scelta dal candidato e l'altra dalla commissione, il voto unico espresso in sessantesimi, la limitazione del programma d'esame solo all'ultimo anno e la commissione totalmente esterna con l'eccezione di un commissario interno per ogni classe. Le materie oggetto delle prove scritte sono scelte dal ministero e le due materie orali sono scelte all'interno di una rosa di

[16] Era prevista anche la presenza di un insegnante di scuola privata o persona estranea all'insegnamento.

[17] Molti storici hanno utilizzato proprio l'espressione "politica dei ritocchi" per riferirsi alle modificazioni, non sempre marginali, che furono apportate durante il ventennio fascista alla riforma di Gentile.

[18] Una breve nota autobiografica. Uno dei due autori (Luciano Battaia) di questa raccolta ha sostenuto l'ultimo esame di maturità con le regole stabilite in questa legge del 1952: commissione esterna che esaminava due classi del liceo con un solo commissario interno preso da una delle due classi, quattro prove scritte (tema di italiano, versione dal latino, versione in inglese, tema di matematica), prova di disegno e storia dell'arte della durata di 8 ore suddivisa in una parte teorica e una parte pratica, esame orale su tutte le materie dell'ultimo anno con "richiami" sul programma di terza e quarta, esame orale che si svolgeva in due distinte giornate, infine prova teorico pratica di educazione fisica. I richiami ai programmi di terza e quarta non erano solo formali: Luciano Battaia ricorda ancora oggi la prima domanda dell'interrogazione (si trattava di una vera e propria interrogazione, ben diversa dai "colloqui" odierni) di italiano, da parte del commissario, docente universitario, e concernente la Vita Nova di Dante. Ancora una piccola curiosità autobiografica: sempre Luciano Battaia ha anche sostenuto l'esame di terza classe elementare e l'esame di ammissione alla scuola media nella loro ultima sessione prima dell'abolizione.

quattro scelte dal ministero[19]. Questo esame ha, nelle intenzioni del legislatore, valore sperimentale, sperimentazione che però dura ben 30 anni. Questa riforma prevede anche l'esame in unica sessione, con l'abolizione della sessione di riparazione. In realtà, a parte il 1969, alla "sessione ordinaria" fu aggiunta una "sessione supplementare", o suppletiva, per chi era impossibilitato a fare l'esame nella sessione ordinaria (principalmente per motivi di salute). Più avanti fu addirittura introdotta una "sessione straordinaria", per chi non aveva potuto sostenere nemmeno la sessione suppletiva.

Un cambiamento non secondario negli esami di stato si ha nel 1994, con il ministro Francesco D'Onofrio: per motivi economici i commissari esterni non possono più essere nominati in una qualsiasi provincia italiana, ma solo all'interno della stessa provincia o, al massimo, della stessa regione. Anche se questo non modifica nella forma la struttura dell'esame di stato, si ha una modifica di sostanza: in particolare nelle piccole provincie i commissari esterni non sono più degli sconosciuti, ma sono colleghi ben conosciuti dagli insegnanti e spesso anche dagli studenti della classe.

Il 1997 è l'anno della riforma di Giovanni Berlinguer, con cui l'esame di maturità cambia nome, diventando Esame di Stato. La formula è sostanzialmente ancora in vigore e prevede una prova scritta di italiano per tutte le scuole, con quattro diverse tipologie, una seconda prova scritta scelta tra le materie caratterizzanti l'indirizzo di studio, una terza prova scritta che verte su quattro o cinque discipline dell'ultimo anno di corso e che può consistere in diverse tipologie. La prime due prove sono proposte dal ministero, la terza dalla commissione d'esame. Segue un colloquio orale su tutte le materie dell'ultimo anno, con una discussione preliminare su un argomento a scelta del candidato (la cosiddetta "tesina"). La commissione d'esame è formata da 6 o 8 membri, per metà interni e per metà esterni, con un presidente esterno ogni due commissioni. Tutti gli studenti sottoposti allo scrutinio finale sono ammessi all'esame, indipendentemente dalle loro valutazioni. Il voto finale è espresso in centesimi, di cui 20 riservati al credito scolastico acquisito nell'ultimo triennio, 45 alle prove scritte, 35 alla prova orale. È prevista anche la possibilità da parte della commissione di assegnare un "bonus" di 5 punti, con il chiaro intento di consentire a un maggior numero di studenti di arrivare alla valutazione massima di 100. Nel 2008 viene introdotta anche la possibilità di assegnare la lode.

Nel 2001 il ministro Letizia Moratti modifica la struttura delle commissioni che saranno costituite da soli membri interni con un presidente esterno a fare da garante, unico per tutto l'istituto scolastico. Nel 2007 il ministro Giuseppe Fioroni ripristina l'ammissione agli esami di stato, le commissioni come previste dalla riforma Berlinguer e aumenta il credito scolastico da 20 a 25, riducendo contemporaneamente il peso del colloquio a 30 punti. Dal 2010 con il ministro Mariastella Gelmini per essere ammessi all'esame occorre riportare la sufficienza in tutte le discipline dell'ultimo anno e non basta più il semplice giudizio di ammissione.

Un'ultima innovazione, dettata dal progredire delle nuove tecnologie: dal 2012 (ministro Francesco Profumo) le tracce d'esame non sono più inviate in busta chiusa ai singoli istituti, con consegna da parte della polizia, ma trasmesse telematicamente. Non si potrà più ripetere l'inconveniente del 1976, quando, con una telefonata effettuata la vigilia della prova d'italiano, uno sconosciuto spacciandosi per il provveditore agli studi riuscì a convincere la preside di un istituto pavese a prendere la busta contenente i titoli dei temi d'italiano ed aprirla rompendo i sigilli di ceralacca con cui si usava garantirne l'integrità, e a farsi leggere il contenuto adducendo a pretesto un possibile errore di trascrizione da correggere.

[19] Nei primi anni di applicazione di questa riforma le materie orali erano effettivamente scelte una dal candidato e una dalla commissione in piena autonomia. Con il passare del tempo però la libertà di scelta della seconda materia da parte della commissione fu sempre più ristretta, tanto che negli ultimi anni in pratica la scelta era fatta dal commissario interno che, necessariamente, doveva tenere conto delle preferenze del candidato.

Al termine della telefonata, la preside, colta da dubbi, denunciò l'accaduto. La prova d'italiano venne rimandata su tutto il territorio nazionale, l'esame cominciò con un giorno di ritardo con quella che era la seconda prova, nel mentre vennero preparati nuovi temi per la prova d'italiano.

1.4. I contenuti del tema di matematica

Le prove di matematica (come del resto quelle delle altre materie fondamentali) sono state sempre ministeriali, ossia proposte dal Ministero della Pubblica Istruzione e quindi uguali per tutto il territorio nazionale, con l'eccezione degli anni 1943-1944-1945, come conseguenza degli eventi bellici di quell'epoca.

Le caratteristiche dei temi ministeriali sono andate variando nel tempo, in adesione agli indirizzi pedagogici e didattici prevalenti al momento, e la variazione più cospicua e innovatrice si è avuta col trapasso dal primo periodo (quello che va dal 1924 al 1968) al secondo (dal 1969 ad oggi).

Fino al 1923, nell'esame di licenza fisico-matematica si assegnavano due temi, nell'ultimo periodo entrambi di applicazione dell'algebra alla geometria, precedentemente uno di teoria dei numeri e uno di geometria.

Dal 1924 al 1933 si assegnò un unico tema di algebra applicata alla geometria (con l'eccezione della sessione di riparazione del 1929, nella quale l'unico tema assegnato consistette nella risoluzione di un sistema di quarto grado). Dal 1934 si ritornò ai due temi, ma con l'innovazione che uno dei due riguardava un argomento di geometria analitica. In alcune sessioni del periodo della seconda guerra mondiale, quando gli esami scritti si svolsero, ci fu un tema unico. Nel periodo bellico ci furono anche delle sessioni straordinarie, a volte con prove scritte. Con la ripresa postbellica (cioè dal 1946) si ritornò ai due temi dei due tipi, fino al 1951. Nel 1952, nella sessione estiva nessuno dei due temi verteva sulla geometria analitica (uno consisteva nella ricerca di un massimo) e nella sessione autunnale il tema fu unico (algebra applicata alla geometria). Dal 1953 al 1968 il tema fu unico.

Nel primo periodo il problema proposto era quasi sempre unico, cioè non lasciava facoltà di scelta al candidato, e consisteva per lo più in un problema geometrico da risolvere con l'ausilio dell'algebra o della trigonometria. Vi compariva in genere un parametro (a volte più di uno), il che implicava una discussione sulle condizioni di possibilità e sul numero delle soluzioni. A volte, una domanda complementare facoltativa richiedeva la risoluzione per via sintetica del problema, oppure generalizzazioni delle questioni trattate. Assai rari sono stati quesiti di sola algebra (risoluzione di equazioni o sistemi, ecc.). La geometria analitica compariva raramente e quasi timidamente nelle proposte ministeriali dei primi anni, ma andava successivamente acquistando frequenza, soprattutto con quesiti sulle coniche o su altre curve che non fossero la retta e il cerchio. Insieme ad essa cominciò a comparire l'analisi, per lo più nel calcolo di aree o di volumi di solidi di rotazione. Interessante osservare che, nel problema 2 della sessione estiva del 1937, la derivata di $2/x$ è data dal testo: i programmi allora vigenti non prevedevano la conoscenza di questo tipo di derivate.

Nei problemi del primo periodo un ruolo di particolare importanza aveva la discussione, anche per il peso che le commissioni giudicatrici davano a questa nella formulazione del giudizio. Ciò finì per indurre molti degli insegnanti impegnati nella preparazione dei candidati a dedicare tempo e attenzione minuziosa alla discussione e non pochi fecero ricorso a metodi che si prestassero ad essere facilmente applicati, anche quando non erano del tutto assimilati. Tra questi metodi primeggiò quello, famoso, di

Tartinville-Girod, contro il quale si scagliò, con alcuni articoli fortemente critici, il matematico Bruno De Finetti [vedi 9, 10].

Forse anche per questa battaglia del De Finetti, ma soprattutto per la riforma degli esami di maturità del 1969, la tipologia dei problemi assegnati a questi esami cambiò notevolmente. Innanzi tutto, nel secondo periodo il Ministero della Pubblica Istruzione cominciò a proporre più di un problema, chiedendo al candidato la risoluzione di uno solo di essi, a scelta; oppure formulò diversi quesiti chiedendo di trattare "quelli che il candidato riteneva più adeguati alla sua preparazione", a volte "almeno due dei quesiti assegnati", altre volte "due quesiti scelti a piacimento". Quanto ai contenuti, pur restando presente il problema geometrico classico (anche se alquanto ridimensionato), comiciò ad avere più peso l'analisi e, per la gioia di quelli che amano i procedimenti meccanici, il posto centrale fu preso dallo studio di funzione cosicché la trinomite, cacciata dalla porta, rientrò dalla finestra. Con buona pace di De Finetti, la "matematica per deficienti" continuò ad imperversare. Anche il calcolo integrale, comparso per la prima volta, seppure nella parte facoltativa, nel tema della sessione autunnale del 1935, è stato via via sempre più presente, soprattutto per il calcolo di aree e volumi di solidi di rotazione.

Nel 1985 furono istituiti, nei Licei Scientifici come in altre scuole secondarie superiori, dei corsi sperimentali coi quali venivano introdotte delle variazioni sia nei programmi che negli orari d'insegnamento, in vista della riforma delle secondarie. In questi corsi, le materie scientifiche, e la matematica in particolare, acquistarono maggior peso. Nel 1991-92, si svolsero per la prima volta gli esami di maturità delle classi sperimentali, con temi ministeriali diversi da quelli assegnati agli allievi che avevano seguito i corsi tradizionali. Oltre a qualche difficoltà in più, vi fecero apparizione argomenti nuovi, come ad esempio le trasformazioni lineari, il calcolo delle probabilità e la statistica.

A partire dal 2001 il tema assume la forma ancora oggi in vigore: due problemi e dieci quesiti. Il candidato nelle sei ore concesse deve svolgere un problema e cinque quesiti a scelta.

Con la introduzione dei quesiti fanno la comparsa nei temi d'esame anche domande che possiamo definire di "cultura generale", come per esempio riferimenti alla sezione aurea, ai solidi platonici, al problema della quadratura del cerchio, alle costruzioni con riga e compasso. Generalmente, sempre nei quesiti, le domande anche su argomenti classici cominciano a diventare via via più complesse e sono spesso presenti questioni che non vengono sempre trattate nei programmi scolastici, o che sono spesso trattate solo in maniera molto superficiale (per esempio le cardinalità dei razionali e dei reali, questioni non elementari riguardanti le successioni numeriche o le serie, problemi con la funzione integrale, ecc.). Si veda a questo proposito il capitolo D contenente osservazioni e commenti sulle tracce d'esame.

A partire dal 2015, uno dei due problemi assegnati è più orientato alle applicazioni della matematica in vari campi. Inoltre nei quesiti hanno fatto la loro comparsa le equazioni differenziali e la geometria analitica dello spazio.

2. Esame di licenza Istituto Tecnico, sez. Fisico-Matematica

Questo capitolo raccoglie alcune delle prove assegnate negli esami di licenza di Istituto Tecnico della sezione Fisico-Matematica, poi trasformati in esami di Maturità Scientifica dalla riforma Gentile.

Il reperimento di temi precedenti la riforma Gentile è abbastanza difficoltoso e non sempre è possibile avere informazioni dettagliate sull'anno in cui sono stati assegnati e sulla sessione (estiva o autunnale).

Anche la formulazione esatta dei testi dei temi differisce, seppure solo nella forma, da una fonte all'altra: di norma abbiamo scelto di proporre la stesura presente nei testi più antichi, o con più sicura documentazione.

Si deve anche segnalare che i temi d'esame successivi alla riforma Gentile sono sostanzialmente di dominio pubblico e, soprattutto per quelli più recenti, sono disponibili anche le copie degli originali ministeriali. Per quelli precedenti invece abbiamo consultato diverse riviste o volumi presso le varie sezioni delle Biblioteche Nazionali o di Istituti Universitari: per questi abbiamo segnalato sempre la fonte da cui i testi sono stati tratti.

In questa versione abbiamo raccolto i temi fino all'anno scolastico 1922-1923 di cui, magari incrociando le varie fonti, siamo riusciti a ricostruire con esattezza almeno l'anno in cui sono stati assegnati.

2.1. Anno scolastico 1870-1871

2.1.1. Sessione estiva

Problema a ([17])

Dimostrare la relazione trigonometrica

$$\sin a + \sin b - \sin(a+b) = 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{a+b}{2}.$$

Problema b ([17])

Risolvere le due equazioni a due incognite

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{64}{15} \quad , \quad x^2+y^2 = 136.$$

2.2. Anno scolastico 1871-1872

2.2.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17])

È dato un recipiente avente la forma di un cono retto, il quale contiene dell'acqua che s'innalza fino ad un'altezza pure data. $D = 8\,\mathrm{m}$ ed $H = 3\,\mathrm{m}$ sono rispettivamente il diametro della base e l'altezza del cono, $h = 1\,\mathrm{m}$ è l'altezza dell'acqua.

Si domanda il raggio x d'una sfera di metallo che immersa nel liquido ne faccia sollevare il piano di livello fino a che divenga tangente alla sfera medesima.

Problema 2 ([17])

Da due punti A e B del terreno, nei quali si può far stazione con un grafometro, si vedono due punti inaccessibili X e Y. Determinare la distanza $|\overline{XY}|$ conoscendo gli angoli $X\widehat{A}Y = 0^\circ\,25'\,3''$, $X\widehat{B}A = 121^\circ\,0'\,11''$, $X\widehat{B}Y = 0^\circ\,0'\,24''$ e la distanza $|\overline{AB}| = 152\,\mathrm{m}$.

2.3. Anno scolastico 1872-1873

2.3.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])

Date le due equazioni

$$x^5 + y^5 = 17050 \quad , \quad x + y = 10\,,$$

trovare i valori di x e y.

2.3.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])

Trovare quattro numeri in progressione geometrica data la loro somma $= 45$ e quella dei loro quadrati $= 765$.

Problema 2 ([17])

Dato il perimetro di un triangolo $2p = 8644.204\,\mathrm{m}$ e gli angoli $\widehat{A} = 73^\circ\,42'\,50''.04$; $\widehat{B} = 57^\circ\,32'\,7''.54$; $\widehat{C} = 48^\circ\,45'\,2''.42$ calcolare il raggio del circolo inscritto, il raggio del circolo circoscritto e l'area del triangolo.

2.4. Anno scolastico 1873-1874

2.4.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])

Trovare quattro numeri in proporzione geometrica, data la somma dei medi, la somma degli estremi, e la somma delle quarte potenze dei quattro termini.

Applicare la formola generale al caso speciale in cui la somma dei medi sia 10, quella degli estremi 11, e la somma delle quarte potenze 5729.

Problema 2 ([17])

Trovare e discutere il luogo geometrico di un punto tale che la somma o la differenza delle tangenti condotte da esso a due circoli dati di grandezza e posizione, sia eguale ad una retta data.

2.4.2. Sessione autunnale

Problema 2 ([17])

Data la base di un triangolo $a = 3246.927\,\text{m}$, l'altezza $h = 2145.797$, e la somma degli altri due lati $b + c = 5397.278$, risolvere il triangolo.

2.5. Anno scolastico 1874-1875

2.5.1. Sessione estiva

Problema 2 ([17])

Date tre tangenti e la direzione dei diametri di una parabola, trovare

1. i punti di contatto delle tre tangenti date;
2. altre tangenti alla curva;
3. i punti di contatto di queste tangenti.

Problema 4 ([17])

Fra due rette date allogare un segmento che sia veduto da due punti fissi sotto angoli dati.

2.5.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])

Trovare, con tre decimali esatti, una soluzione comune alle due equazioni

$$2x^2 + 4xy + 13x + 6y + 1 = 0,$$
$$x^2 + 6xy + 19x + 4y + 2 = 0.$$

Problema 2 ([17])

Descrivere una parabola tangente a tre rette date e passante per un punto dato.

2.6. Anno scolastico 1876-1877

2.6.1. Sessione estiva

Problema 1a ([17])

La longitudine di Roma all'ovest di Berlino è 0.003, e quella di Vienna all'est della stessa città è 0.008: supposte le longitudini espresse in pareti decimali del giorno ($= 360°$). Le latitudini di Roma e Vienna, espresse in gradi e parti decimali di grado, sono rispettivamente 41.902 e 48.210. Calcolare la minima distanza tra Roma e Vienna, nell'ipotesi che la superficie terrestre sia sferica.

Problema 2b ([17])

Dimostrare che i punti di concorso delle mediane delle facce d'un tetraedro sono i vertici d'un altro tetraedro, simile al dato. Trovare il rapporto dei loro volumi.

2.7. Anno scolastico 1877-1878

2.7.1. Sessione estiva

Problema 2b ([17])

In quanti triangoli differenti può essere diviso un poligono di n lati per mezzo di diagonali, un lato almeno del poligono essendo sempre uno dei lati dei triangoli?

2.7.2. Sessione autunnale

Problema 1b ([17])

Dividere un numero $2a$ in due parti tali, che la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l'altra sia un minimo.

2.8. Anno scolastico 1878-1879

2.8.1. Sessione estiva

Problema 1a ([17])

Trovare una progressione per quoziente, data la somma de' suoi termini, la somma dei loro quadrati, e la somma dei loro cubi.

Problema 2a ([17])

Trovare due numeri di cui è data la somma $2s$, e la somma o la differenza delle loro quarte potenze $2q$.

2.8.2. Sessione autunnale

Problema 2b ([17])

Trovare il numero totale di combinazioni che si possono fare con n oggetti, prendendoli successivamente ad $1, 2, \dots, n$.

2.9. Anno scolastico 1879-1880

2.9.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17])

Conoscendo due lati a e b di un triangolo e la bisettrice l dell'angolo $\widehat{C}$ da essi compreso, trovare le formole che determinano, per mezzo dei dati a, b, l, gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del triangolo, ed il terzo lato c. Calcolare con queste formole gli elementi ignoti del triangolo supponendo $a = 3.15\,\mathrm{m}$; $b = 2.25\,\mathrm{m}$; $l = 1.62\,\mathrm{m}$.

Problema 2 ([17])

Trovare i quattro termini di una proporzione aritmetica, conoscendo il prodotto degli estremi, il prodotto dei medi e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri. Applicare le formole generali al caso particolare in cui il prodotto degli estremi è 104, il prodotto dei medi è 110, e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri è 57298.

2.9.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])

S'inscriva in un triangolo equilatero un circolo, in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo di nuovo un circolo, e così via di seguit indefinitamente.

Qual è[1] la somma dei raggi di tutti questi circoli, quale la somma delle loro periferie, quale la somma delle loro superficie, quale la somma dei perimetri e quale la somma delle aree di tutti i triangoli, escluso il triangolo proposto.

In secondo luogo trattare la stessa questione sostituendo sempre al triangolo equilatero un quadrato.

Problema 2 ([17])

Una piramide regolare ha per base il poligono regolare di m lati inscritto nel cerchio di raggio r, e per apotema questo stesso raggio. Condotto pel centro della sfera inscritta nella piramide il piano parallelo alla base, trovare le formole che esprimono la superficie totale ed il volume del tronco di piramide e calcolarne i valori supponendo $m = 10$ ed $r = 1$.

2.10. Anno scolastico 1881-1882

2.10.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])

Trovare il valore delle formole:

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A \cdot \cot B \cdot \cot C} \quad , \quad \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

quando $A + B + C = 90°$, e il valore delle formole

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \quad , \quad \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

quando $A + B + C = 180°$.

Problema 2 ([17])

Dati i raggi a, b di due cerchi che si toccano esternamente, trovare il valore del seno dell'angolo compreso tra le loro tangenti comuni.

2.10.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])

Determinare i lati d'un triangolo rettangolo, conoscendone l'area ed il raggio del cerchio inscritto.

Problema 2 ([17])

Dividere un tronco di cono retto (circolare a basi parallele) in tre parti d'ugual volume, mediante due piani paralleli alle basi. (Dati i raggi a, b delle basi, si devono trovare i raggi delle due sezioni).

[1] È interessante notare che "qual è" è scritto, sui testi che abbiamo consultato (sia qui che in altri temi), utilizzando l'apostrofo: "qual'è". Non sappiamo quale fosse la grafia dei testi ufficiali. In ogni caso l'enciclopedia Treccani segnala esplicitamente che nel passato anche recente la forma con l'apostrofo era comune, citando anche una frase presa dalle *Avventure di Pinocchio* di Collodi.

2.11. Anno scolastico 1882-1883

2.11.1. Sessione estiva

Problema 1a ([17])

Dividere il numero 13 in tre parti i cui quadrati diano la somma 75 e in modo che i tre quadrati siano in progressione aritmetica.

Problema 1b ([17])

Trovare la distanza del sole dalla terra, preso il raggio terrestre come unità, e supposto essere $8''.57$ l'magolo che questo raggio sottende al centro del sole.

Problema 2a ([17])

Senza far uso di tavole, calcolare la tangente dell'arco di $37^\circ\ 30'$.

Problema 2b ([17])

Un fiume separa un osservatore da una torre alta metri 64.8. Con un sestante l'osservatore che è a 1.50 m sul livello del piede della torre, determina in $47^\circ\ 56'$ l'angolo sotteso dall'altezza della torre. Qual è la distanza dell'osservatore dalla torre?

2.12. Anno scolastico 1884-1885

2.12.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])

Trovare i rapporti dei lati di un triangolo nel quale gli angoli stanno come $3:4:5$.

Problema 2 ([17])

Un grave è lanciato verticalmente: è dato il tempo trascorso dall'istante in cui esso passa per una data posizione all'istante in cui esso ritorna, scendendo, in quella stessa posizione. Trovare la velocità iniziale.

2.13. Anno scolastico 1886-1887

2.13.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17])

Trovare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo sapendo che il perimetro misurato col metro è 1.20 e che la distanza del vertice dell'angolo retto dall'ipotenusa è 0.24.

Problema 2 ([17, 8])

Un punto M è dato per mezzo delle sue distanze p, q da due rette OP, OQ fra loro perpendicolari. Condurre per M una retta PMQ in modo che la somma dei quadrati dei segmenti $\overline{PM}$, $\overline{QM}$ sia uguale ad un quadrato dato. Discutere qualche caso particolare, per esempio quello in cui $p=q$.

2.13.2. Sessione autunnale

Problema 1a ([17])
Per mezzo di a e b, misure delle basi d'un trapezio, si esprima il valore di quella retta la quale, essendo parallela alle basi, divide il trapezio in due parti equivalenti.

Problema 1b ([17])
Si risolva geometricamente il problema: dividere un trapezio in due parti equivalenti con una retta parallela alle sue basi.

Problema 2a e b ([17])
Si trovino i coseni degli angoli d'un trapezio isoscele, dato che le basi del trapezio siano misurate da a e b e le diagonali da d. Si trovino gli angoli del trapezio supponendo $a = 8$; $b = 3$; $d = 7.5$.

2.14. Anno scolastico 1887-1888

2.14.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17])
Trovare i lati d'un parallelogrammo che ha un angolo semiretto, quando si conoscono l'area e il perimetro. Quand'è che il problema è possibile?

Problema 2 ([17])
Data la differenza di due numeri e data la differenza dei loro cubi, trovare i due numeri. Discutere la soluzione.

2.14.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])
I lati di un triangolo circoscritto ad un circolo di raggio dato sono in progressione aritmetica, la cui differenza è uguale alla quarta parte del raggio. Trovare i lati.

2.15. Anno scolastico 1888-1889

2.15.1. Sessione estiva

Problema 2 ([17, 8])
È data la somma di tre numeri x, y, z, in progressione aritmetica ed è dato il loro prodotto b; trovare questi tre numeri e discutere i risultati.

2.16. Anno scolastico 1889-1890

2.16.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])
Un cilindro e un tronco di cono hanno a comune una base e l'altezza, e il rapporto dei loro volumi è il numero a. Trovare il rapporto dei raggi delle due basi del tronco di cono e discutere il risultato.

Problema 2 ([17])

Un cono cavo contiene n sfere collocate una sopra l'altra, in modo che ciascuna sfera tocca la sfera che le sta sotto, quella che le sta sopra e la superficie interna del cono. Conoscendo il raggio della sfera suprema e la distanza del suo centro dal vertice del cono, trovare il raggio e la distanza analoga per un'altra qualunque delle sfere; e dimostrare che i raggi delle sfere formano una progressione geometrica; che le distanze dei centri dal vertice del cono formano un'altra progressione geometrica e che le due progressioni hanno la stessa ragione.

2.16.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17])

In un cono si conosce la differenza fra la superficie laterale e quella della base, e si conosce la somma di queste due superficie. Trovare l'apotema e l'altezza del cono, e il raggio della base, e discutere i risultati.

2.17. Anno scolastico 1890-1891

2.17.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17])

Si ha un cilindro circolare retto chiuso dalle due parti da due mezze sfere e si sa che in questo solido la superficie esterna è s, e che la sezione ottenuta tagliandolo con un piano condotto per l'asse ha per perimetro $2p$. Trovare il raggio r e l'altezza h della parte cilindrica del solido, e discutere i risultati.

Problema 2 ([17])

Dal vertice A di un triangolo ABC, i cui lati sono dati, condurre al lato opposto $\overline{\mathsf{BC}}$ una retta AD, in modo che il quadrato di $\overline{\mathsf{AD}}$ sia equivalente al rettangolo dei segmenti $\overline{\mathsf{BD}}$, $\overline{\mathsf{DC}}$ del lato $\overline{\mathsf{BC}}$. Calcolare uno dei segmenti, e discutere i dati e il risultato.

2.18. Anno scolastico 1895-1896

2.18.1. Sessione estiva

Problema 1 ([17, 8])

In un angolo sono inscritti due circoli i quali si toccano esternamente nel punto T e toccano lo stesso lato dell'angolo nei punti A ed A′. Chiamando α la metà dell'angolo dato, R ed R_1 i raggi dei due cerchi, e supponendo $R > R_1$, si domanda

1. Esprimere R_1 mediante R ed α;
2. esprimere anche, mediante R ed α, i lati del triangolo $\mathsf{TAA_1}$ e verificare che l'angolo $\mathsf{A\hat{T}A_1}$ è retto. Applicazione al caso di $\alpha = 30°$.

Problema 2 ([17, 8])

Un triangolo rettangolo rotando intorno all'ipotenusa, descrive un solido che si può considerare come l'insieme di due coni di rotazione aventi la base comune. Supponendo noti il volume totale del solido e l'area del triangolo rettangolo, determinare i lati di questo triangolo.

2.18.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([17, 8])
Si determinino la base x, l'altezza y e gli angoli di un triangolo isoscele nel quale i lati uguali hanno una lunghezza data a, e l'area è uguale a quella di un trapezio nel quale i lati paralleli sono $x/2$ e y, e l'altezza è h: e s'indichino i casi nei quali il problema è possibile e quello nel quale il triangolo è rettangolo.

Problema 2 ([17])
In un cerchio di raggio r si deve costruire un triangolo ABC che abbia un vertice al centro C del cerchio e gli altri due A e B sulla circonferenza, e la cui area sia uguale alla superficie laterale del cilindro che ha per base il cerchio dato e per altezza una lunghezza data h. Si richiede che si determinino il lato $\overline{\mathsf{AB}} = y$ e la sua distanza x dal centro (altezza del triangolo), e si consideri poi il caso nel quale si voglia anche che il lato $\overline{\mathsf{AB}}$ del triangolo passi per un punto P esterno al cerchio di cui sia data la distanza d da uno dei due punti nei quali il diametro che passa per P taglia la circonferenza; e si discutano i risultati.

2.19. Anno scolastico 1897/1898

Tema 1 ([8, 7])
Facendo rotare un triangolo rettangolo d'un giro intero intorno a ciascuno dei due cateti successivamente, si hanno due coni. Si indichino con S' e con S'' le aree laterali dei due coni, con S l'area della sfera avente per diametro l'ipotenusa. Trovare le espressioni di S, S', S'' in funzione dei lati del triangolo.
Determinare poi questi lati nell'ipotesi che sia

$$cS = aS' + bS''$$

(dove a, b, c sono numeri positivi noti) e sia pur data l'area del triangolo.

2.20. Anno scolastico 1902-1903

2.20.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12, 8, 20])
Essendo dato il rapporto fra il volume di un tronco di cono circoscritto ad una sfera ed il volume della sfera, calcolare i raggi delle basi del tronco ed il rapporto tra le superfici totali dei due solidi.

Problema 2 ([12, 8, 20])
Si hanno in un piano un cerchio ed un'ellisse concentrici: la somma degli assi di questa è doppia del diametro di quello, e gli assi medesimi stanno fra loro come 5 sta a 3. Se il rettangolo che ha per vertici i punti d'intersezione delle due coniche ruota attorno all'asse minore dell'ellisse, quale sarà il volume del solido risultante?

2.20.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12, 8])
Due coni inscritti in una sfera di raggio r hanno la base comune ed i vertici sono i poli di questa. Calcolare a quale distanza deve trovarsi la base dal centro perché la differenza fra i volumi sia massima.

Problema 2 ([12])

Dimostrare che «se in un cerchio due corde si tagliano ortogonalmente la somma dei quadrati dei quattro segmenti è costante». Applicare quindi tale teorema alla determinazione dei quattro segmenti di due corde ortogonali in un circolo dato, quando sono note le lunghezze delle medesime.

2.20.3. Sessione suppletiva

Problema 1 ([12, 8, 20])

Determinare il luogo geometrico dei punti per i quali le due tangenti ad una circonferenza data c e la corda dei punti di tangenza formano un triangolo equilatero. Calcolare il lato e l'area di questo triangolo.

Problema 2 ([12, 20])

Col solo sussidio delle equazioni di secondo grado risolvere il sistema

$$(1) \quad x^4 + y^4 + 6xy = 5 \qquad (2) \quad x + y = 1,$$

ponendo in vista le quattro soluzioni di esso.

2.21. Anno scolastico 1903-1904

2.21.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12])

Determinare due numeri, l'uno dei quali diviso per 5 dia resto 1, l'altro diviso per 3 dia resto 2 e tali che la loro somma sia uguale alla differenza del quadrato del primo e di quello del secondo, ed il prodotto sia uguale a 10 volte la somma aumentata di una unità.

Problema 2 ([12])

Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa determinare quello che, ruotando attorno a questo lato, genera coi suoi cateti la massima superficie.

Determinare ancora quel triangolo per il quale il quoziente tra la differenza delle superfici coniche generate dai cateti e l'area del cerchio comune dei coni corrispondenti è uguale a

$$\frac{2}{3}\sqrt{10}.$$

2.21.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12])

Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno la medesima ipotenusa, determinare quello che, ruotando attorno a questo lato, genera il massimo volume.

Determinare ancora quel triangolo per il quale il quoziente tra la differenza dei volumi contenuti nei coni generati dai cateti ed il volume della sfera che ha per raggio quello della base comune a quei coni è uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Problema 2 ([12])

Con n cifre numeriche differenti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \leq 10$), permutabili in tutti i modi possibili, sian formati tutti i numeri distinti di n cifre. Indicando con S_n la somma di questi numeri, dimostrare che

$$S_n = (n-1)! \cdot \sum_1^n a_r \cdot [n],$$

dove $[n]$ rappresenta il numero formato con n cifre tutte equali ad uno. Disponendo poi le medesime cifre $n-1$ a $n-1$ e formando i corrispondenti numeri distinti, dimostrare che la somma S_{n-1} di essi è data da

$$S_{n-1} = (n-1)! \cdot \sum_1^n a_r \cdot [n-1],$$

e che $S_n - S_{n-1}$ è divisibile per 10^{n-1}.

2.22. Anno scolastico 1904-1905

2.22.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12])

Trovare i lati d'un triangolo rettangolo, sapendo che la superficie laterale del cono di rotazione avente l'ipotenusa per raggio della base e per apotema la somma dei cateti è equivalente alla superficie del cerchio di raggio a, e sapendo inoltre che il rettangolo contenuto dalle differenze fra l'ipotenusa e ciascuno dei cateti è equivalente al quadrato di lato b.

Problema 2 ([12])

Trovare quattro numeri in progressione geometrica data la differenza a degli estremi e quella b dei medi; e provare che se il rapporto tra b ed a è dato dalla

$$\frac{b}{a} = \frac{q^2-1}{1+3q^2},$$

dove q è un numero qualunque, le soluzioni diventano razionali in a, b, q.

2.22.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12])

Trovare quattro numeri in progressione geometrica, conoscendo il rapporto q di un antecedente al rispettivo conseguente, la somma a dei due antecedenti e la somma b^2 dei quattro numeri.

Problema 2 ([12, 20])

Per il vertice C opposto ad A di un rettangolo ABCD si conduca una retta che seghi nei punti P e Q i prolungamenti dei lati $\overline{AB}$ ed $\overline{AD}$, e si completi il rettangolo APQR. Dtereminare i segmenti $\overline{AP}$ ed $\overline{AQ}$ in modo che il volume del cilindro generato dalla rotazione del rettangolo APRQ intorno al lato $\overline{AP}$ sia eguale al volume di un altro cilindro avente il raggio della base eguale ad un segmento dato k e l'altezza eguale ad $\overline{AQ}$. Qual'è il più piccolo valore che si può dare a k e come si trovano in questo caso i punti P e Q?

2.23. Anno scolastico 1905-1906

2.23.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12, 20])

Un cono è circoscritto ad una sfera di raggio r lungo un circolo minore di essa. Quale deve essere l'altezza del segmento sferico, interno al cono, acciocché il volume del primo abbia un rapporto q con quello del secondo?

Costruzione geometrica dell'altezza per $q = 1/4$.

Problema 2 ([12])

Le misure x e y delle distanze di due punti, mobili su una retta, da un punto O di questa sono legate dalla

$$xy - a(x+y) + b^2 = 0,$$

dove a e b sono misure di segmenti dati.

Trovare:

1. se ed in quali punti della retta i due mobili si incontrano;
2. le posizioni di questi allorché sia conosciuta la distanza che li separa.

2.23.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12, 20])

Una sfera di raggio r viene segata da un piano.

Calcolare e costruire il raggio del circolo sezione nell'ipotesi siano equivalenti la superficie laterale del cono, che ha per vertice il centro della sfera e per base quella sezione, e la superficie della sfera che per diametro la distanza del centro della sfera data dal piano secante.

Problema 2 ([12, 20])

Il doppio dell'area d'un triangolo rettangolo è equivalente a quella di un quadrato di lato a, e la somma dei quadrati delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è equivalente ad un altro quadrato di lato b.

Calcolare le proiezioni suddette e verificare che, se a e b sono legate dalla relazione

$$5a^2 = 2\sqrt{3} \cdot b^2,$$

uno degli angoli acuti è di 30°.

2.24. Anno scolastico 1906-1907

2.24.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12, 2])

Un cono rotondo è inscritto in una sfera di raggio r.

Calcolare qualcuno degli elementi del cono, per esempio l'altezza ovvero il seno dell'angolo che un lato qualunque fa con l'asse, in modo che la superficie totale di esso cono abbia un dato rapporto q con la zona sferica cha ha la medesima altezza.

Caso particolare $q = 1$: costruzione grafica.

Problema 2 ([12])

In un circolo di raggio r è inscritto un quadrilatero convesso ABCD, in modo che il primo vertice A e l'ultimo D sono estremi di un diametro. Calcolare i lati $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$, $\overline{\mathsf{CD}}$ in modo che essi formino nell'ordine scritto una progressione aritmetica e che la loro somma abbia un rapporto q col triplo del raggio r.

2.24.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12])

In un circolo di raggio r è inscritto un quadrilatero convesso ABCD, in modo che il primo vertice A e l'ultimo D sono estremi di un diametro. Calcolare i lati $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$, $\overline{\mathsf{CD}}$ in modo che le loro proiezioni sul diametro $\overline{\mathsf{AD}}$ formino una progressione aritmetica, nell'ordine in cui si succedono, e che il rettangolo delle diagonali $\overline{\mathsf{AC}}$ e $\overline{\mathsf{BD}}$ abbia un rapporto q col quadrato di lato r.

Problema 2 ([12])

Sopra una tangente in un punto A ad una sfera di centro O e di raggio r si prendono due punti V e V′. Da questi punti si circoscrivono due coni alla sfera, i quali determinano due zone sferiche interne ad essi.

Determinare le distanze $|\overline{\mathsf{OV}}|$ ed $|\overline{\mathsf{OV'}}|$, posto che sia

$$|\overline{\mathsf{OV}}| - |\overline{\mathsf{OV'}}| = a,$$

dove a è un segmento dato; e posto che la differenza delle aree delle zone suddette sia eguale al doppio dell'area del cerchio di raggio b.

Il problema è sempre geometricamente possibile? Esaminare il caso particolare in cui $a = r$.

2.25. Anno scolastico 1907-1908

2.25.1. Sessione estiva

Problema 1 ([12, 24, 1])

Di un triangolo rettangolo è conosciuta l'altezza h relativa all'ipotenusa, ed è anche dato il rapporto m tra l'area laterale del cilindro circolare retto, che ha per raggio uno dei cateti e per lato l'altro cateto, e la somma delle aree laterali dei due coni generati dalla rotazione del triangolo intorno all'ipotenusa.

Si calcolino i cateti del triangolo, e discutendo la soluzione si mostri che il minimo valore di m è $\sqrt{2}$. Di che natura è il triangolo in questo caso?

Problema 2 ([12, 24])

Un diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ di una sfera si prolunga di una lunghezza $\overline{\mathsf{BC}}$ eguale al raggio r della sfera stessa, e per un suo punto P, interno a questa, si conduce il piano perpendicolare al diametro medesimo.

Trovare la posizione del punto P in modo che l'area del cerchio di raggio $\overline{\mathsf{PC}}$ abbia un dato rapporto m con quella del cerchio sezione del piano con la sfera.

Nella discussione si faccia vedere che sono ammissibili tutti i valori di m superiori od uguali a 3. Qual'è in questo caso la posizione di P?

2.25.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([12])

Per un punto posto sulla bisettrice di un angolo retto, a distanza a dai due lati, è condotta una retta che li taglia.

Trovare i due cateti del triangolo rettangolo così formato, in modo che il rapporto tra la somma delle superfici laterali dei due coni generati dal triangolo con le rotazioni attorno ai cateti e la superficie del cerchio il cui raggio è l'ipotenusa sia un numero dato m.

Nella discussione si faccia vedere quali valori siano possibili per m, e si trovi inoltre il seno di uno degli angoli acuti.

Problema 2 ([12, 2])

Un cono di rotazione è circoscritto ad una sfera di raggio r.

Calcolare il seno dell'angolo che un lato qualunque del cono forma con l'asse, in modo che il rapporto tra la superficie totale del cono e quella della sfera sia un dato numero positivo m. Quale sarà il minimo valore che si può dare ad m, e quale sarà in tal caso la posizione del vertice sull'asse?

2.26. Anno scolastico 1908-1909

2.26.1. Sessione estiva

Problema 1 ([8, 24, 1])

I punti ABCD sono vertici consecutivi d'un rettangolo, di cui si conosce il perimetro $2p$.

Prolungando la $\overline{\mathsf{BA}}$ in E in modo che $\overline{\mathsf{AE}}$ sia eguale ad $\overline{\mathsf{AB}}$, unendo E con C si forma un triangolo rettangolo EBC.

Facendo rotare d'un giro tutta la figura intorno ad $\overline{\mathsf{AB}}$, il rettangolo genera un cilindro e il triangolo EBC un cono.

Dato il rapporto m tra la superficie totale del cilindro e quella del cono, si calcolino i valori x e y di $\overline{\mathsf{AB}}$ e $\overline{\mathsf{BC}}$.

Problema 2 ([8, 24, 1])

In un circolo di raggio R è inscritto un triangolo ACB rettangolo in C, e l'ipotenusa $\overline{\mathsf{AB}}$ si proietta in $\overline{\mathsf{A'B'}}$ sulla tangente in C.

Trovare i valori dei cateti $|\overline{\mathsf{CA}}| = x$, $|\overline{\mathsf{CB}}| = y$, in modo che il volume del tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio $\mathsf{AA'B'B}$ intorno ad $\overline{\mathsf{A'B'}}$ abbia un dato rapporto m con il volume della sfera di diametro $\overline{\mathsf{A'B'}}$.

2.27. Anno scolastico 1909-1910

2.27.1. Sessione estiva

Problema 1 ([20])

In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e i cateti sono in progressione geometrica. Calcolare e costruire geometricamente il coseno dell'angolo che l'ipotenusa forma col cateto minore; trovare poi le lunghezze dei lati supponendo data la somma di due qualunque di essi.

Problema 2 ([20])

Due corde uscenti da un punto di una circonferenza di raggio r fanno tra loro un angolo φ ed hanno la somma eguale ad un segmento a. Trovare la lunghezza delle corde e discutere la soluzione. Casi particolari $\varphi = 30°$; $\varphi = 60°$, $\varphi = 90°$.

2.27.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([20])

Calcolare quale valore dovrà avere il rapporto dei due segmenti in cui l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è divisa dall'altezza ad essa relativa, affinché la differenza dei due coni che risultano dalla rotazione del triangolo intorno all'ipotenusa e che hanno come base comune il cerchio descritto da quell'altezza, sia equivalente alla sfera di raggio eguale a detta altezza del triangolo.

Determinare poi le misure di quei due segmenti in funzione della misura dell'altezza medesima, si indichi la costruzione grafica del triangolo e si calcolino le tangenti dei suoi angoli acuti.

2.28. Anno scolastico 1910-1911

2.28.1. Sessione estiva

Problema 1 ([24, 1])

Un tetraedro regolare è segato da un piano parallelo ad una faccia in un triangolo NMK che si assume come base di un prisma retto inscritto nel tetraedro. A quale distanza dal vertice V, opposto a quella faccia ABC, bisogna condurre il piano segante in modo che l'area laterale del prisma sia equivalente ad un quadrato di lato m?

2.28.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([24, 2])

Data una sfera, tagliarla con un piano in modo che il cerchio sezione sia equivalente alla differenza fra la superficie di una delle calotte risultanti e la superficie laterale del cono avente la stessa base e la stessa altezza di quella calotta. Mostrare poi che l'angolo α formato dall'apotema di detto cono col piano secante soddisfa all'equazione

$$\tan^4 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha.$$

Problema 2 ([20])

Calcolare il seno dell'angolo che un cateto di un triangolo rettangolo forma con l'ipotenusa, conoscendo il rapporto k di quel cateto con la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa. Considerando, poi, i casi particolari in cui $k = 1$; $k = 1/2$, si dia anche l'interpretazione geometrica dei valori che acquista, allora, il seno medesimo.

2.29. Anno scolastico 1911-1912

2.29.1. Sessione estiva

Problema 1 ([24, 1, 2])

ABC è un triangolo rettangolo in C, e C′ è il piede dell'altezza $\overline{CC'}$. Dato il rapporto m tra la superficie della sfera che ha per raggio quello del circolo inscritto nel triangolo, e la superficie laterale del cilindro che ha per lato l'ipotenusa $\overline{AB}$ e per sezione retta il circolo di raggio $\overline{CC'}$, e dato anche il perimetro $2p$ del triangolo, calcolare i lati di questo. Si può provare, inoltre che, indicando con β uno degli angoli acuti del triangolo, si ha

$$\frac{(\tan\beta+1)^2}{\tan\beta}=\frac{\left(1+m^2\right)}{2m}.$$

Problema 2 ([24, 1])

Un triangolo ABC, rettangolo in C, ruota di un giro completo intorno all'ipotenusa $\overline{AB}$, in modo che, condotta l'altezza $\overline{CC'}$, i cateti $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ descrivano due coni aventi per base il circolo di raggio $\overline{CC'}$. Calcolare i lati del triangolo, supponendo noto il raggio r del cerchio inscritto e supponendo noto il rapporto m tra la somma delle superfici laterali dei due coni e la superficie laterale del cilindro avente per lato l'ipotenusa e per sezione retta il circolo di raggio $\overline{CC'}$. Dimostrare inoltre che:

$$\frac{(1+\tan B)^2}{1+\tan^2 B}=4m^2.$$

2.29.2. Sessione autunnale

Problema 1 ([20])

È data la diagonale a di un rettangolo ed un segmento b. Calcolare i lati consecutivi del rettangolo supponendo che la sua area sia eguale a quella di un altro rettangolo che ha uno dei lati eguale a b e l'altro lato eguale alla somma dei due primi.

Provare, inoltre, che, indicando con β uno degli angoli formato dalla diagonale con il lato, si ha:

$$\frac{(\tan\beta+1)^2}{\tan\beta}=1+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}.$$

Problema 2 ([20])

Un triangolo ABC, rettangolo in C, ruota di un giro completo intorno all'ipotenusa $\overline{AB}$, in modo che, condotta l'altezza $\overline{CC'}$, i cateti $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ descrivano due coni aventi per base il circolo di raggio $\overline{CC'}$. Calcolare i lati del triangolo, supponendo noto il raggio r del cerchio inscritto e supponendo noto il rapporto m tra la somma delle superfici laterali dei due coni e la superficie laterale del cilindro avente per lato l'ipotenusa e per sezione retta il circolo di raggio $\overline{CC'}$.

Dimostrare inoltre che:

$$\frac{(1+\tan\hat{B})^2}{1+\tan^2\hat{B}}=4m^2.$$

2.30. Anno scolastico 1912-1913

2.30.1. Sessione autunnale

Problema 1 ([20])

Il volume di un tronco di cono a basi parallele e di altezza h equaglia quello di una sfera il cui raggio è eguale all'altezza del tronco di cono. In pari tempo il volume di un cono che ha per sua base A una delle basi del tronco suddetto ed ha per altezza il raggio dell'altra base, eguaglia il volume di un cilindro che ha per base un cerchio di raggio dato a e per altezza il raggio della base A del cono. Trovare i raggi di base del tronco di cono.

Problema 2 ([20])

Il volume di un cono è in rapporto dato m con quello di un cilindro che ha per base un circolo di dato raggio a ed ha per altezza il raggio di base del cono. La superficie laterale dello stesso cono è in rapporto dato n con la superficie laterale di un cilindro che ha la stessa base del cono ed ha altezza data h. Si domanda quali sono i valori del raggio della base e dell'altezza del cono, ed in quali casi il problema non è possibile.

2.31. Anno scolastico 1915-1916

2.31.1. Sessione estiva

Problema 1 ([1])

Si calcolino le misure degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo, sapendo che esse sono in progressione aritmetica, che la loro somma è a e che la somma delle aree delle facce concorrenti in un vertice è b^2. Determinare la condizione di possibilità del problema.

2.32. Anno scolastico 1917-1918

Problema 1 ([1])

È data una sfera di diametro $\overline{\mathsf{AB}}$. Determinare a quale distanza $|\overline{\mathsf{AC}}| = x$ da A si deve condurre un piano perpendicolare al diametro $\overline{\mathsf{AB}}$, per modo che la somma dei volumi dei coni aventi per base la sezione del piano colla sfera e per vertici gli estremi del diametro $\overline{\mathsf{AB}}$, sia in rapporto m col volume della sfera di diametro $\overline{\mathsf{AC}}$.

Costruzione geometrica per $m = 1$ e per $m = 2$.

Problema 2 ([1])

Di un cono retto a base circolare si conosce la somma dell'apotema e del raggio della base e si ha inoltre che la superficie totale del cono è in rapporto conosciuto con quella della sfera inscritta. Calcolare l'apotema e il raggio.

2.33. Anno scolastico 1920-1921

Problema 1([24])

Sopra una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ e di centro O si fissi un punto C, in modo che essendo D la sua proiezione sul diametro, si abbia:

$$|\overline{AD}| + 2 \cdot |\overline{DC}| = \ell.$$

Problema 2([24])

Risolvere e discutere l'equazione:

$$\sin 2x - 2m(\sin x + \cos x) + 2 = 0,$$

supposto x arco del primo quadrante. Si osservi che m dev'essere positivo.

Problema 3([24])

Trovare i cateti di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è a ed il rapporto tra il raggio r_a del cerchio ex-inscritto tangente all'ipotenusa a ed il raggio r del cerchio inscritto è m.

2.34. Anno scolastico 1921-1922

Problema 1([24])

Si determinino gli angoli α, β, γ del triangolo ABC conoscendo le misure c e a dei lati $\overline{AB}$ (opposto all'angolo γ) e $\overline{BC}$ (opposto all'angolo α) e sapendo che l'angolo α è doppio dell'angolo β.

2.35. Anno scolastico 1922-1923

Problema 1([24, 1])

Si circoscriva ad un emisfera di raggio r un tronco di cono retto a basi parallele in modo che il volume del tronco risulti eguale a $(\pi/3) r\, m^2$, essendo m reale e positivo. Trovare il valore di m^2 per cui il volume del tronco è minimo.

Problema 2([24, 1])

Un tronco di cono è equivalente ad un cono di eguale altezza, nel quale il raggio della base ha per misura b. Si determinino i raggi delle basi del tronco sapendo che la differenza delle due basi è equivalente a un cerchio di raggio a.

3. Corso di ordinamento

Questo capitolo raccoglie tutte le prove assegnate al corso di ordinamento del Liceo Scientifico, dalla sua istituzione nell'anno scolastico 1923-1924 all'anno scolastico 2017-2018. È da tenere conto che nei primi anni i candidati avevano frequentato alcuni anni della precedente sezione Fisico-Matematica dell'Istituto Tecnico o del Liceo Moderno e le tracce proposte tengono conto di questo fatto.

3.1. Anno scolastico 1923-1924

3.1.1. Sessione estiva

Problema

Due circonferenze di raggi R ed r ($R > r$) sono tangenti internamente. Trovare sopra la tangente comune un punto tale che le tangenti condotte per esso alle due circonferenze formino un angolo dato γ. A quale condizione deve essere sottoposto γ affinché il problema sia possibile? Si osservi che la differenza degli angoli che la tangente comune forma con le congiungenti il punto che si cerca coi centri dei circoli, eguaglia la metà di γ.

3.1.2. Sessione autunnale

Problema

Un rettangolo, ruotando successivamente di un giro completo intorno alla sua base ed alla sua altezza genera due cilindri, la somma dei volumi dei quali é tripla del volume della sfera di raggio a. Sapendo che $2p$ è il perimetro del rettangolo, calcolare la base e l'altezza del rettangolo.

3.2. Anno scolastico 1924-1925

3.2.1. Sessione estiva

Problema

In un cilindro circolare retto, di raggio r ed altezza h, é descritta, col centro O sull'asse del cilindro e col medesimo raggio r, una sfera che si suppone non abbia punti esterni al cilindro. Si vuole che il volume della sfera risulti medio proporzionale tra i volumi dei due solidi rotondi che, sommati alla sfera, danno il cilindro.

1. Si determini a quale distanza da una delle basi del cilindro va preso il centro O della sfera.
2. Si esaminino i casi particolari $h = 4r$ e $h = 7r$, calcolando in ciascuno di essi i volumi dei due solidi rotondi su indicati.

3. Tenendo presente la condizione di realtà delle soluzioni, e la condizione esplicitamente aggiunta che i punti della sfera non sono esterni al cilindro, si dimostri che ogni assegnato h si deve supporre dato in modo da soddisfare alla limitazione $4r \leq h \leq 7r$.

3.2.2. Sessione autunnale

Problema

Determinare gli angoli acuti $\mathrm{A\widehat{B}C} = \beta$ ed $\mathrm{A\widehat{C}B} = \gamma$ di un triangolo rettangolo ABC in modo che sia soddisfatta la relazione: $p \sin\beta + q \sin\gamma = r$ dove p, q, r, sono tre, numeri positivi assegnati. Fissati p, q, con $p < q$, fra quali limiti può variare r perché il problema abbia soluzione?

NB. Il candidato potrà assumere, volendo, come incognita $\tan(\beta/2)$. É poi in sua facoltà completare l'esercizio costruendo il triangolo rettangolo ABC di data ipotenusa $|\overline{\mathrm{BC}}| = a$, i cui angoli acuti β e γ fanno assumere ad r (cioè a $p \sin\beta + q \sin\gamma = r$) il massimo valore di cui è suscettibile.

3.3. Anno scolastico 1925-1926

3.3.1. Sessione estiva

Problema

La base maggiore, il lato obliquo e la base minore di un trapezio isoscele formano una progressione aritmetica. Determinare il lato obliquo e la ragione della progressione sapendo che la somma dei lati obliqui e della base minore è a e che la somma dei quadrati dei quattro lati è $2b^2$. Dire come deve scegliersi b affinché, dato a, il problema sia possibile.

3.3.2. Sessione autunnale

Problema

Essendo a, b, c, i lati di un triangolo ($a > b > c$) determinare x in modo che $a-x$, $b-x$, $c-x$ siano i lati di un triangolo rettangolo. Discutere i risultati e farne qualche applicazione numerica in modo che risultino interi i valori dei lati del triangolo rettangolo.

3.4. Anno scolastico 1926-1927

3.4.1. Sessione estiva

Problema

Dato un angolo retto $y\widehat{\mathrm{O}}x$ ed un punto M ad esso interno che abbia da $\mathrm{O}y$ ed $\mathrm{O}x$ rispettivamente le distanze a e b, condurre per M una retta tale che, detti A e B i punti d'intersezione di essa coi lati dell'angolo retto, si abbia $|\overline{\mathrm{AM}}|^2 + |\overline{\mathrm{BM}}|^2 = m^2$, dove m è un numero reale assegnato. Discutere i risultati e dire come deve essere condotta la retta AB, perché sia minima la somma $|\overline{\mathrm{AM}}|^2 + |\overline{\mathrm{BM}}|^2$.

Il candidato ha facoltà di esaminare la questione da un punto di vista più generale, considerando anche i casi nei quali la retta AB incontra uno dei lati dell'angolo retto ed il prolungamento dell'altro.

3.4.2. Sessione autunnale

Problema

Dato un cerchio di raggio r, determinare in esso un angolo al centro $\mathsf{A\widehat{O}B} = x$ in modo che, costruito il triangolo equilatero ABC sulla corda $\overline{\mathsf{AB}}$ da parte opposta del centro O, sia kr^2 l'area del quadrilatero OACB. Discutere i risultati e dire quale valore deve avere x perché il quadrilatero abbia area massima.

3.5. Anno scolastico 1927-1928

3.5.1. Sessione estiva

Problema

É dato un angolo retto $\mathsf{X\widehat{O}Y}$ e sono dati due punti A e B sui lati OX ed OY in modo che $|\overline{\mathsf{OA}}| = |\overline{\mathsf{OB}}|\sqrt{3}$. Determinare un punto P interno all'angolo retto sapendo che l'angolo $\mathsf{O\widehat{P}A}$ è retto e che $|\overline{\mathsf{OP}}|^2 + |\overline{\mathsf{PB}}|^2 = k\,|\overline{\mathsf{OB}}|^2$.

Si trovino anche le condizioni alle quali deve soddisfare il numero k affinché il problema sia possibile e si dica quali valori deve avere lo stesso numero perché il punto P cada sul lato OX o sulla bisettrice dell'angolo $\mathsf{X\widehat{O}Y}$. É in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema per via geometrica oltreché per via algebrica non mancando di far vedere che la risoluzione geometrica vale anche quando gli angoli $\mathsf{X\widehat{O}Y}$ ed $\mathsf{O\widehat{P}A}$ ed il rapporto $|\overline{\mathsf{OA}}| : |\overline{\mathsf{OB}}|$ abbiano valori qualsivogliano.

NB. Per la risoluzione algebrica potrà esser utile assumere come incognita $\tan \mathsf{A\widehat{O}P}$.

3.5.2. Sessione autunnale

Problema

Determinare sopra un arco $\overset{\frown}{\mathsf{AB}}$, quarta parte di una circonferenza di centro O e di raggio r, un punto P tale che, detta C la proiezione ortogonale di P sul raggio $\overline{\mathsf{OB}}$, si abbia che la somma del segmento $\overline{\mathsf{AP}}$ e del doppio del segmento $\overline{\mathsf{PC}}$ sia eguale ad un segmento di lunghezza l, dove l è un numero positivo. Discussione.

3.6. Anno scolastico 1928-1929

3.6.1. Sessione estiva

Problema

Considerando uno qualunque dei triangoli rettangoli aventi un cerchio dato di raggio r come cerchio inscritto o ex-inscritto tangente all'ipotenusa, far vedere che tra i cateti x ed y del triangolo sussiste sempre la relazione:

$$xy - 2r(x+y) + 2r^2 = 0. \tag{1}$$

Servendosi poi di questa relazione, determinare i lati di un triangolo rettangolo del quale si sa che il raggio del cerchio inscritto è r e che l'area è uguale a quella di un rettangolo di lati r ed a. Discussione e costruzione geometrica.

Il candidato può, se lo crede, formulare e risolvere qualche altro problema intorno ai triangoli rettangoli in cui convenga, in particolar modo, servirsi della relazione (1) sopra riportata.

3.6.2. Sessione autunnale

Problema

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2 \\ x(x+y)=m^2 \end{cases}$$

e dare le condizioni a cui debbono soddisfare a, m ed α affinché x ed y siano reali.

Il candidato può, se lo crede, discutere anche il segno delle radici in relazione ai valori di a, m, ed α.

3.7. Anno scolastico 1929-1930

3.7.1. Sessione estiva

Problema

Un trapezio convesso, iscritto in un cerchio di raggio r, ha per base maggiore un diametro del cerchio. Sapendo che k è il rapporto alla base maggiore della somma degli altri tre lati, determinare questi. Discutere i risultati e far vedere che di tutti i trapezi convessi iscritti nel cerchio e aventi per base maggiore un diametro, quello di perimetro massimo è il semiesagono regolare, il quale soddisfa anche alla condizione di avere area massima.

Il candidato, se crede, può determinare il valore di k per cui il suddetto trapezio inscritto sia anche circoscrittibile ad un cerchio, dando in questo caso la costruzione geometrica del trapezio stesso.

3.7.2. Sessione autunnale

Problema

Un cerchio di raggio r è tangente internamente in A ad un altro di raggio R. Condurre parallelamente alla tangente in A ai due cerchi una secante comune in modo che la somma dei quadrati delle corde da essa determinate nei due cerchi stessi sia doppia del quadrato di lato $2k$. Discutere i risultati ed esaminare, in relazione alla discussione fatta, i due casi particolari:

$$R=9r \quad \text{e} \quad k=3r \qquad ; \qquad R=\frac{3}{2}r \quad \text{e} \quad k=\frac{6}{5}r.$$

É in facoltà del candidato di aggiungere la costruzione geometrica, indicando anche come deve essere condotta la retta secante perché sia massima la somma dei quadrati delle due corde suddette.

3.8. Anno scolastico 1930-1931

3.8.1. Sessione estiva

Problema

L'angolo $\mathsf{X\widehat{O}Y}$ è di 60°, e sul lato OX sono dati due punti A e B in modo che $\overline{\mathsf{OB}}$ sia doppio di $\overline{\mathsf{OA}}$. Determinare sul lato OY un punto M tale che il rapporto $\overline{\mathsf{MA}}/\overline{\mathsf{MB}}$ sia uguale ad un numero assegnato k. Discutere i risultati e, dopo aver determinato su OY anche i due punti M_1 e M_2 per i quali risulta massimo o minimo il rapporto delle distanze di un punto di OY da A e da B, far vedere che i quattro punti A, B, M_1, M_2, appartengono ad una stessa circonferenza. É in facoltà del candidato di risolvere la prima parte del problema anche per via geometrica.

3.8.2. Sessione autunnale

Problema

Per un punto P interno ad una circonferenza di centro O e raggio r, si conducano due rette perpendicolari fra loro e che incontrano la circonferenza, la prima nei punti A, A′, la seconda nei punti B, B′. Posto $|\overline{OP}| = a$ e l'angolo $O\widehat{P}A = \alpha$, esprimere in funzione dei due parametri a ed α l'area del quadrilatero convesso determinato dai quattro punti A, B, A′, B′. Inoltre, supposto prima costante a e variabile α e poi α costante ed a variabile, determinare nell'un caso e nell'altro, per quali valori del parametro variabile l'area del quadrilatero risulta uguale ad un numero dato k^2.

Dire anche quando è che l'area in ciascun dei due casi diventa massima o minima. È in facoltà del candidato di trattare anche il problema nell'ipotesi che il punto P sia esterno alla circonferenza.

3.9. Anno scolastico 1931-1932

3.9.1. Sessione estiva

Problema

Dato un angolo retto $Y\widehat{O}X$ e dati due segmenti di misura a ed m determinare nell'interno dell'angolo un punto P tale che $\overline{OP}$ sia uguale al primo segmento e la somma della terza parte della distanza di P da OX con la quarta parte della distanza di P da OY sia eguale al secondo segmento. Discussione e costruzione geometrica.

3.9.2. Sessione autunnale

Problema

Dato il quadrato ABCD di lato a, determinare sul lato $\overline{AB}$ un punto M tale che sia q il rapporto dei due solidi ottenuti facendo ruotare di un giro completo il trapezio MBCD, una volta intorno alla retta AB, un'altra volta intorno alla retta AD.

3.10. Anno scolastico 1932-1933

3.10.1. Sessione estiva

Problema

Sopra una circonferenza data il cui diametro $\overline{AB}$ ha per misura $2r$ determinare un punto P in modo che, detta M la proiezione di esso sulla retta perpendicolare in B ad $\overline{AB}$, la somma dei due segmenti $\overline{AP}$ e $\overline{PM}$ abbia, rispetto alla stessa unità scelta per $\overline{AB}$, per misura un numero dato l.

Discussione. É in facoltà del candidato di determinare anche, nell'ipotesi che P vari sulla semicirconferenza, per quale posizione di P è massimo il volume del solido generato dal trapezio APMB in una rotazione completa intorno ad $\overline{AB}$, essendo sempre M la proiezione di P sulla perpendicolare in B ad $\overline{AB}$.

3.10.2. Sessione autunnale

Problema

Determinare, per via algebrica o geometrica, la base e l'altezza di un triangolo isoscele conoscendone la somma s e sapendo che il triangolo è iscritto in un cerchio di raggio r. Discussione. Casi particolari a scelta.

Il candidato può anche determinare e costruire quello dei triangoli isosceli inscritti in un cerchio dato per cui è massima la somma della base e dell'altezza.

3.11. Anno scolastico 1933-1934

3.11.1. Sessione estiva

Problema 1

In un trapezio convesso ABCD le basi $\overline{\mathsf{AD}}$ e $\overline{\mathsf{BC}}$ sono perpendicolari al lato $\overline{\mathsf{AB}}$; di più la base $\overline{\mathsf{BC}}$ è uguale al lato $\overline{\mathsf{CD}}$ e la base $\overline{\mathsf{AD}}$ è minore del lato $\overline{\mathsf{AB}}$. Determinare le misure dei lati $\overline{\mathsf{BC}}$, $\overline{\mathsf{CD}}$, $\overline{\mathsf{DA}}$, sapendo che la misura del lato $\overline{\mathsf{AB}}$ è a e che il trapezio è equivalente al triangolo rettangolo di cui un cateto è uguale ad $\overline{\mathsf{AB}}$ e l'altro ha per misura k. Discutere i risultati.

Il candidato può aggiungere la risoluzione geometrica del problema.

Problema2

L'equazione di una curva (parabola) rispetto a due assi cartesiani ortogonali è

$$y = \frac{5+8x-4x^2}{4}.$$

Determinare:

1. i punti d'intersezione della curva con gli assi;
2. il punto della curva di ordinata massima;
3. l'area del triangolo OMN che ha il vertice O nell'origine delle coordinate e gli altri due, M ed N, nei punti della curva aventi entrambi per ordinata $0,6875$ (cioè $11/16$).

É in facoltà del candidato di dire anche, fra tutti i triangoli aventi un vertice in O e gli altri due in punti della curva di uguale ordinata positiva, qual è quello di area massima.

3.11.2. Sessione autunnale

Problema 1

I cateti $\overline{\mathsf{AB}}$ ed $\overline{\mathsf{AC}}$ del triangolo rettangolo BAC hanno per misura rispettivamente 1 e 2. Condurre per il vertice A una retta r non secante il triangolo in modo che, sempre rispetto al segmento $\overline{\mathsf{AB}}$, sia k la misura del segmento $\overline{\mathsf{B'C'}}$ che si ottiene proiettando ortogonalmente su di essa l'ipotenusa $\overline{\mathsf{BC}}$. Discutere i risultati e far vedere:

1. che per $k = 1+\sqrt{3}/2$ si ha una sola soluzione data da una retta inclinata su $\overline{\mathsf{AC}}$ di 60°;
2. che per $k = 3/\sqrt{2}$ si hanno due soluzioni delle quali una è data da una retta r_1 inclinata su $\overline{\mathsf{AC}}$ di 45°.

É in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema anche per via geometrica e far vedere che delle due soluzioni che si hanno per $k = 3/\sqrt{2}$, quella data dalla retta r_1 corrisponde al massimo dell'area del trapezio $\mathsf{BCC'B'}$.

Problema 2

Rispetto a due assi cartesiani ortogonali, l'equazione di una curva (parabola) è della forma $y = ax^2 + bx + c$. Determinare a, b, c, sapendo che la curva passa per i due punti $(0,1)$ e $(1,0)$ e che in quest'ultimo è tangente ad una retta inclinata di 45° sull'asse delle x.

Determinare anche:

1. l'altro punto d'intersezione della curva con l'asse delle x e la direzione della tangente in esso alla curva;
2. il punto della curva di ordinata minima;
3. come deve essere scelto m affinché la retta $y = mx$ passante per l'origine intersechi la curva.

3.12. Anno scolastico 1934-1935

3.12.1. Sessione estiva

Problema 1

Di un trapezio convesso isoscele le cui diagonali sono perpendicolari fra loro, si conosce il perimetro $2p$ e si sa che è equivalente ad un quadrato di lato m. Determinare i segmenti in cui ciascuna diagonale divide l'altra e discutere i risultati.

È in facoltà del candidato di dare anche la costruzione geometrica rilevandola dalla formula ottenuta, o meglio, osservando che il problema può ricondursi a quello della costruzione di un triangolo rettangolo del quale si siano trovati l'ipotenusa e la somma dei cateti.

Problema 2

In coordinate cartesiane ortogonali rappresentare graficamente la funzione $y = x^3 - x^2$ dopo aver determinato della curva rappresentativa:

1. i punti d'intersezione con l'asse delle x e le tangenti in tali punti;
2. i punti di massimo e minimo;
3. qualche altro punto a scelta del candidato.

Determinare inoltre i punti d'intersezione della curva con la retta $y = mx$ e discutere i risultati.

É poi facoltà del candidato, dato il numero reale a e considerato il punto P della curva di ascissa a, di determinare le ascisse degli altri due punti P_1 e P_2 della curva che hanno la stessa ordinata di P, e dire per quali valori di a tali ascisse risultano reali.

3.12.2. Sessione autunnale

Problema 1

In un piano sono date una circonferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ ed una retta xy che la sega ed è perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ alla distanza a da A. Determinare l'angolo φ che una semiretta uscente dall'estremo A deve formare con $\overline{\mathsf{AB}}$, affinché, detto M l'altro punto d'intersezione della semiretta con la circonferenza ed N il punto d'intersezione di essa con la retta xy, risulti uguale ad un segmento assegnato m la distanza dei punti M ed N.

Discussione e costruzione geometrica.

È in facoltà del candidato di considerare anche i casi in cui la retta xy sia esterna o tangente alla circonferenza.

Problema 2

In coordinate cartesiane ortogonali rappresentare graficamente le funzioni:

$$y = x^2 - 3x + 2 \qquad , \qquad y = -x^2 + x + 2.$$

Delle curve rappresentative determinare i punti d'intersezione con gli assi coordinati e le tangenti in tali punti, nonché i punti di massimo e di minimo. Dire anche come deve essere condotta una retta parallela all'asse delle x, affinché risultino uguali le due corde che la retta stessa determina in ciascuna delle curve.

É in facoltà del candidato di calcolare l'area individuata dai due archi delle curve date che hanno per estremi i punti comuni alle curve stesse.

3.13. Anno scolastico 1935-1936

3.13.1. Sessione estiva

Problema 1

Sopra una retta due segmenti adiacenti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ di lunghezze rispettivamente $2r$ e $4r$ sono diametri di due circonferenze complanari di centri O ed O′. Una semiretta AX uscente da A sega le due circonferenze: la prima in M, oltre che in A, la seconda in N e P, con N più vicino ad M. Supposta uguale a φ la misura dell'angolo $M\widehat{A}B$ e detta Q′ la proiezione di O′ sulla retta AP, determinare le lunghezze dei segmenti $\overline{O'Q'}$, $\overline{NQ}$, $\overline{AM}$ e dire come deve essere scelto φ affinché il segmento $\overline{MN}$ risulti uguale ad un segmento dato di lunghezza a.

Discussione e costruzione geometrica in base alla formula di risoluzione.

Problema 2

In uno stesso sistema di coordinate cartesiane ortogonali due curve (parabole) hanno per equazioni:

$$y = x^2 - 2x \qquad , \qquad y = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Disegnare le due curve dopo aver trovato i loro punti d'intersezione, i punti d'incontro con l'asse delle x, i punti di minimo e massimo. Dire inoltre a quale distanza dall'asse delle x deve essere condotta una retta parallela a questo, affinché risultino uguali le due corde da essa determinate sulle due parabole. (Si osservi, al riguardo, che la lunghezza di ciascuna corda si può esprimere mediante la differenza delle ascisse dei suoi estremi). È in facoltà del candidato di trovare:

1. a quale distanza dall'asse delle y, ed internamente alla striscia determinata dalle perpendicolari all'asse delle x passanti per i due punti d'incontro delle due curve, deve essere condotta una retta parallela all'asse delle y stesso, affinché sia massimo il segmento di essa avente gli estremi sulle due parabole;
2. l'area della parte di piano limitata dagli archi delle due parabole i quali hanno per estremi i punti d'incontro delle parabole stesse.

3.13.2. Sessione autunnale

Problema 1

Sopra l'arco $\widehat{AB}$, quarta parte della circonferenza di centro O e raggio $2r$, determinare un punto P tale che, detti M ed N i due punti situati rispettivamente sui raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ alla distanza r da O, il quadrangolo MONP abbia per area kr^2, essendo k un numero reale positivo. Discussione.

II candidato può aggiungere la risoluzione e discussione per via geometrica.

Problema 2

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O, una curva (parabola) ha per equazione $y = x^2 - 6x + 8$.

Disegnare la curva dopo averne trovato:

1. i punti A e B ($\overline{OA} < \overline{OB}$) d'intersezione con l'asse delle x;
2. il punto C d'intersezione con l'asse delle y;
3. il punto di minimo, o vertice della parabola;
4. la tangente nel punto A e il punto d'intersezione T di essa con l'asse y, facendo osservare nello stesso tempo che la tangente è parallela alla retta BC.

Determinare poi, mediante le coordinate, un punto P dell'arco $\widehat{AC}$ della curva in modo che sia k l'area del quadrangolo convesso che ha per vertici: P, l'origine O, il punto medio M di $\overline{OA}$ e il punto medio R di $\overline{OT}$.

Per quali valori di m una retta di equazione $y = mx$ è segante o tangente alla parabola?

3.14. Anno scolastico 1936-1937

3.14.1. Sessione estiva

Problema 1

Di un triangolo ACB si sa che le misure dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ sono rispettivamente $3a$ e $2a$; si sa inoltre che l'angolo $A\widehat{C}B$ è di 60°. Determinare sul lato $\overline{AC}$ un punto P e sul lato $\overline{BC}$ un punto Q tali che il segmento $\overline{AP}$ sia uguale al segmento $\overline{BQ}$ e che la somma dei quadrati costruiti sui quattro segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PA}$ sia equivalente al quadrato il cui lato ha per misura l. Discussione. (Si prenda per incognita la misura di $\overline{AP}$ e si ricordi il teorema relativo al quadrato di un lato di un triangolo in funzione degli altri due lati e del coseno dell'angolo compreso).

Problema 2

Data l'equazione in x

$$x^2 - 2(k-1)x + 4 = 0,$$

dire per quali valori positivi del parametro k una od entrambe le radici sono reali, positive e non superiori a 4. Ritrovare poi i risultati della discussione, servendosi della rappresentazione grafica della funzione

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

che si ottiene mutando k in y nell'equazione data e risolvendo l'equazione rispetto ad y anziché ad x.

N.B. Per la rappresentazione della funzione

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

converrà disegnare prima la retta $y = x/2 + 1$ e poi far vedere, determinando opportunamente qualche punto e cercando anche i massimi e i minimi, che la curva (iperbole) è tutta situata nei due angoli acuti formati dall'asse delle y e dalla retta disegnata $y = x/2 + 1$. Per il calcolo della derivata di

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}$$

tenere presente che la derivata di

$$\frac{2}{x} \quad \text{è} \quad -\frac{2}{x^2}.$$

3.14.2. Sessione autunnale

Problema 1

Sopra una semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$, determinare un punto P tale che, detta Q la proiezione d'esso su $\overline{\mathsf{AB}}$, la somma dei due segmenti $\overline{\mathsf{AP}}$ e $\overline{\mathsf{QP}}$ sia uguale ad un segmento assegnato a. Discussione.

È in facoltà del candidato di risolvere e discutere il problema anche per via geometrica.

Problema 2

Dopo aver disegnato nel piano cartesiano la curva (parabola) rappresentatrice della funzione $y = 1 - x^2$, condurre nel segmento parabolico, determinato dalla curva e dall'asse x, una corda $\overline{\mathsf{AB}}$, parallela a quest'asse, in modo che sia $2p$ il perimetro del rettangolo avente per vertici i punti A, B e le proiezioni A′ e B′ di questi punti sull'asse delle x. Discussione. Calcolo dei valori di p pei quali il rettangolo risulta quadrato o con due lati consecutivi uno metà dell'altro.

3.15. Anno scolastico 1937-1938

3.15.1. Sessione estiva

Problema 1

In assi cartesiani ortogonali una parabola data è rappresentata da una equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Determinare a, b, c e disegnare la parabola, sapendo che questa incontra l'asse delle x nell'origine O e in un punto A di ascissa 4 e che la tangente alla curva nell'origine forma con l'asse x un angolo di 45°. Determinare inoltre il trapezio di area massima fra tutti quelli che hanno per base maggiore il segmento $\overline{\mathsf{OA}}$ e per base minore una delle corde della parabola parallela ad $\overline{\mathsf{OA}}$. Dire anche in quale rapporto sta l'area di tale trapezio a quella del segmento parabolico determinato da $\overline{\mathsf{OA}}$ e contenente il trapezio.

Problema 2

Sopra un diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ di un cerchio di centro O e raggio r sono dati i due punti C e D rispettivamente medi di $\overline{\mathsf{OA}}$ ed $\overline{\mathsf{OB}}$. Determinare la lunghezza $2x$ di una corda $\overline{\mathsf{EF}}$ del cerchio, parallela ad $\overline{\mathsf{AB}}$, in modo che, detto m un numero reale e positivo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui quattro lati del trapezio convesso CEFD risulti eguale a:

$$\frac{(m+2)r^2}{2}.$$

Discussione. Casi particolari a scelta del candidato.

3.15.2. Sessione autunnale

Problema 1

Di un triangolo rettangolo BAC, l'ipotenusa $\overline{\mathsf{BC}}$ è lunga $2a$ ed il cateto $\overline{\mathsf{CA}}$ è minore od uguale al cateto $\overline{\mathsf{BA}}$. Detti O il punto medio di $\overline{\mathsf{BC}}$ ed M il punto in cui la perpendicolare in O a $\overline{\mathsf{BC}}$ incontra la retta AB, determinare l'angolo $\mathsf{C\widehat{B}A}$ sapendo che l'area del rettangolo di lati $\overline{\mathsf{CA}}$ ed $\overline{\mathsf{OM}}$ è uguale a $2ma^2$, essendo m un numero dato.

Discussione e calcolo dei valori di m per cui l'angolo $\mathsf{C\widehat{B}A}$ risulta rispettivamente di 30°, 45°, 36°.

Problema 2

In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola $y^2 = x + 1$. Disegnare la curva e determinare i punti P di essa, per cui, detta O l'origine delle coordinate ed A il punto dell'asse delle x di ascissa 1, si abbia

$$\frac{|\overline{\mathsf{PO}}|^2}{|\overline{\mathsf{PA}}|^2} = m,$$

essendo m un numero dato. Discussione.

3.16. Anno scolastico 1938-1939

3.16.1. Sessione estiva

Problema 1

In un semicerchio di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ condurre una corda $\overline{\mathsf{AC}}$ tale che, se $\overline{\mathsf{AD}}$ è la corda che biseca l'angolo $\mathsf{B\widehat{A}C}$, risulti $|\overline{\mathsf{AC}}| + |\overline{\mathsf{AD}}| = 2mr$, con m reale e positivo. Discussione. Caso particolare

$$m = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Si prenda come incognita $\mathsf{B\widehat{A}C} = 2x$.

Problema 2

In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola

$$y = a - \frac{x^2}{a}.$$

Detti A e B i punti d'intersezione di essa con l'asse delle x, determinare sull'arco parabolico AB un punto P tale che si abbia $|\overline{\mathsf{AP}}|^2 + |\overline{\mathsf{BP}}|^2 = 2k^2$. Discussione e costruzione geometrica.

3.16.2. Sessione autunnale

Problema 1

Sul diametro $\overline{AB}$ di un cerchio di centro O e raggio r è dato il punto P medio del raggio $\overline{OA}$. Determinare sul raggio $\overline{OB}$ un punto Q tale che, condotta per esso la corda $\overline{CD}$ perpendicolare ad $\overline{AB}$, la somma dei quadrati dei lati del triangolo PCD sia:

$$2\left(m+\frac{1}{4}\right)r^2,$$

essendo m un numero reale positivo dato. Discussione.

Problema 2

Disegnare, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, le due curve rappresentate dalle equazioni:

$$y = n(mx^2+3x) \qquad \text{(parabola)}$$
$$y = \frac{2n}{x} \qquad \text{(iperbole)}$$

sapendo che m ed n sono tali che uno dei punti d'intersezione delle due curve è il punto $(1,6)$. Determinare inoltre le coordinate degli altri punti d'intersezione delle due curve.

È in facoltà del candidato di trovare anche il massimo dei rettangoli aventi due vertici consecutivi sull'asse delle ascisse e gli altri due sull'arco della suddetta parabola determinato da questo asse stesso.

3.17. Anno scolastico 1939-1940

3.17.1. Sessione estiva

Problema

Di un trapezio isoscele gli angoli adiacenti alla base maggiore sono di 60°, il perimetro è $2p$, l'area è

$$\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Determinare i lati del trapezio.

Discussione. Si assumano come incognite la base minore ed uno dei lati non paralleli.

3.17.2. Sessione autunnale

Problema 1

Sono dati due triangoli ABC, DEF, il primo rettangolo in B, il secondo con l'angolo $\widehat{DEF}$ uguale a 60°. Le misure dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ formano, nell'ordine scritto, una progressione aritmetica di ragione conosciuta d positiva; inoltre la somma dei quadrati delle misure di $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ vale md^2, con m numero reale positivo dato. Determinare la lunghezza del lato $\overline{AB}$. Discussione.

Problema 2

Disegnare in coordinate cartesiane, la parabola: $y^2 = 3x + 4$ e determinare i punti di essa che distano di a dal punto di coordinate $x = 1$, $y = 0$. Discussione. Nell'ipotesi che sia

$$a = \frac{\sqrt{85}}{4},$$

verificare che i punti d'intersezione sono quattro e determinare l'area del quadrangolo convesso da essi individuato.

3.18. Anno scolastico 1940-1941

3.18.1. Sessione estiva

Problema 1

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x + 2y = 2a \end{cases}$$

e discutere la realtà ed il segno delle radici al variare di a, che si suppone positivo. Casi particolari:

$$a = \frac{1}{2} \quad , \quad a = 1 \quad , \quad a = \frac{3}{2} \quad , \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

É in facoltà del candidato di ritrovare i risultati della discussione per via geometrica, servendosi delle due linee (cerchio e retta) rappresentate, in coordinate cartesiane ortogonali, dalle due equazioni del sistema dato.

Problema 2

Un settore circolare OAB è quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare l'angolo che un raggio $\overline{\mathsf{OP}}$, interno ad esso, deve fare con $\overline{\mathsf{OA}}$ affinché, detto C il punto medio del raggio $\overline{\mathsf{OA}}$ e D la proiezione ortogonale di P su $\overline{\mathsf{OB}}$, si abbia $|\overline{\mathsf{PC}}|^2 + |\overline{\mathsf{PD}}|^2 = kr^2$, dove k è un numero positivo dato. Discussione. Casi particolari a scelta del candidato.

3.18.2. Sessione autunnale

Problema 1

Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che la somma dei cateti è $2s$ e che la mediana relativa al cateto maggiore è m. Discussione e costruzione geometrica.

Problema 2

Una parabola, la cui equazione in coordinate cartesiane ortogonali è del tipo $y = ax^2 + bx + c$, passa per i punti $(0,-3)$, $(2,-3)$, $(3,0)$. Dopo aver determinato i coefficienti a, b, c, disegnare la curva e trovare i punti di essa per i quali la differenza fra l'ordinata e l'ascissa è eguale ad un numero reale m. Dire inoltre come varia, rispetto agli assi coordinati, la posizione dei suddetti punti al variare di m.

3.18.3. Sessione straordinaria, marzo 1942

Problema

Determinare l'angolo della base ed i lati di un triangolo isoscele ottusangolo conoscendone il raggio r del cerchio circoscritto e la differenza kr fra il doppio della base e il triplo dell'altezza. Discussione. É facoltativa la risoluzione geometrica.

3.19. Anno scolastico 1941-1942

3.19.1. Sessione estiva

Problema 1

Nel trapezio ABCD di basi $\overline{\mathsf{AD}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$ ($\overline{\mathsf{AD}} > \overline{\mathsf{BC}}$), le lunghezze del lato obliquo $\overline{\mathsf{AB}}$ e della diagonale $\overline{\mathsf{AC}}$ sono rispettivamente l e kl. Si sa inoltre che, detto E il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati obliqui, l'altezza del triangolo ADE, relativa alla base $\overline{\mathsf{AD}}$, è doppia di quella del trapezio ed è uguale al lato obliquo $\overline{\mathsf{DC}}$. Determinare, analiticamente e geometricamente, gli elementi incogniti del trapezio e discutere.

Problema 2

Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e scritta l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per i punti $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 5)$, si determinino:

1. le coordinate dei punti A, B, intersezioni della parabola con la retta passante per il punto $\mathsf{P}(0, 2)$ e formante l'angolo α col semiasse positivo delle ascisse;
2. le equazioni delle tangenti alla parabola nei predetti punti A e B, l'angolo da esse compreso e le coordinate del loro punto comune C;
3. l'equazione della retta PC e l'angolo che essa forma con la retta AB;
4. le lunghezze dei due segmenti $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{PC}}$ e l'area del triangolo ABC;
5. l'area del segmento parabolico inscritto nel triangolo ABC.

3.19.2. Sessione autunnale

Problema

Internamente al quadrato ABCD, di lato a, trovare un punto P tale che la sua distanza dal vertice D sia doppia di quella dal vertice opposto B, e che risulti uguale a k il rapporto delle sue distanze dai due lati consecutivi $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{AD}}$. Discussione.

Il candidato ha la facoltà di risolvere e discutere la questione sia analiticamente, sia geometricamente.

3.19.3. Sessione straordinaria, gennaio 1943

Problema

Di un triangolo rettangolo ABC si conosce l'ipotenusa $|\overline{\mathsf{BC}}| = 2a$ e la somma ka della mediana relativa al cateto $\overline{\mathsf{AB}}$ con la metà del cateto stesso. Risolvere il triangolo assumendo come incognita l'angolo $\mathsf{A\hat{B}C}$. Discussione.

3.20. Anno scolastico 1942-1943

3.20.1. Sessione estiva

Problema

Di un triangolo rettangolo si conosce la misura b di un cateto e la misura d della differenza fra il triplo dell'ipotenusa e l'altro cateto. Determinare le misure dell'ipotenusa e del cateto incognito. Discussione.

3.21. Anno scolastico 1946-1947

3.21.1. Sessione estiva

Problema 1

In un sistema d'assi cartesiani ortogonali è dato il cerchio avente il centro nell'origine O degli assi e raggio $\sqrt{5}$. Determinare i valori dei parametri h e k in modo che le rette $x+2y-h=0$, $2x+y-k=0$ risultino tangenti al cerchio rispettivamente in A e B del 1° quadrante. Determinare inoltre le coordinate dei punti di contatto A e B e del punto C d'intersezione delle due tangenti. Determinare infine la tangente trigonometrica dell'angolo $\mathrm{B\widehat{O}A}$.

Problema 2

I due settori circolari consecutivi AOB, BOC del cerchio di centro O e raggio r, hanno ciascuno l'angolo al centro di ampiezza $\alpha \leq 45°$. Si determini l'angolo α in modo che sia k il rapporto fra il maggiore e il minore dei due solidi generati dai due settori dati, in una rotazione completa attorno alla retta OA. Si consideri il caso particolare $k = 1+\sqrt{2}$.

NB. Per la risoluzione del problema, il candidato può ricordare che se si ha un settore circolare AOB, ed H è la proiezione ortogonale di B su $\overline{\mathrm{OA}}$, il volume del solido generato dal settore in una rotazione completa attorno alla retta OA è dato da:

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

dove r ed h sono rispettivamente le misure di $\overline{\mathrm{OA}}$ ed $\overline{\mathrm{HA}}$.

3.21.2. Sessione autunnale

Problema 1

Dato il triangolo isoscele ABC la cui base $\overline{\mathrm{BC}}$ è $3a$ e il cui angolo $\mathrm{B\widehat{A}C}$ ha il coseno uguale a $7/25$, si indichino con B′, C′ i due punti situati il 1° sul lato $\overline{\mathrm{AB}}$ e il 2° sui prolungamento del lato $\overline{\mathrm{AC}}$ dalla parte di C, in modo che sia $|\overline{\mathrm{BB'}}| = |\overline{\mathrm{CC'}}| = a$. Determinare sulla base $\overline{\mathrm{BC}}$ un punto P in modo che la somma dei quadrati di $\overline{\mathrm{B'P}}$ e $\overline{\mathrm{PC'}}$ sia eguale a $2k^2a^2$.

Problema 2

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di origine O è data la parabola $y = 4-x^2$ che taglia l'asse x nei punti A e B, e l'asse delle ordinate nel punto V. É dato inoltre, sull'asse y, il punto C di ordinata 8.

1. Nell'equazione $y = mx+8$ [retta per C] determinare i due valori di m per i quali la retta è tangente alla parabola e verificare che i punti di contatto sono A e B.

2. Determinare su $\overline{OV}$ un punto Z di ordinata z tale, che tracciando per esso la parallela all'asse delle x, e dette D, E le intersezioni di essa con le tangenti già considerate, F ed H le intersezioni con la parabola, valga la relazione
$$\frac{|\overline{DE}|}{|\overline{FH}|} = k,$$
dove k è un numero positivo. Discussione.

3.22. Anno scolastico 1947-1948

3.22.1. Sessione estiva

Problema 1

In un cerchio di raggio r è condotta una corda $\overline{AB}$, la cui distanza dal centro è $r/2$. Iscrivere nel segmento circolare, che non contiene il centro, un triangolo ABC in modo che i lati $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ soddisfino la relazione:
$$2 \cdot |\overline{AC}| + 3 \cdot |\overline{BC}| = 2kr,$$
essendo k un numero positivo assegnato. Determinare l'angolo $C\widehat{A}B = x$, i lati $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e discutere il problema.

È in facoltà del candidato di considerare anche il caso che il triangolo sia inscritto nell'altro segmento circolare e di risolvere il problema per via geometrica.

Problema 2

La parabola di equazione
$$y = 2x - \frac{x^2}{2}$$
sega l'asse delle x, oltre che nell'origine O, in un punto A. I punti A, B, C, D, E, O, sono vertici consecutivi di un esagono convesso inscritto nel settore parabolico di base $\overline{OA}$, il quale ha la diagonale $\overline{EB}$ e il lato $\overline{CD}$ paralleli ad $\overline{OA}$ e le diagonali $\overline{OB}$ ed $\overline{EC}$ parallele fra loro e inclinate su $\overline{OA}$ di un angolo, la cui tangente trigonometrica è k.

1. Si determinino le coordinate dei vertici A, B, C, D, E e si stabilisca fra quali limiti può variare k;
2. si determini l'area dell'esagono OABCDE e si trovi il valore di k, per cui essa assume il valore massimo;
3. (facoltativo) il candidato può risolvere il quesito 1 nell'ipotesi che l'esagono sia intrecciato.

3.22.2. Sessione autunnale

Problema 1

Data una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$, determinare sul prolungamento di $\overline{AB}$, oltre B, un punto P tale che si abbia $|\overline{PT}|^2 + |\overline{TQ}|^2 = k \cdot |\overline{PA}|^2$, con k numero reale positivo, ove T è il punto di contatto di una delle tangenti condotte da P alla circonferenza e Q il punto d'intersezione di questa tangente con quella condotta in A alla circonferenza stessa. Discutere il problema.

Problema 2

In coordinate cartesiane ortogonali è data la parabola

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Condurre dall'origine delle coordinate una retta del primo quadrante, tale che dette A, B le intersezioni con la parabola e C, D le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x, il rapporto del trapezio ABCD e del quadrato di lato $\overline{CD}$ sia k, con k numero reale positivo. Discutere il problema.

3.23. Anno scolastico 1948-1949

3.23.1. Sessione estiva

Problema 1

Nel trapezio rettangolo convesso ABCD gli angoli di vertici A e D sono retti e l'angolo $A\widehat{C}B$ formato dalla diagonale $\overline{AC}$ e dal lato $\overline{CB}$ è di 30°. Determinare gli angoli del trapezio di vertici B e C, sapendo che la somma della base $\overline{CD}$ e del multiplo secondo il numero m dell'altezza $\overline{AD}$ ha con la base $\overline{AB}$ un rapporto k. Fissato un valore di m, in quali intervalli dovrà variare k, affinché il problema ammetta una o due soluzioni?

NB. Si consiglia di assumere come incognita l'angolo $C\widehat{A}B = x$.

Parte facoltativa:

1. Per quali valori di k la base $\overline{CD}$ risulta eguale, maggiore o minore della base $\overline{AB}$?
2. Risolvere la questione geometricamente.

Problema 2

Siano date, in un sistema d'assi cartesiani ortogonali, le parabole di equazioni $y = x^2 - 2x$, $y = 4x - x^2$. Considerate le rette, parallele agli assi, di equazione $x = a$, $y = b$, determinare a, b in modo che risultino massimi i segmenti $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ di tali rette appartenenti alla regione comune alla superficie delle due parabole e aventi estremi N, Q sulla prima ed M, P sulla seconda parabola. Determinare inoltre l'area della superficie comune alle due parabole.

Parte facoltativa: Denotati con R, S gli ulteriori punti d'intersezione della retta PQ con la prima e con la seconda parabola, dimostrare che le tangenti ad esse nei quattro punti R, P, Q, S determinano un parallelogramma. Dimostrare inoltre che il quadrilatero MPNQ è un rombo e che il punto comune alle diagonali del rombo coincide col punto comune alle diagonali del parallelogramma.

3.23.2. Sessione autunnale

Problema 1

In una data circonferenza di centro O, la corda $\overline{AB}$ è il lato del quadrato inscritto. Condotta dal punto B la semiretta tangente alla circonferenza che giace, rispetto alla retta AB, nel semipiano che contiene il centro O, determinare sulla semiretta un punto P tale che si abbia:

$$\frac{|\overline{BM}| + 2\sqrt{2} \cdot |\overline{MP}|}{|\overline{PB}|} = k,$$

ove M è l'ulteriore intersezione del segmento $\overline{\mathsf{AP}}$ con la circonferenza e k un numero reale positivo. Discutere il problema.

NB. Risolvere il problema per via trigonometrica.

Parte facoltativa:

1. Condotta in B l'intera tangente alla circonferenza e detto ABCD il quadrato inscritto, determinare le parti della tangente descritte dal punto P quando il punto M percorre gli archi $\widehat{\mathsf{BC}}$, $\widehat{\mathsf{CD}}$, $\widehat{\mathsf{DA}}$, $\widehat{\mathsf{AB}}$ e i limiti di k al tendere di M ai vertici B, C, D, A.
2. Risolvere il problema per via geometrica.

Problema 2

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, dimostrare che fra le parabole, la cui equazione ha la forma $y = ax^2 + bx + c$,

1. due (e due soltanto) passano per i punti: A, di coordinate
$$\left(0, \frac{1}{4}\right),$$
B, di coordinate
$$\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}\right),$$
e sono tangenti all'asse delle x.
2. Scrivere le equazioni delle tangenti alle due parabole nel punto A e determinare l'angolo da esse formato.
3. Condotta una retta (parallela all'asse x) di equazione $y = k$, dette M, N le intersezioni di essa con una delle parabole considerate e fissato un punto P di ordinata $p > 0$, determinare il massimo dell'area del triangolo MNP al variare di k nell'intervallo $(0, p)$, estremi esclusi.

Parte facoltativa:

1. Scrivere le equazioni delle tangenti alle due parabole nel punto B e determinarne l'angolo.
2. Dimostrare che i punti A, C, C', A' ove C, A' sono le intersezioni con l'asse delle x rispettivamente delle tangenti in A e in B alla parabola di vertice di ascissa positiva, e C' l'intersezione di quest'ultima tangente con quella condotta in A all'altra parabola, sono vertici di un trapezio isoscele.

3.24. Anno scolastico 1949-1950

3.24.1. Sessione estiva

Problema 1

In un trapezio convesso isoscele le diagonali, di lunghezza d, sono perpendicolari ai lati obliqui. Si determinino i lati del trapezio sapendo che la somma dei loro quadrati è equivalente ad un quadrato il cui lato ha lunghezza nota m. Discussione: É facoltativa la risoluzione geometrica.

Problema 2

Le semirette a, b, c, di origine comune O sono complanari. La semiretta a forma con la semiretta b un angolo di 60°, è interna all'angolo convesso limitato dalle altre due ed è tale che la proiezione ortogonale di un qualunque suo punto sulla retta a cui appartiene c cade sulla semiretta c. Fissato sulla semiretta a il segmento unitario $\overline{\mathsf{OA}'}$, siano B e C rispettivamente le proiezioni ortogonali di A su b e c. Determinare l'angolo x delle semirette a e c sapendo che il triangolo BOC è equivalente ad un triangolo di base $\overline{\mathsf{OA}}$ e altezza relativa uguale ad un segmento di lunghezza data k. Discussione. É facoltativa la risoluzione geometrica.

3.24.2. Sessione autunnale

Problema 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio, Determinare i lati del trapezio e il raggio del cerchio sapendo che il trapezio è equivalente al quadrato di lato $a\sqrt{2}$ e che il rapporto fra i volumi dei solidi della sfera e del tronco di cono, che si ottengono facendo compiere una mezza rotazione al cerchio e al trapezio intorno al diametro perpendicolare alle basi del trapezio, è uguale al numero reale e positivo k. Discutere il problema.

Problema 2

Dato un settore circolare in cui l'angolo al centro $\mathsf{A\hat{O}B}$ è di 120° ed il raggio è di lunghezza r, determinare l'angolo $\mathsf{A\hat{O}C} = 2x$, ove C è un punto dell'arco $\widehat{\mathsf{AB}}$, tale che il rapporto fra i perimetri dei triangoli AOC e COB sia k. Discutere il problema.

3.25. Anno scolastico 1950-1951

3.25.1. Sessione estiva

Problema 1

Nel triangolo ABC l'angolo di vertice B è di 60°. Trovare l'ampiezza x dell'angolo $\mathsf{B\hat{A}C}$ sapendo che $k/4$ è la misura, rispetto a $\overline{\mathsf{BC}}$, dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti due segmenti rispettivamente eguali ad $\overline{\mathsf{AC}}$ e alla proiezione $\overline{\mathsf{BH}}$ di $\overline{\mathsf{BA}}$ su $\overline{\mathsf{BC}}$. Discutere i risultati, tenendo presenti i casi particolari: $x = 30°$, $x = 60°$, $x = 90°$. É facoltativa la risoluzione geometrica.

Problema 2

Fissato in un piano un sistema di coordinate ortogonali $\mathsf{O}xy$, si considerino le infinite parabole di equazione:

$$y = x^2 + px + q$$

dipendente dai due parametri p e q. Si esprima q per mezzo di p, in maniera che delle anzidette parabole siano considerate soltanto quelle i cui vertici appartengono alla parabola di equazione:

$$y = -x^3 + 2x + 2$$

Si determinino le equazioni delle rette passanti per l'origine O degli assi e tangenti ad una delle anzidette parabole e si trovi, in funzione di p, la lunghezza della corda dei punti di contatto. Quali sono le parabole per cui si ha la massima o la minima corda?

3.25.2. Sessione autunnale

Problema 1

Il triangolo rettangolo AOB ha i cateti $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ di lunghezza 2 e $\sqrt{3}$, rispettivamente. Determinare sull'ipotenusa $\overline{AB}$ un punto P in modo che sia k la somma della sua distanza dal cateto $\overline{OA}$ e del doppio della sua distanza dal punto medio M del cateto $\overline{OB}$. Discussione. É facoltativa la risoluzione geometrica.

Problema 2

In un piano in cui è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy sono dati i due punti $A(a,0)$, $B(0,2a)$. Scrivere l'equazione della parabola di vertice A, tangente in A all'asse delle x e passante per B. Trovare i punti P, dell'arco AB di parabola, le cui distanze dagli assi coordinati abbiano per somma un segmento di lunghezza ka. É facoltativo determinare i punti P geometricamente.

3.26. Anno scolastico 1951-1952

3.26.1. Sessione estiva

Problema 1

Il punto O è l'ortocentro del triangolo ABC del quale sono assegnati l'angolo $B\widehat{A}C$ di ampiezza α, il segmento $\overline{AO}$ di lunghezza s. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo $C\widehat{A}O$, si esprimano per mezzo di s, α, x le lunghezze dei tre lati del triangolo e quelle dei segmenti $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Supposto che l'angolo α abbia il coseno eguale a 1/3, si determini l'angolo x in modo che si abbia:

$$2\cdot|\overline{OB}|+3\cdot|\overline{OC}|=k\cdot|\overline{BC}|$$

essendo k un numero reale positivo dato. Nella discussione il candidato può limitarsi a considerare il solo caso del triangolo ABC acutangolo. È facoltativa la risoluzione geometrica.

Problema 2

È dato un triangolo ABC, del quale si conoscono: il lato $\overline{BC}$ di lunghezza a e gli angoli di vertici B e C di ampiezza 60° e 45° rispettivamente. Condotta per il vertice A una retta r non secante il triangolo, si consideri il solido ottenuto mediante una rotazione completa del triangolo attorno ad r. Si trovi il volume V del solido in funzione dell'angolo x che una delle semirette di r, di origine A, forma col lato $\overline{AB}$; indi si verifichi l'esattezza dell'espressione di V considerando qualche posizione particolarmente notevole della retta r (per esempio: r parallela a $\overline{BC}$). Per quali valori di x il volume V assume il valore massimo o minimo? In questi casi estremi, qual è l'angolo che la retta r forma con la mediana $\overline{AM}$, relativa al lato $\overline{BC}$?

3.26.2. Sessione autunnale

Problema

Quattro triangoli isosceli eguali e complanari hanno come basi i lati di un quadrato; non hanno punti in comune ed inoltre sono o tutti esterni o tutti interni al quadrato: essi, con i loro lati eguali, determinano un ottagono equilatero. Si sa che sono eguali al segmento a i quattro segmenti ciascuno dei quali congiunge il punto medio della base di uno dei triangoli e il baricentro del triangolo non contiguo; e si sa altresì che l'ottagono prodotto è equivalente a un quadrato il cui lato ha, rispetto ad a, la misura data k. Trovare base e altezza dei quattro triangoli. Discutere distinguendo il caso dell'ottagono convesso regolare o no, da quello dell'ottagono concavo, nonché il caso che l'ottagono possa essere considerato come lo sviluppo piano di una piramide regolare.

3.27. Anno scolastico 1952-1953

3.27.1. Sessione estiva

Problema

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x^2 = kx + (k-1)y + (1-k) \\ y^2 = -kx + (1-k)y + k \end{cases}$$

tenendo presente che, qualunque sia il valore del parametro k, ammette la soluzione $x = 1$, $y = 0$. Determinare poi per quali valori del parametro i valori x, y delle soluzioni risultano reali e concordi oppure reali e discordi. Nel caso particolare di $k = 1/2$, interpretando x ed y come coordinate cartesiane di un punto del piano, si disegnino i grafici delle due equazioni del sistema.

Facoltativamente, nel predetto caso di $k = 1/2$, si calcoli l'area di una qualunque delle regioni finite del primo quadrante, determinato dalle due curve.

3.27.2. Sessione autunnale

Problema

È data la parabola di equazione:

$$ay = x^2 - a^2$$

della quale siano: A il punto di ordinata nulla e ascissa negativa, e B quello di ordinata nulla e ascissa positiva. Condotta per il punto A una retta di coefficiente angolare m, si indichino: con C l'altra sua intersezione con la parabola e con D la proiezione ortogonale di C sull'asse delle x. Determinare la retta in maniera che:

1. l'area del triangolo ACD sia ha^2m^2, con $h > 0$;
2. l'area della regione limitata dall'asse delle x, dalla retta AC e dall'arco BC di parabola sia ka^2m^2, con $k > 0$.

3.28. Anno scolastico 1953-1954

3.28.1. Sessione estiva

Problema

Nel triangolo ABC, rettangolo in B, l'angolo acuto $\widehat{BAC}$ ha l'ampiezza nota α. Considerata la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$, esterna al triangolo, si trovi su di essa un punto P in modo che, condotta per P la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare l'ipotenusa $\overline{AC}$ nel punto Q, risulti:

$$|\overline{AQ}| + |\overline{QP}| = k \cdot |\overline{AP}|,$$

essendo k un numero reale e positivo assegnato. Discussione. Si esaminino i casi particolari in cui si abbia: $\overline{\mathsf{AC}} = 2 \cdot \overline{\mathsf{BC}}$; $\overline{\mathsf{AC}} = 2 \cdot \overline{\mathsf{AB}}$; $\overline{\mathsf{AB}} = \overline{\mathsf{BC}}$.

3.28.2. Sessione autunnale

Problema

Una semicirconferenza ha il diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ di lunghezza $2R$; nel semipiano che la contiene sia dato sulla tangente in A il punto M tale che $\overline{\mathsf{AM}}$ abbia lunghezza $4R$. Determinare sulla semicirconferenza i punti P per i quali sussista la relazione:

$$|\overline{\mathsf{MP}}| = |\overline{\mathsf{AP}}| + k \cdot |\overline{\mathsf{BP}}|$$

essendo k un numero reale assegnato. Discussione. É in facoltà del candidato di generalizzare il problema supponendo che il segmento $\overline{\mathsf{AM}}$ abbia lunghezza mR, essendo m positivo.

NB. Si consiglia di assumere per incognita l'angolo $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{P}$.

3.29. Anno scolastico 1954-1955

3.29.1. Sessione estiva

Problema

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani $\mathsf{O}xy$, sono date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ e le rette di equazione

$$y = -\frac{r\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Tali rette incontrano la circonferenza rispettivamente nei punti A, B e C, D. Si determini sul segmento $\overline{\mathsf{CD}}$ un punto P tale che risulti:

$$|\overline{\mathsf{PA}}|^2 + |\overline{\mathsf{PB}}|^2 = k \cdot |\overline{\mathsf{AB}}|^2$$

essendo k un numero positivo. Discussione.

(Facoltativo). Si risolva geometricamente il problema.

3.29.2. Sessione autunnale

Problema

Siano dati l'angolo $\mathsf{M}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{N}$ di $150°$ ed il punto A della semiretta opposta al lato OM, tale che $|\overline{\mathsf{OA}}| = l$. Trovare un punto P interno all'angolo dato, in modo che, indicata con Q la sua proiezione ortogonale sulla retta MA, si abbiano le relazioni:

$$|\overline{\mathsf{OA}}| + 2 \cdot |\overline{\mathsf{OQ}}| = 2\sqrt{3}|\overline{\mathsf{PQ}}| \qquad , \qquad |\overline{\mathsf{OP}}|^2 + |\overline{\mathsf{AP}}|^2 = k \cdot |\overline{\mathsf{OA}}|^2$$

con k numero reale positivo. È in facoltà del candidato trattare il problema per via geometrica.

3.30. Anno scolastico 1955-1956

3.30.1. Sessione estiva

Problema

Siano date le due curve:

$$C_1, \quad \text{di equazione} \quad y = -\frac{x^2 - a}{2} \qquad , \qquad C_2, \quad \text{di equazione} \quad y = \frac{b}{x}.$$

Si determini la relazione che deve sussistere fra a e b affinché le due curve si incontrino in un punto P_1, del primo quadrante, avente per ascissa 2. Indicate con P_2 e P_3 le ulteriori intersezioni delle due curve e condotte per essi le tangenti alla C_2, si denotino con T_2 e T_3 i punti di tali tangenti che hanno ordinata nulla e se ne calcolino le ascisse. Si determini infine a in modo che la distanza fra T_2 e T_3 sia $4k(a-2)$, essendo k un numero positivo dato.

Parte facoltativa: condotte da P_2 e P_3 le parallele all'asse x, si calcoli l'area della regione comune alla striscia da esse determinata e alla curva C_1.

3.30.2. Sessione autunnale

Problema

Sia $\overline{\mathsf{CD}}$ una corda di una data semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{\mathsf{AB}}$, e sia E il punto comune ai prolungamenti delle corde $\overline{\mathsf{AC}}$ e $\overline{\mathsf{BD}}$. Sapendo che il rapporto fra $\overline{\mathsf{CD}}$ e $\overline{\mathsf{AB}}$ è $7/25$, si determini l'angolo $\mathsf{O}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{C}$ eguale ad x (oppure l'angolo $\mathsf{O}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{D} = y$) in modo che abbia luogo la relazione:

$$\frac{|\overline{\mathsf{AE}}|}{|\overline{\mathsf{AB}}|} + \frac{13}{25} \cdot \frac{|\overline{\mathsf{BE}}|}{|\overline{\mathsf{AB}}|} = k$$

essendo k un numero positivo assegnato.

NB. Si osservi che i due triangoli ECD e EAB sono simili. Si consiglia poi di indicare con 2α l'angolo $\mathsf{C}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{D}$ e di calcolare preliminarmente i valori delle funzioni trigonometriche dell'angolo α. Facoltativamente il candidato può trattare il caso più generale in cui al rapporto $13/25$ sia sostituito un secondo parametro m.

3.31. Anno scolastico 1956-1957

3.31.1. Sessione estiva

Problema

È data una circonferenza di centro O e raggio r, della quale sia $\overline{\mathsf{AB}}$ una corda il cui punto medio è H. Determinare la lunghezza $2x$ di tale corda in modo che risulti

$$2 \cdot |\overline{\mathsf{AB}}| + 3 \cdot |\overline{\mathsf{OH}}| = kr$$

con k numero positivo dato. Successivamente, fissata una corda $\overline{\mathsf{AB}}$ che soddisfi la precedente condizione si determini sulla circonferenza un punto C in modo che si abbia:

$$|\overline{\mathsf{AC}}|^2 + |\overline{\mathsf{BC}}|^2 = m \cdot |\overline{\mathsf{AB}}|^2$$

essendo m un numero positivo.

NB. Si assuma come incognita l'angolo $\widehat{CAB}$ e si tenga presente che l'angolo $\widehat{ACB}$, una volta fissata la corda $\overline{AB}$, è da considerarsi noto.

3.31.2. Sessione autunnale

Problema

Discutere la realtà e il segno delle radici dell'equazione:

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + (m-2) = 0. \tag{1}$$

Ricavando poi dalla (1) il parametro m in funzione della x, si studi tale funzione, determinandone, fra l'altro, gli eventuali valori massimi o minimi. Successivamente, posto:

$$y = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + (m-2) \tag{2}$$

si risolva il sistema che si ottiene attribuendo ad m i valori particolari $m = 0$, $m = -2$, e si mostri che la soluzione così ottenuta soddisfa la (2) qualunque sia il valore di m. Disegnate le due parabole corrispondenti ai predetti valori particolari del parametro m, si verifichi:

1. che le due parabole si toccano nel loro punto comune;
2. che una qualunque retta passante per tale punto stacca sulle due parabole corde eguali.

3.32. Anno scolastico 1957-1958

3.32.1. Sessione estiva

Problema

Siano date le due parabole di equazioni:

$$y = 2x^2 + x - 1, \tag{1}$$

$$y = x2 + 3x + 2. \tag{2}$$

Detto $A(-1,0)$ il punto che esse hanno in comune e considerata una retta r passante per A e non parallela all'asse delle ordinate, siano:

— B l'ulteriore punto d'intersezione di r con la parabola (1);

— C l'ulteriore punto d'intersezione di r con la parabola (2);

— D il punto d'intersezione di r con l'asse delle ordinate.

Si determini il coefficiente angolare m di r in guisa che risulti:

$$\frac{1}{|\overline{AB}|} - \frac{1}{|\overline{AC}|} = \frac{k}{|\overline{AD}|}$$

essendo k un numero reale assegnato.

Nel caso di k positivo, si determini l'eventuale massimo di k al variare di m.

3.32.2. Sessione autunnale

Problema

É dato il trapezio ABCD rettangolo in A e in D, avente le basi $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e l'altezza $\overline{AD}$ rispettivamente eguali a $5a$, $4a$, $2a$. Se con P si denota un punto interno al trapezio, di cui H e K sono le proiezioni ortogonali su $\overline{BC}$ e su $\overline{AD}$, si trovi P in guisa che siano soddisfatte le due condizioni:

$$|\overline{PH}| : |\overline{PK}| = |\overline{AD}| : |\overline{BC}| \quad \text{e} \quad |\overline{AP}|^2 + |\overline{DP}|^2 = ka^2,$$

essendo k un numero positivo dato.

3.33. Anno scolastico 1958-1959

3.33.1. Sessione estiva

Problema

Il triangolo ABC ha i lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ di lunghezza 5 e 4 rispettivamente e l'angolo tra essi compreso è di 60°. Detta $\overline{AS}$ la bisettrice interna dell'angolo di vertice A, si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso è diviso dal punto S e successivamente si determini il coseno dell'angolo in B e quindi la lunghezza della bisettrice $\overline{AS}$. Ciò fatto, si trovi sul segmento $\overline{AS}$ un punto P tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai tre vertici del triangolo dato sia equivalente ad un quadrato di lato k. Discussione. Facoltativamente si risolva il problema per via geometrica.

3.33.2. Sessione autunnale

Problema

Riferiti i punti di un piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si disegni la parabola di equazione:

$$y = x^2 - 4x + 3 \tag{1}$$

e si scriva l'equazione della tangente ad essa nel punto d'intersezione con l'asse delle y. Successivamente:

1. Segata la (1) con una retta generica di equazione $y = h$, si dimostri analiticamente (o geometricamente) che le tangenti alla parabola nei punti d'intersezione con la retta considerata s'incontrano in punti aventi tutti la stessa ascissa.
2. Si determini poi h in guisa che l'intersezione fra le due tangenti abbia ordinata —4.
3. Segata infine la parabola di equazione (1) con una retta generica parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, si discutano i segni delle ascisse delle intersezioni, nel caso che queste risultino reali.

3.34. Anno scolastico 1959-1960

3.34.1. Sessione estiva

Problema

È dato il trapezio ABCD, rettangolo in A e in D, nel quale la base maggiore $\overline{AB}$, la base minore $\overline{DC}$ e l'altezza $\overline{AD}$ hanno rispettivamente le lunghezze $2b$, b, h. Si determini su $\overline{AD}$ un punto P in guisa che

$\overline{BC}$ risulti ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti rispettivamente eguali a $\overline{CP}$ e alla metà di $\overline{BP}$. È facoltativa la risoluzione geometrica.

3.34.2. Sessione autunnale

Problema

In un piano, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, si considerino le curve di equazione:

$$y = a^2x^3 - 3a(2a-3)x^2 + 9(a-1)(a-3)x + b$$

essendo a e b due parametri, determinando quelle particolari curve per le quali il punto di minimo e il punto di massimo hanno le ordinate rispettivamente eguali a 0 e a 1.

Trovate le ascisse dei punti di minimo e di massimo e quelle degli altri punti di queste particolari curve che appartengono alle rette di equazioni $y = 0$ e $y = 1$, si calcolino, per ciascuna curva, le aree delle regioni finite delimitate dalla curva e dalle rette di cui sopra.

Limitatamente ad una delle curve particolari, si scriva l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle y, che passa per il punto di massimo della curva e per i due suoi punti di ordinata nulla, e si calcoli l'area della regione parabolica i cui punti hanno ordinata positiva e non maggiore di quella del predetto punto di massimo.

3.35. Anno scolastico 1960-1961

3.35.1. Sessione estiva

Problema

Indicato con $\overline{VV'}$ un diametro di una sfera di centro $\overline{O}$ e raggio r, si considerino i seguenti quattro coni:

1. il cono di vertice O, asse $\overline{OV'}$ e base tangente alla sfera;
2. il cono opposto al vertice del precedente, avente la circonferenza di base sulla superficie sferica;
3. il cono di vertice V, asse $\overline{VV'}$, apertura metà di quelle dei due coni precedenti, ed inscritto nella sfera;
4. il cono di vertice V′, inscritto nella sfera, e avente la stessa base di quella del terzo cono.

Dopo di ciò, indicando con V_1, V_2, V_3, V_4 rispettivamente i volumi dei quattro coni, si determini l'angolo di apertura del primo cono in guisa che sia soddisfatta la relazione:

$$\frac{V_1 - V_2}{V_4} - (k-3)\frac{V_1 + V_2}{V_3} = 2k,$$

essendo k un numero reale dato. Discussione.

3.35.2. Sessione autunnale

Problema

Data una sfera di centro O e raggio r, si conduca un piano secante non passante per il centro e si indichino:

— con S l'area della superficie della sfera;

— con S_1 l'area della calotta maggiore che così si ottiene;

— con S_2 l'area della superficie laterale del cono avente per base il cerchio sezione così ottenuto e le generatrici tangenti alla sfera.

Si determini la distanza del piano secante dal centro O in modo che si abbia:

$$S_2 + kS_1 = 2S$$

con k numero positivo dato. Esprimendo poi k in funzione della distanza del piano secante dal centro della sfera, si studi l'andamento della funzione.

3.36. Anno scolastico 1961-1962

3.36.1. Sessione estiva

Problema

Si considerino due circonferenze complanari tangenti internamente in un punto S, una di centro O e raggio unitario e l'altra di centro O′ e raggio k. Si indichi poi:

— con $\overline{SM}$ una corda della circonferenza di centro O, formante l'angolo x con $\overline{SO}$, e con $\overline{SA}$, $\overline{SA'}$ le corde delle due circonferenze di centri O e O′, appartenenti alla bisettrice dell'angolo $O\widehat{S}M$;

— con $\overline{SQ}$ la corda della circonferenza di centro O′, perpendicolare ad $\overline{SM}$, e con $\overline{SB}$, $\overline{SB'}$ le corde delle due circonferenze di centri O e O′, appartenenti alla perpendicolare a $\overline{SA}$.

Successivamente:

1. si determini l'angolo x in guisa che risulti:

$$\frac{|\overline{AB'}|^2 - |\overline{A'B}|^2}{|\overline{SQ}|^2} = 2 - 3k^2\,;$$

2. si calcoli, nell'ipotesi di k costante, il massimo di $|\overline{SM}| + |\overline{SQ}|$;
3. (facoltativo) si studi la variazione della funzione:

$$f(x) = |\overline{SM}|^2 + |\overline{SQ}|^2.$$

3.36.2. Sessione autunnale

Problema

Sia dato il triangolo ABC i cui lati misurano:

$$|\overline{AB}| = 13 \qquad , \qquad |\overline{BC}| = 14 \qquad , \qquad |\overline{CA}| = 15,$$

e si consideri la circonferenza inscritta in esso.

Determinare una parallela r al lato $\overline{BC}$ in guisa che, dette $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ le corde che su r staccano rispettivamente il triangolo e la circonferenza, si abbia:

$$|\overline{PQ}| + \frac{6}{7}|\overline{MN}| = s$$

essendo s un numero positivo assegnato.

Facoltativamente, si distinguano i casi in cui s risulta maggiore o minore della misura dell'altezza $\overline{AH}$ relativa al lato $\overline{BC}$.

NB. Si consiglia di prendere per incognita la distanza tra le rette r e BC.

3.37. Anno scolastico 1962-1963

3.37.1. Sessione estiva

Problema

Segare una sfera di raggio r con un piano in maniera che la somma delle aree della maggiore delle due calotte così ottenute e della superficie laterale del cono tangente alla sfera e avente per base il cerchio sezione stia nel rapporto k con l'area della sezione. Discussione.

Successivamente si studi la variazione del predetto rapporto k in funzione della distanza del piano secante dal centro e, disegnato il grafico relativo, si ritrovino i risultati ottenuti con la discussione algebrica.

3.37.2. Sessione autunnale

Problema

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, sono date due parabole con gli assi perpendicolari all'asse delle x, i cui vertici siano allineati con l'origine O e abbiano le ordinate rispettivamente eguali a 1 e 3. Si sa inoltre che le due curve hanno in comune il punto $A(0,2)$. Assunto come parametro k l'ascissa del vertice di ordinata minore, si scrivano le equazioni delle due curve e si esprimano per mezzo di k le coordinate del loro secondo punto d'incontro; indi si determini l'area della regione limitata dalle due curve. Infine si trovino, tra le corde della regione considerata, che siano parallele all'asse delle y:

1. quella di lunghezza massima;
2. quella che con il punto A individua il triangolo di area massima.

3.38. Anno scolastico 1963-1964

3.38.1. Sessione estiva

Problema

Internamente al diametro $\overline{AB}$ di una sfera di raggio r si determinino i punti M ed N in modo che sia $|\overline{NB}| = r - 2 \cdot |\overline{AM}|$ e che il rapporto fra l'area della zona sferica compresa fra i due piani perpendicolari al diametro $\overline{AB}$ nei punti M ed N e la somma delle aree dei cerchi d'intersezione dei detti piani con la sfera sia eguale ad un numero k assegnato. Discussione.

Dire per quale posizione di M la somma dei volumi dei due coni, di vertice il centro della sfera e di basi i cerchi già considerati, risulti massima.

3.38.2. Sessione autunnale

Problema

É dato un triangolo ACB, rettangolo in C, nel quale il cateto minore $\overline{\mathsf{CA}}$ è lungo a e l'altro è lungo a/m. Determinare sull'ipotenusa un punto P in modo che, detta Q la sua proiezione ortogonale su $\overline{\mathsf{CA}}$, si abbia:

$$|\overline{\mathsf{CP}}| + |\overline{\mathsf{PQ}}| = ka,$$

essendo k un numero positivo dato. Si discuta il problema rispetto al parametro k.

Facoltativo. Il candidato può anche esaminare il caso $m > 1$, sotto la quale ipotesi $\overline{\mathsf{CA}}$ non risulta più il cateto minore.

3.39. Anno scolastico 1964-1965

3.39.1. Sessione estiva

Problema

Nel triangolo ABC, la proiezione $\overline{\mathsf{HC}}$ del lato $\overline{\mathsf{AC}}$ sulla retta BC è tripla della proiezione $\overline{\mathsf{HB}}$ del lato $\overline{\mathsf{AB}}$ sulla stessa retta BC. Posto $|\overline{\mathsf{AH}}| = h$, $|\overline{\mathsf{BC}}| = x$, $\tan \mathsf{B\widehat{A}C} = y$:

1. si trovi la relazione che sussiste tra x e y, considerando separatamente i casi in cui H risulti esterno o interno al segmento $\overline{\mathsf{BC}}$;
2. nel caso in cui H sia esterno al segmento $\overline{\mathsf{BC}}$, si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione precedente e se ne studi l'andamento;
3. si risolvano graficamente i problemi di costruzione del triangolo ABC dati due dei tre elementi $\overline{\mathsf{BC}}$, $\overline{\mathsf{AH}}$, $\mathsf{B\widehat{A}C}$.

Facoltativamente:

4. nel caso di H esterno al segmento $\overline{\mathsf{BC}}$, supposto $h = 1/2$, si calcoli l'area della superficie compresa tra la curva e la sua corda passante per i punti di ascissa

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

5. nel caso di H interno al segmento $\overline{\mathsf{BC}}$, supposto $h = 4$, si rappresenti graficamente la funzione $y(x)$ dedotta dalla relazione di cui al n.1.

3.39.2. Sessione autunnale

Problema

In un riferimento cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ è data la curva di equazione:

$$y = \frac{2mx+1}{mx-2} \tag{1}$$

essendo m una costante reale.

1. Ricercare per quale traslazione degli assi l'equazione (1) assume la forma $XY = k$;
2. trovare le coordinate x, y dei punti M, N comuni alla curva e alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, individuati dagli assi Ox, Oy, e determinare la lunghezza del segmento $\overline{MN}$;
3. verificare che, per qualsiasi valore del parametro m, tutte le curve di equazione (1) hanno in comune un medesimo punto C, e determinare poi l'area del triangolo MNC;
4. dire per quali valori di m le rette di equazioni:
$$y = \frac{mx - 2}{m} \qquad , \qquad y = \frac{mx - 2}{2m}$$
risultano tangenti alla corrispondente curva di equazione (1) e determinare le coordinate dei punti di contatto R, S, nonché la lunghezza del segmento $\overline{RS}$.
5. (Facoltativo). Fatta ruotare la curva di equazione (1) di un angolo giro attorno alla retta di equazione $y = 2$, si determini il volume del solido limitato dalla superficie che così si ottiene e dai piani perpendicolari all'asse delle x, passanti per i punti
$$x_0 = \frac{2 + \sqrt{5}}{m} \quad \text{ed} \quad x_1 > x_0,$$
nell'ipotesi di m positivo.

3.40. Anno scolastico 1965-1966

3.40.1. Sessione estiva

Problema

In un piano, sul quale è fissato un sistema cartesiano ortogonale Oxy, sono dati i punti $A(0,1)$, $B(b,0)$. Si determini sull'asse x un punto C tale che risulti
$$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{4}{3}.$$
Discussione.

Successivamente si generalizzi la questione supponendo che il predetto rapporto sia eguale ad un numero positivo assegnato k. Ottenuta l'equazione in x che risolve il problema, si ponga $x = X$, $k^2 = Y$; si esprima Y in funzione di X e si studi l'andamento della funzione $Y(X)$, distinguendo i casi $b > 1, b < 1, b = 1$. Infine si utilizzi il grafico di tale funzione per determinare i valori di X corrispondenti ad un assegnato valore di k.

(Facoltativamente). Si ritrovino i risultati precedenti per via sintetica, considerando il punto C come intersezione della retta x con il luogo geometrico dei punti P del piano le cui distanze $\overline{BP}$ e $\overline{AP}$ da B e da A stiano nel rapporto k.

3.40.2. Sessione autunnale

Problema

In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy sono date le curve di equazione:

$$x^2+y^2-2mx+m^2(1-m)=0, \tag{1}$$

$$2mx-y^2-2m^2(1-\sqrt{m})=0, \tag{2}$$

con m positivo.

1. Considerata una retta di equazione $y=hx$, si determini la relazione tra h e m sotto la quale tale retta risulta tangente alla curva di equazione (1). Analoga questione si risolva per la curva di equazione (2).
2. Successivamente si determinino h ed m in guisa che la stessa retta risulti tangente comune alle due curve. In tal caso si calcolino le coordinate dei punti di contatto e si trovi l'area del quadrilatero convesso da essi individuato.
3. Nel caso particolare di $m=4$ si calcoli l'area della regione finita limitata dalle curve di equazioni (1) e (2).

3.41. Anno scolastico 1966-1967

3.41.1. Sessione estiva

Problema

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si considerino le parabole di equazione:

$$y=mx^2+x+3-4m$$

essendo m un parametro diverso da zero.

1. Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola di equazione (1), in funzione del parametro m. Successivamente, eliminando m fra le due relazioni così trovate, si studi la curva di equazione $y=f(x)$ che così si ottiene (luogo dei vertici delle parabole) e in particolare si trovino i punti A e B in cui la funzione $f(x)$ ha rispettivamente un massimo e un minimo relativo.
2. Si verifichi che tutte le parabole considerate passano per i punti A e B e si dia una giustificazione di ciò.
3. Fra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice o A oppure B e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento $\overline{AB}$.
4. Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto 3.

3.41.2. Sessione autunnale

Problema

Determinare la relazione che deve sussistere tra i parametri positivi h e m affinché una delle radici dell'equazione:

$$x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$$

risulti doppia dell'altra.

Nel caso di $m = \sqrt{2}$, dalla relazione così trovata si determini il valore di h e si studi la parabola di equazione:

$$y = x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2$$

dove m e h hanno i predetti valori particolari.

Considerata poi la retta di equazione $y = -3/4$ e detti A e B i suoi punti d'intersezione con la parabola, si scriva l'equazione della circonferenza passante per essi e ivi tangente alla parabola stessa.

Si verifichi, infine, che detto C il centro di questa circonferenza, l'angolo $\widehat{ACB}$ è retto.

3.42. Anno scolastico 1967-1968

3.42.1. Sessione estiva

Problema

Sia ABC un triangolo equilatero di lato a ed E un punto generico del lato $\overline{AC}$. Condotta per E la parallela ad $\overline{AB}$ ed indicata con F la sua intersezione con $\overline{BC}$, si denoti con D il punto del prolungamento di $\overline{EF}$, dalla parte di F, tale che sia

$$|\overline{FD}| = \frac{1}{2}|\overline{EF}|.$$

Si determini il punto E in guisa che abbia luogo la relazione:

$$|\overline{MD}|^2 + |\overline{BD}|^2 = ka^2$$

essendo M il punto medio di $\overline{AB}$ e k un numero reale dato.

Si accerti poi per quali valori di k il trapezio ABDE risulta: 1) rettangolo; 2) isoscele; 3) un parallelogramma.

Facoltativo. Si generalizzi la questione supponendo che il punto E stia sulla retta AC, nel qual caso si consiglia di ricorrere ai luoghi geometrici ai quali appartiene il punto D per soddisfare alle condizioni assegnate.

3.42.2. Sessione autunnale

Problema

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale, siano dati un punto $P(k,h)$ ed una retta r passante per il punto $A(-1,0)$. Si scriva l'equazione della circonferenza di centro P e passante per l'origine del sistema di riferimento e si determinino poi le coordinate dei punti P per i quali la circonferenza risulta tangente ad una prefissata retta r e successivamente si esaminino i casi particolari in cui il coefficiente angolare della retta r sia eguale ad 1, oppure a 0, o tenda all'infinito.

3.43. Anno scolastico 1968-1969

3.43.1. Sessione unica

Problema

Le lunghezze dei lati $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ del triangolo ABC sono rispettivamente $2a$, $s-x$, $s+x$, essendo s e a elementi dati. Si esprimano per mezzo dei dati e di x l'area del triangolo e il raggio R del cerchio ad esso circoscritto. Indi, si studi l'andamento della funzione $R^2(x)$, indicando in particolare gli intervalli nei quali essa è crescente o decrescente.

Nota. Si ricordi che la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è un quarto del rapporto fra il prodotto delle lunghezze dei lati e l'area.

3.44. Anno scolastico 1969-1970

3.44.1. Sessione ordinaria

Problema

Verificare che le due curve piane, grafici cartesiani delle funzioni:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

$$y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

hanno due punti in comune.

Indicare l'andamento dei predetti grafici cercandone in particolare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi. Determinare l'area della regione piana limitata dai due archi dei grafici aventi per estremi i due punti comuni. Considerate poi le tangenti ai due grafici nei punti comuni, calcolare l'area del quadrilatero convesso da esse determinato.

3.44.2. Sessione supplementare

Problema

Si trovino i coefficienti della funzione:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

sapendo che:

1. essa si annulla per $x = 0$;
2. la sua derivata prima si annulla per $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$;
3. il suo grafico, in un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, ha, nel punto di ascissa $x = -1$, la tangente parallela alla retta di equazione $y = -x$.

Si descriva l'andamento del grafico.

Infine, si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$.

3.45. Anno scolastico 1970-1971

3.45.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti. Tempo concesso: 5 ore.

1. É dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $\mathsf{O}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{B}$ e posto
$$\tan\frac{x}{2}=t,$$
si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo e si studi l'andamento della funzione di t così ottenuta.
2. Fra i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio assegnato, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.
3. Si studi il grafico della funzione
$$y=2\sin x+\sin 2x$$
nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.
4. Considerata la generica parabola di equazione:
$$x=ay^2+by+c,$$
si determinino i coefficienti a, b e c in modo che essa passi per i punti $(-6,0)$, $(0,2)$, $(0,6)$; indi si calcoli l'area della regione piana limitata dalla curva e dalle tangenti ad essa nei punti di ascissa nulla.

3.45.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale xOy si rappresenti la curva di equazione:
$$y=\frac{x-1}{x+1}.$$
Condotta poi per il punto $(-1,1)$ la retta di coefficiente angolare m, si dica per quali valori di m una delle sue intersezioni con la curva appartiene al primo o al quarto o al terzo quadrante. Si determini inoltre la lunghezza della corda minima intercettata sulla retta dalla curva e si dica qual è il rapporto, maggiore di 1, fra le aree dei triangoli che le tangenti negli estremi di tale corda formano con gli assi cartesiani.
2. Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per il quale è massima l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono.
3. Si studi il grafico della funzione $y=\sin x+2\cos x$ nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.

4. Si esamini la posizione delle radici della equazione in x:

$$(m-1)x^2-(m+1)x+(2m-1)=0$$

rispetto all'intervallo $(-1,1)$.

3.46. Anno scolastico 1971-1972

3.46.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti $\mathsf{A}(-2,0)$, $\mathsf{B}(4,0)$ ed avente il centro sulla retta $y=4$, e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x. Si determinino poi i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ in modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto $\mathsf{C}(0,4)$ e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno e per l'altro degli estremi del diametro suddetto. Si calcoli infine l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse delle x.
2. Data una circonferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}|=2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di $\overline{\mathsf{AB}}$, due punti C e D tali che $\mathsf{A\widehat{B}C}=\pi/3$, $\mathsf{B\widehat{A}D}=\alpha$. Si consideri la funzione:
$$y=\frac{|\overline{\mathsf{AD}}|^2-|\overline{\mathsf{CD}}|^2}{|\overline{\mathsf{BC}}|^2}$$
espressa per mezzo di $x=\tan\alpha$ e se ne studi il grafico.
3. Si studi la variazione della funzione $y=\sin 2x\cos x$ nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$.
4. Si determini l'altezza e il raggio di base del cono di volume minimo circoscritto ad una data sfera di raggio r. Si dimostri poi che il suddetto cono è anche quello di minima superficie totale.

3.46.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva, a sua scelta, almeno due dei seguenti quesiti. Tempo concesso: 5 ore.

1. Date le due parabole di equazioni
$$y=x^2-7x+12 \qquad , \qquad y=4x^2-25+36,$$
si determinino le coordinate dei punti comuni, le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto. Si calcoli poi l'area di una delle regioni piane limitate da dette tangenti.
2. Si disegni la curva di equazione:
$$y=\frac{2x}{x^2+x-1}.$$
Si determinino le coordinate dei punti comuni ad essa e alla sua simmetrica rispetto all'asse y e si calcoli l'area del quadrilatero convesso formato dalle tangenti alle due curve nei punti comuni di ascissa non nulla.

3. Si studi la variazione della funzione:

$$y = \tan x - 2\sin x$$

nell'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi.$$

4. Si discuta l'equazione:

$$2kx^2 + 2(k+1)x + k^2 + 1 = 0$$

per x compreso tra $-1/2$ ed 1.

3.47. Anno scolastico 1972-1973

3.47.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ ed alla retta di equazione $y = 1$ e si indichino con r' ed r'' ($r' > r''$) i rispettivi raggi. Dopo aver determinato r' ed r'', si scriva l'equazione di un'altra circonferenza C''' tangente alla C'', avente il centro sulla retta degli altri due centri e raggio uguale ad r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C'' ed a C''' e si calcoli l'area della regione del piano limitata dalle due parabole.
2. Si disegni il grafico della funzione:
$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$
e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto $A(0,1)$ assume valore minimo.
3. Si studi la variazione della funzione $y = 3\cos 2x - 4\cos x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
4. Si studi la funzione
$$y = \frac{1+x^3}{x^2}$$
e se ne disegni il grafico. Si scriva poi l'equazione della tangente nel suo punto A di ordinata nulla e quella della retta passante per lo stesso punto e tangente alla curva in un ulteriore punto B. Detta C l'intersezione della prima tangente con il grafico si calcoli l'area della regione piana limitata dal segmento $\overline{BC}$ e dal grafico stesso.

3.47.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Dato il triangolo rettangolo AOB, di cateti $|\overline{OA}| = a$ e $|\overline{OB}| = b$ si prenda sull'ipotenusa $\overline{AB}$ un punto P di cui sia Q la proiezione ortogonale su $\overline{OB}$ e si ponga $|\overline{QP}| = x$. Si consideri la funzione
$$y(x) = \frac{V_1}{V_2},$$
essendo V_1 e V_2 i volumi dei due solidi generati dalla rotazione completa del trapezio OAPQ attorno, rispettivamente, al cateto $\overline{OA}$ ed al cateto $\overline{OB}$ e, indipendentemente dalla questione geometrica, la si studi per x variabile in tutto il campo reale.
2. In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola e le circonferenze di rispettive equazioni:
$$y = -\frac{2}{3}x^2 \qquad , \qquad x^2 + y^2 - 2ky = 0$$
essendo k un parametro reale.

   Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola ed appartiene al semipiano $y \geq 0$, si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa ed alla circonferenza e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo x formato dalle due tangenti. Si calcoli, infine, l'area della regione finita del piano compresa fra la parabola e la circonferenza trovata.
3. Si studi la variazione della funzione $y = \sin 2x - \tan x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.
4. Si disegnino i grafici delle due funzioni:
$$y = \frac{x(1-2x)}{1+2x} \qquad , \qquad y = \frac{1}{1+2x}$$
e si scrivano le equazioni dei rispettivi asintoti.

   Si calcoli poi la differenza fra l'area della regione piana delimitata dal secondo grafico e dall'asintoto obliquo del primo, e l'area della regione formata dal primo grafico con l'asse x.

3.48. Anno scolastico 1973-1974

3.48.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Assegnata la funzione $y = \sin x + a\cos x + b$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$, si determinino i valori di a e di b in modo che ammetta un massimo relativo $y = 0$ nel punto
$$x = \frac{\pi}{6}$$
e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta. Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$ e tracciata la retta
$$x = \frac{\pi}{2},$$
si calcoli l'area della regione piana limitata da tale retta, dalla tangente in A e dalla curva.

2. Sono assegnate due circonferenze C e C' esterne tra loro e rispettivamente di centri O ed O' e raggi r ed $r/2$. Sul segmento $\overline{\mathsf{OO}'} = a$ si prenda un generico punto P non interno alle due circonferenze e si conducano da esso le rette tangenti a C e C'. Gli archi aventi per estremi i punti di contatto ed intersecanti il segmento $\overline{\mathsf{OO}'}$ generano, in una rotazione di 180° attorno ad $\overline{\mathsf{OO}'}$, due calotte sferiche.

   Posto $|\overline{\mathsf{OP}}| = x$, si determini la posizione di P in corrispondenza della quale risulta massima la somma delle aree delle due calotte.

3. Si studi la funzione
$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$$
   e se ne disegni il grafico. Presi sulla curva i punti A e B rispettivamente di ascissa
$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{3},$$
   si determinino i punti dell'arco $\widehat{\mathsf{AB}}$ nei quali la tangente alla curva è parallela alla retta AB.

4. Si espongano brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y = f(x)$.

3.48.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazioni $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto, si determini sull'arco $\widehat{\mathsf{ABC}}$ il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB. Si calcolino infine le aree dei segmenti di parabola determinati dai lati $\overline{\mathsf{AP}}$ e $\overline{\mathsf{PB}}$ di tale triangolo.

2. Si consideri la curva di equazione $y = x(x-2)^2$ e siano A, B, C i suoi punti di intersezione con la retta di equazione $y = x$. Se A', B', C' sono gli ulteriori punti comuni alla curva ed alle rette tangenti ad essa condotte rispettivamente per A, B, C, si verifichi che A', B', C' sono allineati.

3. Assegnata la funzione:
$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2},$$
   si determinino i valori delle costanti a, b, c, in modo che risulti
$$f(1) = \frac{1}{6} \quad , \quad f(2) = \frac{1}{24} \quad , \quad f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{8}{15}$$
   e si disegni il grafico della funzione così ottenuta.

4. Si espongano brevemente gli elementi della teoria dei massimi e minimi di una funzione. $y = f(x)$.

3.49. Anno scolastico 1974-1975

3.49.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Assegnata una circonferenza di diametro $\overline{\mathsf{AB}} = 2$, si conduca per A la retta tangente e su essa si consideri un punto M tale che $|\overline{\mathsf{AM}}| = x$. Da M si tracci la ulteriore retta tangente alla circonferenza e sia C il punto in cui essa incontra il prolungamento di $\overline{\mathsf{AB}}$. Posto $|\overline{\mathsf{AC}}| = y$, si esprima y in funzione di x e si disegni il grafico relativo.

2. In un riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le parabole C' e C'' rispettivamente di equazione:
$$y = -x^2 + 2ax \qquad , \qquad y = \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}.$$
Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di a per cui tale area risulta minima.

   Si completi la trattazione dimostrando che se $F(x)$ è una primitiva di una funzione $f(x)$ per $a \leq x \leq b$, risulta
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

3. Si conduca internamente ad un angolo retto $\mathsf{A\hat{O}B}$ una semiretta OC che forma con OA un angolo $\mathsf{A\hat{O}C} = x$; presi rispettivamente su OA ed OB due punti M ed N tali che $|\overline{\mathsf{OM}}| = 1$, $|\overline{\mathsf{ON}}| = \sqrt{3}$, siano M′ ed N′ le rispettive proiezioni di M ed N su $\overline{\mathsf{OC}}$.

   Detto P il punto medio di $\overline{\mathsf{M'N'}}$, si determini x in modo che risulti massima l'area del triangolo NOP.

3.49.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione $y = x^2(3 - x)$ e se ne disegni il grafico.

   Detti A e B i punti corrispondenti agli estremi relativi della funzione, si conducano per essi le tangenti alla curva e siano C e D i rispettivi punti di contatto. Si calcoli l'area del quadrilatero convesso limitato dai segmenti $\overline{\mathsf{AC}}$ e $\overline{\mathsf{BD}}$ e dagli archi AD e BC della curva. Si completi la trattazione dimostrando che se una funzione reale $f(x)$ della variabile reale x ha in un punto c, del suo campo di esistenza, derivata prima e seconda verificanti le condizioni $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, queste sono sufficienti per affermare che in c la $f(x)$ ha un massimo relativo.

2. Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale xOy, si consideri la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Detto $\widehat{AB}$ l'arco di essa contenuto nel primo quadrante, si determini su tale arco un punto P tale che, indicati con Q il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e con S quello di intersezione della retta OP con la retta di equazione $y=2$, l'area del triangolo QPS risulti minima.
3. In una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}|=2r$, si conduca una corda $\overline{AC}$ tale che l'angolo $C\widehat{A}B=2x$. Detto D il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$, si determini x in modo che l'area del quadrilatero ACDB risulti massima.

3.50. Anno scolastico 1975-1976

3.50.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si studi la funzione
$$y=\frac{2x-1}{2x^3}$$
e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
2. Si studi la funzione $y=x+2\sin x$ e se ne disegni il grafico nell'intervallo $-2\pi\leq x\leq 2\pi$. Si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione $y=x-2$ e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.
3. In un cono circolare retto avente per raggio di base e per altezza rispettivamente i segmenti r e hr si inscriva il cilindro avente la base sul piano di base del cono e il volume massimo. Per quale valore di h tale cilindro risulta anche equilatero? In questo caso particolare si trovi anche il cilindro inscritto per il quale è massima la superficie totale.
4. Si dimostri che
$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}.$$

3.50.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni:

$$y = ax^2 - 2x + 2 \qquad , \qquad y = 2ax^2 - 2x + 1$$

   e si determini il valore del parametro reale a in modo che risulti minima la distanza tra i due vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

2. Dopo aver preso su una circonferenza di raggio unitario tre punti A, B, C, tali che $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$, si studi la funzione:

$$y = |\overline{\mathrm{AB}}|^2 + |\overline{\mathrm{BC}}|^2 + |\overline{\mathrm{CA}}|^2$$

   e se ne disegni il grafico (avendo assunto una variabile indipendente a piacere).

3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si determinino l'equazione della circonferenza passante per i punti $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{C}(-1,0)$ e quella della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, passante per gli stessi punti, e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

   Nel semipiano delle ordinate positive si tracci la retta $y = h$ che incontra in P e Q la circonferenza ed in R ed S la parabola. Detti P′, Q′, R′, S′ le proiezioni ortogonali di P, Q, R, S sull'asse x, si considerino i pentagoni APP′Q′Q ed ARR′S′S inscritti negli archi CAB di circonferenza e di parabola rispettivamente e si determini per quale valore di h è massima la differenza tra i volumi dei solidi da essi generati in una rotazione di mezzo giro attorno all'asse delle ordinate.

4. Si dimostri che:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.51. Anno scolastico 1976-1977

3.51.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$y = 3x - x^2 \qquad , \qquad y = x^2 - 2x.$$

   Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si determini il triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine ed il lato opposto parallelo all'asse delle ordinate e la cui area abbia valore massimo. Si calcolino inoltre le aree delle regioni finite limitate dai lati di questo triangolo e dalle due curve.

2. I tre punti A, B, C non allineati sono vertici di un triangolo ABC i cui lati $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{CA}}$ sono lunghi rispettivamente a e b. Si dica come va scelto l'angolo $\mathrm{A\widehat{C}B} = \gamma$ affinché la somma dei quadrati delle altezze del triangolo relative ai lati $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{CA}}$, diminuita del quadrato del lato $\overline{\mathrm{AB}}$, sia massima.

   Posto $b = ma$, $(m > 0)$ si determini per quale valore di m tale angolo assume ampiezza minima.

3. Data la funzione $y = a \sin x + b \cos x$, si determinino i coefficienti a, b in modo che per
$$x = \frac{2\pi}{3}$$
sia $y = 1$ e che i valori estremanti di y siano -2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
Posto $y = c \sin(x+\varphi)$, si calcolino c e φ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata. Fatte le sostituzioni $y = s$, $x = 2\pi t$, dove s rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muove su di una retta nel tempo t, si aggiunga, facoltativamente, la descrizione del moto di P, determinando, in particolare, gli istanti nei quali la velocità è nulla e quelli nei quali è massima.
4. Si enunci la regola di De L'Hospital e se ne dia un esempio di applicazione.

3.51.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Fra le parabole del tipo
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + c \quad (\text{con } c > 0)$$
si determini quella per la quale i punti P di essa che hanno minima distanza dall'origine O degli assi cartesiani di riferimento sono tali che $|\overline{\mathsf{OP}}|^2 = 12$. Tracciate le tangenti alla parabola nei punti P' e P'' così determinati, si calcoli l'area del triangolo mistilineo $\mathsf{P}'\mathsf{P}''\mathsf{T}$, dove T è il punto d'incontro delle tangenti e $\mathsf{P}'\mathsf{P}''$ l'arco di parabola.
2. Si studino le funzioni:
$$y = \frac{2}{x^2} \qquad , \qquad y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$
e se ne disegnino i grafici in un riferimento cartesiano ortogonale. Si verifichi che i loro punti comuni stanno su una retta di cui si chiede l'equazione. Si calcoli inoltre l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.
3. Dato l'angolo $\mathsf{a}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{b} = \gamma$, si fissino sulla semiretta Ob i punti P, Q, tali che siano $|\overline{\mathsf{OP}}| = 1$, $|\overline{\mathsf{OQ}}| = 2$; preso sulla semiretta Oa un punto A e posto $|\overline{\mathsf{OA}}| = x$, si studi la funzione:
$$y = \frac{|\overline{\mathsf{AP}}|^2 - |\overline{\mathsf{AQ}}|^2}{|\overline{\mathsf{AP}}|^2 + |\overline{\mathsf{AQ}}|^2}$$
della quale si disegni il grafico nell'ipotesi
$$\gamma = \frac{\pi}{6}.$$
In questo caso particolare si costruiscano sulla semiretta Oa i punti aventi da P e da Q distanze estremanti per la y.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione:
$$y = x^{\frac{m}{n}}.$$

3.52. Anno scolastico 1977-1978

3.52.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le due parabole C' e C'' rispettivamente di equazione
$$y = 2x - x^2 \qquad , \qquad y = x - x^2.$$
Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si conducano:
   - la retta di equazione $y = k$ $(k > 1/4)$, sulla quale C' intercetta la corda $\overline{\mathsf{AB}}$;
   - la retta tangente a C'' nel suo vertice, sulla quale la stessa C' intercetta la corda $\overline{\mathsf{CD}}$.

   Si determini per quale valore di k l'area del trapezio ABCD acquista il valore massimo.
2. Si studi la funzione
$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$
e se ne disegni il grafico.

   Si scriva l'equazione della circonferenza tangente ai tre rami della curva e si calcolino il perimetro e l'area del triangolo individuato dai tre punti di contatto.
3. Tra le parabole di equazione:
$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + k$$
si individui quella sulla quale la retta di equazione $2y = x + 2$ intercetta una corda $\overline{\mathsf{AB}}$ di lunghezza
$$\frac{5\sqrt{5}}{2}.$$
Condotte in A e in B le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco di parabola AB e dalle due tangenti.
4. Gli asintoti di una curva: si illustri il procedimento per determinarli nel caso di una curva rappresentata analiticamente da una funzione razionale fratta.

3.52.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino la parabola avente equazione $y = 2x - x^2$, che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C, e la retta avente equazione $y = k$ (con $0 < k < 1$), che incontra la parabola nei punti A e B.

   Si determini per quale valore di k risulta massimo il volume del solido generato dal trapezio OABC in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

2. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = 1 + ax + \frac{b}{x^2}$$

   in modo che la curva da essa rappresentata abbia un estremo relativo in $\mathsf{A}(1,0)$. Se ne disegni il grafico. Condotta per A la retta tangente alla curva nel punto B, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dalla retta AB e dall'asse delle ascisse.

3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino i punti $\mathsf{O}(0,0)$ ed $\mathsf{A}(2,2)$ e la circonferenza avente per diametro il segmento $\overline{\mathsf{OA}}$. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i due punti dati ed abbia in A come tangente la retta tangente alla circonferenza. Si calcolino inoltre le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

4. Si dimostri il teorema relativo alla determinazione dei massimi e minimi relativi di una funzione.

3.53. Anno scolastico 1978-1979

3.53.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data in un sistema di assi coordinati cartesiani la parabola di equazione:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

   si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima.

2. Dato in una circonferenza di raggio r l'angolo al centro $\mathsf{A\hat{O}B}$ si costruisca sulla corda $\overline{\mathsf{AB}}$, da parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base $\overline{\mathsf{AB}}$ e per altezza $|\overline{\mathsf{CH}}| = 2k \cdot |\overline{\mathsf{AB}}|$.

   Si determini il valore dell'angolo $\mathsf{A\hat{O}B}$ per il quale il quadrilatero OACB ha area massima.

   Si calcoli poi il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo $\mathsf{A\hat{O}B}$ del quadrilatero ottenuto è 150°.

3. Si studi la funzione:

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

   e se ne disegni il grafico.

Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto $(0,1)$ e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i punti di contatto. Si calcolino le aree delle tre regioni finite di piano limitate dalle due parabole e dalla curva data.

4. Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

3.53.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data la funzione
$$y=\frac{4x^2+1}{3x},$$
se ne rappresenti il grafico. Preso un punto P sull'arco della curva che appartiene al primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano questi nei punti A e B rispettivamente e si determini la posizione di P per la quale è minima la somma dei segmenti $\overline{\mathsf{PA}}$ e $\overline{\mathsf{PB}}$.
2. Data una circonferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}|=2r$, si determinino su di essa i punti tali che, condotti i segmenti perpendicolari al diametro ed alla tangente alla circonferenza in A, i rettangoli che si ottengono abbiano area massima.
3. Si studi la funzione
$$y=x+\frac{4}{x^2}$$
e se ne disegni il grafico. Detti A il punto estremo relativo e B l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente in A, si scriva l'equazione della parabola passante per A e tangente alla curva in B e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.
4. Si dimostri per via elementare che se due grandezze positive hanno somma costante, il prodotto è massimo quando sono uguali.

3.54. Anno scolastico 1979-1980

3.54.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sui lati opposti $\overline{\mathsf{AB}}$ e $\overline{\mathsf{CD}}$ di un rettangolo ABCD ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α.

   Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrittibile in una circonferenza?

2. Si rappresenti la funzione:
$$y = \frac{6x^2 + 2x + 3}{2(2x^2 + 1)}$$
dopo aver determinato massimi, minimi, flessi ed asintoti. Effettuata la sostituzione $x = t$ e $y = s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t e si dica per quali valori del tempo t positivo la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto.

   Facoltativamente si interpreti il significato della funzione per $t < 0$.

3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione
$$y = x^2 + \sqrt{3}x + 1.$$
Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

4. Si enuncino le condizioni di derivabilità e di integrabilità delle funzioni e si dia qualche esempio di funzione integrabile ma non derivabile.

3.54.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data la funzione
$$y = \frac{1 + \sin x}{\sin x}$$
se ne rappresenti il grafico dopo aver determinato i massimi ed i minimi, per i valori di x nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

   Si consideri poi facoltativamente la funzione:
$$y = \log \left| \frac{1 + \sin x}{\sin x} \right|$$
e la si rappresenti utilizzando gli elementi ottenuti per la rappresentazione della funzione precedente.

2. In un settore circolare di raggio r e di ampiezza $\pi/6$, si inscriva un rettangolo avente un lato su uno dei raggi limitanti il settore e gli altri due vertici, uno sull'arco e l'altro sul rimanente raggio. Si determini tra tali rettangoli quello per il quale è minima la diagonale e si costruisca, in tal caso particolare, la figura con riga e compasso.

3. Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passante per i punti $P(0, 3)$, $Q(2, 3)$ ed il cui vertice V stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$.

Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area della superficie del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole.

4. Applicando la definizione di derivata se ne determini il valore per la funzione $y = \sin 2x$.

3.55. Anno scolastico 1980-1981

3.55.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O ed aventi i centri rispettivamente in $C'(2,0)$ e $C''(-1/2,0)$. Condotte per il punto O due rette mutuamente perpendicolari, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei punti A e B rispettivamente e la seconda nei punti C e D, si determini il quadrilatero ACBD avente area massima.
2. Si studi la funzione
$$y = x^2 + \frac{16}{x^2}$$
e se ne disegni il grafico. Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, passanti per l'estremo relativo A della curva di ascissa positiva, per il punto B della curva di ascissa $x = 1$ e tali che l'area della regione finita di piano limitata dall'arco AB della curva e da ciascuna delle due parabole sia $7/3$.
3. In un triangolo di base $|\overline{AB}| = a$ ed altezza $|\overline{CH}| = h$ si inscriva il rettangolo, con un lato su $\overline{AB}$ ed i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta AB genera il solido di volume massimo. Supposto che gli angoli adiacenti alla base siano uno doppio dell'altro, si calcolino i valori che essi assumono quando detto volume massimo è
$$\frac{a^3\pi}{36}.$$
4. Si dimostri l'identità:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

3.55.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In una circonferenza di raggio r si consideri la corda $\overline{AB}$ che dista $r/2$ dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\widehat{AB}$ il punto C, si prolunghi $\overline{AC}$ di un segmento $\overline{CD}$ tale che $\overline{CD} = \overline{AC}$ e si determini per quale posizione di C è massima l'area del triangolo CDB.

2. Si determinino i coefficienti dell'equazione:

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$$

in modo che la curva da essa rappresentata ammetta come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x - 2$, abbia un estremo relativo nel punto di ascissa $x = 2$ ed un flesso nel punto di ascissa $x = -1$. Se ne disegni il grafico.

Si determinino inoltre le intersezioni della curva con l'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati e passante per il punto $(1,3)$ e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.

3. Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, aventi nel punto $\mathsf{A}(1,0)$ la stessa retta tangente di equazione $y = 2x - 2$ ed intersecanti l'asse delle ascisse, la prima nel punto $\mathsf{B}(3,0)$ e la seconda nel punto C, interno ad $\overline{\mathsf{AB}}$, tale che il segmento parabolico determinato su questa da $\overline{\mathsf{AC}}$ risulti la quarta parte del segmento parabolico determinato sulla prima da $\overline{\mathsf{AB}}$.

4. Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k.

3.56. Anno scolastico 1981-1982

3.56.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

in modo che la curva da essa rappresentata tocchi la retta $y = x$ nel punto $\mathsf{A}(1,1)$ e la retta $y = 0$ nel punto $\mathsf{B}(3,0)$. Se ne disegni il grafico.

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due rette e dall'arco di curva AB.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il triangolo equilatero ABC avente il vertice A nel punto $(3,0)$, il vertice B sull'asse delle ordinate ed il vertice C sulla retta di equazione $x = 3$. Si determinino i coefficienti dell'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

in modo che la parabola da essa rappresentata passi per i vertici A, B del triangolo e divida questo in due parti delle quali quella determinata dal lato $\overline{\mathsf{AB}}$ sia la metà dell'altra.

3. Si studi la funzione

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli la somma:
$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$
con $n \in \mathbb{N}$, tendente all'infinito.

3.56.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$y = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$$
e se ne disegni il grafico.
Si determinino le intersezioni di questa curva con la curva di equazione
$$y = \frac{1}{x} - 1$$
e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.
2. Si determinino i coefficienti dell'equazione:
$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a > 0)$$
in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle rette di equazione $y = x$ e $y = x/2$ ed abbia la corda congiungente i due punti di contatto di lunghezza $5/2$. Si calcoli l'area del segmento parabolico delimitato dalla stessa congiungente.
3. Si studi la funzione:
$$y = \frac{1}{\sin x \cos x}$$
nell'intervallo aperto $]0, 2\pi[$ e se ne disegni il grafico.
4. Si verifichi che:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{\cos x - 1} = 2.$$

3.57. Anno scolastico 1982-1983

3.57.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione:
$$y=\frac{a^2}{x^2}-1$$
e se ne disegni il grafico.

   Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2+y^2=a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare. In questo caso particolare si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

2. Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

3. Si studi la funzione:
$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
e se ne disegni il grafico.

   Utilizzando il grafico precedente si studi la funzione $y=e^{f(x)}$, dove $f(x)$ è la funzione precedentemente studiata.

4. Si dimostri per via elementare che se due grandezze positive hanno somma costante, il loro prodotto è massimo quando esse sono uguali.

3.57.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione:
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$
in modo che la curva da essa rappresentata abbia due estremi relativi nei punti A$(1,1)$ e B$(-1,-1)$. Se ne disegni il grafico.

   Si scriva l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per il punto A e per i punti in cui la curva data incontra il semiasse positivo delle ascisse e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

2. Sulla semiretta asse di simmetria di una parabola assegnata si fissi un punto Q. Si determinino, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le coordinate dei punti P della parabola le cui distanze da Q hanno un valore minimo e si scriva l'equazione della circonferenza avente centro in Q e per raggio tale valore minimo.

3. Si studi la funzione:
$$y=a\sin x+\cos^2 x$$

e se ne disegni il grafico dopo aver determinato a in modo che la curva abbia un flesso nel punto di ascissa

$$x = \frac{7}{6}\pi.$$

4. Si dimostri il teorema di Torricelli:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b).$$

3.58. Anno scolastico 1983-1984

3.58.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione:

   $$y = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

   e se ne disegni il grafico.

   Si individui la traslazione di assi:

   $$x = X + a \qquad , \qquad y = Y + b$$

   che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

2. Considerato il triangolo ABC con i lati $|\overline{\mathsf{AB}}| = 3a$, $|\overline{\mathsf{AC}}| = 4a$, $|\overline{\mathsf{BC}}| = 5a$, si scriva, in un sistema di assi coordinati cartesiani opportunamente scelto, l'equazione della parabola con l'asse perpendicolare al lato $\overline{\mathsf{BC}}$, tangente in B al lato $\overline{\mathsf{AB}}$ e passante per il punto C. Si indichi il criterio seguito nella scelta del sistema di riferimento.

   Si calcolino le aree delle due parti in cui il triangolo è diviso dall'arco di parabola ad esso interno.

3. Si consideri una circonferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $|\overline{\mathsf{AP}}| = a$. Se $\overline{\mathsf{MN}}$ è una corda della circonferenza perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$, si determini per quale posizione di $\overline{\mathsf{MN}}$ risulta massimo il volume della piramide PAMN. Si risolva il problema anche per via elementare.

4. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

3.58.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si disegni il grafico della funzione:
$$y = x^3 - 2x^2 + x + a$$
attribuendo ad a un valore particolare a scelta del candidato. Si dica come deve essere scelto a perché la curva rappresentativa incontri l'asse delle ascisse in uno, due o tre punti.
2. Si considerino le parabole di equazioni:
$$y^2 = \frac{1}{2}x \qquad , \qquad y^2 = -x + a^2.$$
Nella regione finita di piano compresa tra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati che, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, genera il cilindro di massimo volume.

   In tal caso si calcoli il volume del solido generato nella precedente rotazione dal triangolo mistilineo avente come lati la base superiore del rettangolo e gli archi delle due parabole compresi tra gli estremi di tale base e il punto d'incontro delle parabole stesse.
3. Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC, con $\mathsf{B}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{C} = 90°$, $|\overline{\mathsf{AB}}| = a$, si conduca per il vertice C la retta non secante il triangolo tale che risulti massima la somma delle perpendicolari $\overline{\mathsf{AM}}$ e $\overline{\mathsf{BN}}$ condotte su di essa. Si costruisca graficamente la soluzione.
4. Esaminati i diversi casi di discontinuità di una funzione, si dia un esempio per ciascuno di essi.

3.59. Anno scolastico 1984-1985

3.59.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione
$$y = 3x - x^2.$$
Si scrivano l'equazione della parabola ad essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole ad esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole e si trovi il perimetro del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la cubica di equazione

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

e si individui la traslazione $x = X + a$, $y = Y + b$ che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto della curva di minimo relativo.

Si scriva l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva e dagli assi delle ascisse dei due sistemi.

3. In una circonferenza di centro O e raggio unitario si conduca la corda $\overline{AB}$ tale che, costruito il triangolo equilatero ABC da parte opposta di O rispetto ad $\overline{AB}$, l'area del quadrilatero ACBO risulti massima.

Si esprimano i valori che assumono la lunghezza della corda $\overline{AB}$ e l'ampiezza dell'angolo $A\hat{O}B$.

4. Si dia la definizione di limite di una successione numerica e si portino esempi di successioni convergenti, divergenti ed indeterminate.

3.59.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$.

Si scriva l'equazione della curva ad essa simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = x$ e si determini, nella regione finita di piano delimitata dalle due curve, il segmento di lunghezza massima perpendicolare all'asse di simmetria. Si calcoli inoltre l'area della stessa regione di piano.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani opportunamente scelto si scriva l'equazione (razionale intera) della cubica che passa per i vertici di un triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa $\overline{BC}$ e che incontra ulteriormente la retta BC, dalla parte di C, nel punto D tale che $\overline{BC} = \overline{CD}$. Si disegni il grafico.

3. Si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dai lati del triangolo. Fra le piramidi rette a base quadrata aventi la stessa superficie laterale si determini quella di volume massimo.

4. Si dia la definizione di limite di una funzione e si portino esempi di funzioni convergenti e divergenti in un punto di un intervallo finito.

3.60. Anno scolastico 1985-1986

3.60.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sia data nel piano cartesiano la circonferenza A di raggio uno e centro nell'origine. Si determinino le equazioni delle circonferenze B e C appartenenti al primo quadrante, tangenti ad entrambi gli assi coordinati e alla circonferenza A e, rispettivamente, interna ed esterna ad A.

   Le circonferenze B e C e gli assi coordinati determinano tre regioni finite appartenenti al primo quadrante ed esterne a B e C. Si calcoli l'area complessiva delle tre regioni.

2. Si studi la funzione
$$y = x^4 - kx^2$$
   distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare si calcoli il minimo della funzione, per ogni valore di k.

   Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori $k = -1$ e $k = 1$. Il secondo grafico delimita, insieme alla retta $y = 0$, due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante: si dimostri che l'una è la simmetrica dell'altra rispetto alla retta $y = 0$ e si calcoli l'area di una di esse.

3. Verificare che la somma dei quadrati di due numeri reali di assegnato prodotto $p > 0$:

   a) decresce quando decresce il valore assoluto della differenza dei due numeri;

   b) raggiunge il valore minimo quando i due numeri sono uguali.

   Dedurre che, fra i rettangoli di data area, il quadrato ha la diagonale minima.

4. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. Indicati rispettivamente con m e M il minimo e il massimo di $f(x)$ nell'intervallo assegnato, si dimostrino le disuguaglianze:
$$2m \leq \int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2M.$$
   Si dia un esempio di funzione per la quale almeno una delle due disuguaglianze diventa un'uguaglianza, e un secondo esempio di funzione per la quale entrambe le disuguaglianze sono soddisfatte in senso stretto.

3.60.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data una circonferenza di raggio unitario, si scrivano, in un sistema di assi coordinati opportunamente scelto, le equazioni delle cubiche ad essa bitangenti e passanti per il centro e per gli estremi di un diametro della circonferenza stessa. Se ne disegnino i grafici.

   Si calcolino le aree delle regioni di piano in cui le curve ottenute dividono il cerchio.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola avente equazione $y = x^2 - 2x + 2$ e la sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = 2$. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e si scriva l'equazione della circonferenza in essa inscritta (bitangente alle due curve).

3. Data una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$, si determini a quale distanza dal centro deve essere condotta la corda $\overline{CD}$ perpendicolare ad $\overline{AB}$ in modo che la differenza tra il triangolo ACD, contenente il centro, ed il triangolo BCD abbia valore massimo.

   Si indichi la costruzione grafica della soluzione.

4. Si dimostri il teorema di unicità del limite di una funzione in un punto.

3.61. Anno scolastico 1986-1987

3.61.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali è assegnata la famiglia di linee di equazione:
$$ax^2 + (1 - 3a)x - y - 3 = 0.$$
   Si individuino in tale famiglia la retta r e le due parabole C' e C'' che con la stessa retta formano ciascuna una regione finita di piano avente area 9/2.

   Si dimostri che le due parabole ottenute sono congruenti.

   Si scriva inoltre l'equazione della retta parallela all'asse delle ordinate tale che le tangenti a C' ed a C'' nei punti di intersezione di essa con le stesse parabole siano parallele.

2. Si studi la funzione:
$$y = 3x - x^3$$
   e se ne disegni il grafico. Si sottoponga la curva alla trasformazione:
$$\begin{cases} x = mX & (m \neq 0) \\ y = nY & (n \neq 0) \end{cases}$$
   e si determinino i coefficienti m ed n in modo che il segmento congiungente gli estremi relativi della curva trasformata risulti della stessa lunghezza e perpendicolare al segmento congiungente gli estremi relativi della curva assegnata.

3. In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la funzione
$$y = \sqrt{\frac{2 - x}{x}}$$
   e se ne disegni il grafico. Considerato l'arco AB della curva, essendo A il punto di flesso e B quello a tangente parallela all'asse delle ordinate, si determini il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione finita di piano compresa tra l'arco AB, la retta OA e l'asse delle ascisse, di un intero giro attorno all'asse medesimo.

4. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scriva l'equazione della retta r′ simmetrica, rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, di una generica retta r di equazione $y = mx$. Si individui la coppia di rette r ed r′ tali che il triangolo isoscele formato da esse e da una perpendicolare alla bisettrice considerata abbia l'altezza uguale alla base.

3.61.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si considerino le curve di equazione:

$$y = x^3 + bx^2 + cx + y + d.$$

   Si individuino tra esse quelle che sono tangenti nell'origine delle coordinate all'asse delle ascisse e tali che la regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse medesimo sia $4/3$. Si disegnino le curve ottenute e si dimostri che sono congruenti.

2. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si consideri la parabola C di equazione:

$$y = -x^2 + 4x - 3.$$

   Sottoposta la curva alla trasformazione:

$$\begin{cases} x = mX & (m > 0) \\ y = nY & (n > 0) \end{cases}$$

   si determinino i coefficienti m ed n in modo che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico di C determinato dall'asse delle ascisse si trasformi in un quadrato equivalente. Si calcoli l'area dello stesso segmento parabolico.

3. Si studi la funzione:

$$y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2}$$

   e se ne disegni il grafico.

   Dette A e B le intersezioni della curva con l'asse delle ascisse, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalle parallele per A e B al suo asintoto obliquo.

4. In un sistema di assi cartesiani ortogonali sono assegnate l'ellisse di equazione:

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

   e la circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

   Siano A il punto comune alle due curve di ascissa negativa, B un punto della circonferenza di ordinata positiva, H la proiezione di B sull'asse delle ascisse e P il punto di intersezione del segmento $\overline{\mathrm{BH}}$ con l'ellisse.

   Indicato con α l'angolo $\mathrm{B\hat{A}H}$, si esprimano in funzione di esso le coordinate di B, H, P, e si determini il valore di α per cui l'area del triangolo AHP è estrema.

3.62. Anno scolastico 1987-1988

3.62.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si considerino la funzione
$$f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$$
e la sua funzione primitiva $F(x)$ che assume lo stesso valore di $f(x)$ per $x=1$.
In un piano cartesiano ortogonale Oxy si traccino le curve di equazione $y=f(x)$ e $y=F(x)$ e si determinino le equazioni delle tangenti nei loro punti comuni. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione $x=-2$.
2. In un piano cartesiano ortogonale Oxy sono dati i punti $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$. Si consideri la trasformazione
$$X=2x-2 \quad , \quad Y=\frac{1}{2}y+1$$
e siano A', B', C' i punti trasformati di A, B, C. Si verifichi che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono equivalenti. Considerate la parabola γ, con asse verticale parallelo all'asse delle ordinate e passante per A, B, C, e la retta r per A parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, e detti γ' ed r' i corrispondenti di γ ed r nella trasformazione assegnata, si verifichi che anche le regioni finite di piano delimitate rispettivamente da γ ed r e da γ' ed r' sono equivalenti.
3. Considerato il triangolo ABC avente i lati $|\overline{CA}|=a$ e $|\overline{CB}|=2a$, si costruisca, da parte opposta a C rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto $\overline{BD}$ sia uguale alla metà del cateto $\overline{AB}$. Si studi come varia l'area del quadrangolo ADBC al variare dell'angolo $A\widehat{C}B$ e si calcoli il perimetro di detto quadrangolo quando la sua area è massima.
4. Si dimostri, avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente, che la derivata della funzione $f(x)=\sin^3 x$ è la funzione $f'(x)=3\sin^2 x\cos x$ e si generalizzi la questione per la funzione $f(x)=\sin^n x$ con n intero positivo.

3.62.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione:
$$y=ax^3+bx^2+cx+d \qquad (a>0)$$
in modo che la curva da essa rappresentata in un piano cartesiano ortogonale Oxy sia simmetrica rispetto all'origine, abbia in essa per tangente la bisettrice del secondo e del quarto quadrante e sia tale che l'area delle regioni finite di piano delimitate dalla stessa curva e dalla retta congiungente i suoi punti di massimo e di minimo relativi sia 1/2. Se ne disegni il grafico.

2. In un piano cartesiano ortogonale si considerino la circonferenza di centro nell'origine degli assi e raggio r e le parabole aventi per asse di simmetria l'asse delle ordinate e tangenti alla stessa circonferenza ciascuna in due punti la cui retta congiungente abbia dal centro distanza uguale alla metà del raggio.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla circonferenza e da una delle due parabole ottenute.
3. Si considerino una semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ e la retta t parallela alla retta AB e tangente alla semicirconferenza nel punto C.

   Detti D, E ed F i punti d'intersezione di una perpendicolare al diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ rispettivamente con la semicirconferenza, con la retta t e con lo stesso diametro, si studi come varia il rapporto delle aree dei triangoli OFD e DEC al variare dell'angolo $\mathsf{D}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{C}$.
4. Si enunci il teorema di Rolle e si verifichi che esso non è valido per la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$; quale delle ipotesi dello stesso teorema viene a mancare?

3.63. Anno scolastico 1988-1989

3.63.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data la funzione
$$y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$
   e la sua funzione derivata $f'(x)$, si traccino, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, le curve di equazioni:
$$y = f(x) \qquad , \qquad y = f'(x).$$
   Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla congiungente i punti rappresentanti gli estremi relativi delle due funzioni, dalla curva di equazione $y = f'(x)$ e dalla parallela all'asse delle ordinate passante per il punto in cui questa curva incontra l'asse delle ascisse.
2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ è assegnato il fascio di linee di equazione:
$$y = (a+1)x^2 - 2(a+1)x + 1.$$
   Dopo aver verificato che tutte le linee del fascio passano per due punti, di cui uno di ascissa nulla, si determinino:
   - l'equazione della retta r del fascio;
   - i parametri a' ed a'' delle due linee del fascio simmetriche rispetto alla retta r ed aventi, nel punto comune di ascissa nulla, tangenti fra loro perpendicolari;
   - l'area della regione finita di piano delimitata dalle linee così ottenute.

3. In un piano sono assegnati una circonferenza di centro O e raggio r ed un punto A tale che $|\overline{OA}| = 2r$; si conducano per A due rette a e b tali che siano a perpendicolare alla retta OA ed $\widehat{ab} = \pi/4$.

   Si determini sulla circonferenza il punto P tale che, condotte per esso la parallela alla retta a, che incontra la retta b nel punto M, e la parallela alla retta b, che incontra la retta a nel punto N, la somma $S = |\overline{PM}| + |\overline{PN}|$ assuma valore minimo.

   Si costruisca geometricamente l'angolo $A\widehat{O}P$, essendo P il punto trovato.

4. Delle funzioni:
$$f(x) = 2x^3 - 3x^3 \qquad , \qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$$
   una non verifica nell'intervallo $[-1, 2]$ tutte le ipotesi del teorema di Lagrange (o del valore medio). Si dica per quale delle due ciò avviene e si giustifichi l'affermazione.

   Si determinino per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.

3.63.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$$
   e si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = f(x)$. Si calcolino le aree delle regioni di piano comprese tra la curva e l'asse delle ascisse.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono assegnati i punti $A(4, 0)$ e $B(2, 0)$ e la retta r per B di coefficiente angolare $-4/3$. Si scrivano le equazioni delle due circonferenze tangenti in A all'asse delle ascisse e tangenti alla retta r. Indicati con C e C′ i centri delle due circonferenze e con D e D′ i rispettivi punti di contatto di queste con la retta r, si determinino l'area e il perimetro del quadrilatero CDD′C′.

   Si dimostri che i triangoli DAD′ e CBC′ sono simili e se ne dica il rapporto di similitudine.

3. Per il vertice A di un triangolo isoscele ABC di lato $|\overline{AB}| = a$ e di base $|\overline{BC}| = a\sqrt{3}$, si conduca la retta non secante il triangolo tale che, condotte su di essa dai vertici B e C rispettivamente le perpendicolari $\overline{BD}$ e $\overline{CF}$, risulti massimo il perimetro del quadrilatero BCED.

4. Si verifichi che il triangolo formato da una tangente qualsiasi ad una iperbole equilatera e dagli asintoti ha area costante e che il punto di contatto P della tangente è punto medio del segmento di tangente avente gli estremi A e B sugli asintoti.

   Si calcolino le aree delle regioni finite di piano comprese tra l'iperbole, la tangente in P e le parallele per A e per B rispettivamente agli asintoti cui essi non appartengono.

3.64. Anno scolastico 1989-1990

3.64.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data una semicirconferenza di diametro $|\overline{AC}| = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta uscente da A, perpendicolare ad $\overline{AC}$ e giacente rispetto ad $\overline{AC}$ dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A. Da M staccare l'ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l'intersezione della semicirconferenza con il segmento $\overline{OM}$ determinare l'area y del quadrilatero ACBK in funzione di x. Determinare il valore di y per x tendente a $+\infty$.
2. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta
$$y = \frac{37}{12}$$
e passanti per
$$A\left(0, \frac{19}{12}\right)$$
ed il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione
$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$$
e passanti per $B(2, 2)$. Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve.
3. Tracciare il grafico della funzione
$$y = x \cdot e^{-x}.$$
La funzione data rappresenti per $x \geq 0$ la legge oraria del moto di un punto che si muove lungo una semiretta (x rappresenti il tempo e y la distanza del punto P dall'origine della semiretta su cui si muove). Determinare in quale istante P raggiunge la massima velocità, in quale istante la velocità è nulla ed in quale istante l'accelerazione è nulla.

3.64.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data la parabola $y = 4x - x^2$ e la retta $y = k$ (con $k \geq 0$) che intercetta sulla parabola i due punti A e B, determinare la superficie del triangolo OAB (ove O è l'origine degli assi cartesiani) e studiarne l'andamento al variare di k. In particolare determinare per quale valore di k la superficie è massima.

   Calcolare quindi il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse del tratto di curva rappresentante la funzione studiata per $0 \leq k \leq 4$.

2. Data la semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ con centro O e raggio $\overline{\mathsf{OT}}$ perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$, da un generico punto H di $\overline{\mathsf{AB}}$ tracciare la perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ fino ad intersecare la semicirconferenza in P, e da P il segmento $\overline{\mathsf{PK}}$, con K appartenente al segmento $\overline{\mathsf{OT}}$, tale che l'angolo $\mathsf{K\widehat{P}O}$ sia uguale all'angolo $\mathsf{O\widehat{P}H}$. Indicata con x la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{OH}}$, determinare la lunghezza y del segmento $\overline{\mathsf{OK}}$ in funzione di x. Studiare l'andamento della funzione $y = f(x)$.
3. Data la semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$ e centro O, tracciare le semirette perpendicolari ad $\overline{\mathsf{AB}}$ sia in A sia in B dalla stessa parte della semicirconferenza. Indicare con C il punto sulla perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ in B tale che sia $|\overline{\mathsf{BC}}| = 1$.

   Preso un generico punto T sulla perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ in A, indicare con D l'intersezione del segmento $\overline{\mathsf{TO}}$ con la semicirconferenza. Posto $|\overline{\mathsf{TA}}| = x$, determinare la superficie y del quadrilatero ABCD in funzione di a e studiarne l'andamento. Determinare, in particolare, il valore di x per cui la superficie assume il valore massimo.

   Indicare come si possa costruire con riga e compasso il segmento $\overline{\mathsf{TA}}$ per cui l'area del quadrilatero è massima.

3.65. Anno scolastico 1990-1991

3.65.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ si consideri il punto $\mathsf{A}(2x, 0)$.

   Si trovi il luogo L del punto $\mathsf{B}(x, y)$ tale che il triangolo OAB abbia il perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso.

   Se B_0 è il punto di L del primo quadrante la cui ascissa è $p/4$ ed A_0 è il terzo vertice del relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo $\mathsf{OA_0B_0}$. Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad $\mathsf{OA_0B_0}$.
2. Si consideri in un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ la famiglia di parabole tangenti all'asse delle ascisse nel punto $\mathsf{A}(1, 0)$.

   Detto B il punto d'incontro della generica parabola con l'asse delle ordinate, si studi come varia, al variare della parabola, l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola stessa e la retta passante per B, parallela alla bisettrice del secondo quadrante, determinandone in particolare i valori estremi relativi.
3. Si considerino due circonferenze di centri A ed A′, e, rispettivamente, di raggi 9 ed 1, tangenti esternamente nel punto O.

   Sia r la tangente comune in O ed s una retta tangente ad entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B′.

   Detto C il punto d'intersezione delle rette r ed s si dimostri che i triangoli ACA′ e BOB′ sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree.

3.65.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ si consideri nel primo quadrante la circonferenza di raggio unitario tangente ai due assi coordinati.

   Detta r una retta passante per l'origine e secante la circonferenza nei punti A e B, si studi come varia, al variare di r, l'area del triangolo ABC, essendo C il centro della circonferenza, e si determinino in particolare le due rette per cui detta area assume valore massimo.

2. Si disegni in un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ la curva C di equazione:

   $$y = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$$

   e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione finita di piano compresa tra l'arco della curva C i cui estremi sono i punti di ascissa

   $$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad 1$$

   e le rette tangenti a C negli estremi stessi.

3. In un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$ si considerino il punto $\mathsf{A}(-l, 0)$ e la circonferenza C di centro $\mathsf{B}(1, 0)$ e raggio $r > 2$.

   Si determini il luogo del punto P appartenente al raggio $\overline{\mathsf{BT}}$ al variare di T sulla circonferenza, tale che sia $\overline{\mathsf{PT}} = \overline{\mathsf{PA}}$.

   Dopo aver dimostrato che detto luogo è un'ellisse di fuochi A e B, si calcoli per quale valore di r la parte di piano da essa limitata è equivalente ad $1/16$ del cerchio assegnato.

3.66. Anno scolastico 1991-1992

3.66.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Presi due vettori $\overrightarrow{\mathsf{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{OB}}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia $\overrightarrow{\mathsf{OA}} = 2 \cdot \vec{a}$ e $\overrightarrow{\mathsf{OB}} = \vec{b}$. Tracciare il vettore $\overrightarrow{\mathsf{BC}} = \vec{a}$ e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento $\overline{\mathsf{OC}}$ in due parti tali che $\overrightarrow{\mathsf{OP}} = 2 \cdot \overrightarrow{\mathsf{PC}}$. Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\overrightarrow{\mathsf{AP}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{PB}}$ sono multipli di uno stesso vettore).

   Posto $\vec{a} \perp \vec{b}$ e $|\vec{a}| = 1$ e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad $\vec{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\vec{b}$, trovare $|\vec{b}|$ affinché i due segmenti $\overline{\mathsf{OC}}$ e $\overline{\mathsf{AB}}$ siano perpendicolari.

Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O, P ed A e la seconda per B, P e C. Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in P. Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle y.

2. La funzione
$$f(x)=\left(2x^3-4x\right)e^{-x^2}$$
rappresenti, in opportune unità di misura, la forza $f(x)$ a cui è soggetto un punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x. Sapendo che la forza f è data da
$$f(x)=-\frac{dE(x)}{dx}$$
dove $E(x)$ è l'energia potenziale, trovare la funzione $E(x)$ e rappresentarla avendo posto $E(0)=-1$.

   Per quali valori di x il punto P è in equilibrio, ossia per quali valori di x la forza è nulla?

   Per tali valori di x l'energia potenziale quale valore assume?

3. Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{PQ}}$, trovare il limite per x tendente ad infinito del rapporto
$$k=\frac{|\overline{\mathsf{AQ}}|+|\overline{\mathsf{QB}}|}{|\overline{\mathsf{AB}}|}.$$
Studiare quindi la funzione $y=f(x)$, dove $f(x)=k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

3.66.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Studiare la funzione
$$y(x)=\cos x\cdot e^{-x}\qquad \text{per}\quad x\geq 0.$$
Essa, in opportune unità di misura, rappresenti la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo x il tempo.

   In tal caso la carica Q inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da
$$Q=\int_0^{\infty} y(x)\,\mathrm{d}x.$$
Calcolare il valore di Q.

2. In una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\widehat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento $\overline{BD}$ in E. Indicato con x l'angolo $B\widehat{A}E$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento $\overline{BE}$ e la lunghezza del segmento $\overline{BD}$

$$y = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{BD}|}.$$

Calcolare il rapporto y per x tendente a zero, quindi rappresentare la funzione $y = f(x)$.

3. Dati i due punti $A(-1,0)$ e $B(1,0)$ determinare il luogo dei punti $P(x,y)$ tali che

$$\frac{|\overline{PA}|}{|\overline{PB}|} = k \qquad \text{con} \quad k > 0.$$

Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per $k = 1$, il centro di tali curve in funzione di k, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di k.

3.67. Anno scolastico 1992-1993

3.67.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. La funzione $f(x)$ sia rappresentata da

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + Hx, & \text{per } x \leq 1, \\ \dfrac{K}{x^2}, & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare le costanti H e K in modo che la funzione $y = f(x)$ e la sua derivata siano continue in $x = 1$. Rappresentare la funzione così trovata e calcolarne l'integrale definito tra 0 e $+\infty$.

2. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O.

Detto A il punto di coordinate $(1,0)$, indicare con ϑ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($P\widehat{O}A = \vartheta$). Determinare in funzione di ϑ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $|\overline{PQ}| = 2$.

Descrivere, limitandosi all'uso della derivata prima, la funzione $y = f(\vartheta)$ trovata.

Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità angolare costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta?

Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?

3. Sia
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}.$$
Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma $y = \pm f(x)$.

Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$).

3.67.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali siano $\mathsf{A}(-1, -\sqrt{3})$ e $\mathsf{B}(1,1)$. Determinare il punto P appartenente all'asse delle x tale che sia minimo
$$y = n \cdot |\overline{\mathsf{AP}}| + |\overline{\mathsf{PB}}|$$
ove si sia posto $n = \sqrt{2}$.

   Tracciata la retta r perpendicolare all'asse delle x in P verificare che, detti β l'angolo formato dalla semiretta PB con la retta r e α l'angolo formato dalla semiretta PA con la retta r, è
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n.$$

2. Studiare la funzione
$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$$
Quali considerazioni si possono fare sui punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$?

3. Studiare la funzione
$$f(x) = \left|\frac{\sin x}{K - \cos x}\right|$$
dopo avere determinato il valore di K in modo che la funzione abbia un massimo per $x = \pi/3$.

   Supposto che la funzione rappresenti il valore numerico dell'intensità (espressa in Newton) di una forza che agisce lungo l'asse delle ascisse (ove x rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$.

   (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $K - \cos x = t$).

3.68. Anno scolastico 1993-1994

3.68.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, è assegnata la curva k di equazione:
$$y = \frac{x^2}{2} + \log|x+1|.$$
Disegnare un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi.
Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali.
Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata da k, dall'asse x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$.
Stabilire infine quale delle due aree precedenti è la maggiore.
2. Una piramide ha per base il triangolo ABC, isoscele e rettangolo in A, ed ha per altezza il segmento $\overline{\mathsf{AV}}$. Inoltre la faccia VBC forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo $\overline{\mathsf{VB}}$ è lungo $2h\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza nota.
Calcolare la distanza del vertice A dal piano della faccia VBC e trovare per quale valore di h tale distanza vale $4\sqrt{2}$.
Verificato che questo valore di h è 4, con riferimento ad esso secare la piramide con un piano parallelo alla base ABC e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza x.
Studiare, in rapporto alla questione geometrica, la funzione $f(x)$ ricavata e tracciarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$.
Calcolare infine quanti, fra i punti della regione piana compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse x, escluso il contorno, hanno entrambe le coordinate intere.
3. Considerato un triangolo ABC, isoscele sulla base $\overline{\mathsf{BC}}$, indicare con D il piede della sua altezza condotta per C e costruire il triangolo ECD, isoscele sulla base $\overline{\mathsf{CD}}$ e simile a quello dato, in modo che il punto E cada dalla stessa parte di A rispetto a $\overline{\mathsf{BC}}$. Sia:
$$|\overline{\mathsf{BC}}| = 4 \qquad \text{e} \qquad |\overline{\mathsf{CD}}| = 2\sqrt{3}.$$
   a) Dimostrare che l'angolo $\mathsf{E\widehat{C}B}$ è retto.
   b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza K passante per i punti A, C, D.
   c) Spiegare perché K passa pure per E.
   d) Detto F il punto in cui K seca ulteriormente $\overline{\mathsf{CB}}$, calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi DF di K divide il quadrilatero ABCE.

3.68.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Studiare le funzioni:
$$y = x^3 + 1 \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{x^3 + 1}$$
e disegnare i loro grafici, rispettivamente K' e K'', nello stesso piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

   Successivamente, tra i segmenti intercettati dalla regione piana R delimitata da K' e K'' su una parallela all'asse y, determinare quello di lunghezza massima.

   Calcolare infine il volume del solido generato da tale regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

2. Considerato il rettangolo ABCD, il cui lato $\overline{AB}$ è lungo a, condurre per B la perpendicolare alla retta AC e chiamare H ed E i punti in cui essa seca le rette AC e AD nell'ordine. Condurre quindi per H la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto P tale che:
$$|\overline{HP}| = 6 \cdot |\overline{AE}|.$$
Esprimere il volume della piramide, avente per vertice il punto P e per base il quadrilatero HDEC, in funzione della lunghezza x del segmento $\overline{BH}$.

   Studiare, indipendentemente dalla questione geometrica, la funzione $f(x)$ fornita dall'espressione del volume suddetto quando $a = 1$ e disegnarne il grafico G in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

   Calcolare infine l'area di ciascuna delle due regioni piane delimitate da G e dalla retta di equazione $4y - 9 = 0$.

3. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = \frac{x - a}{2x - a}$$
dove a è un parametro reale non nullo.

   a) Dimostrare che esse hanno tutte in comune un punto A ed esso soltanto.

   b) Tra le curve considerate, determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza
$$\frac{4}{3}\sqrt{10}$$
sulla retta passante per A e avente coefficiente angolare 3.

   c) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve trovate e dalla retta di equazione $x = 1$.

3.69. Anno scolastico 1994-1995

3.69.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Considerato il triangolo equilatero ABC, chiamare:
   - C', C'' i punti che dividono $\overline{\mathsf{AB}}$ in tre parti congruenti ($\overline{\mathsf{AC}}' < \overline{\mathsf{AC}}''$);
   - A', A'' i punti che dividono $\overline{\mathsf{BC}}$ in tre parti congruenti ($\overline{\mathsf{BA}}' < \overline{\mathsf{BA}}''$);
   - B', B'' i punti che dividono $\overline{\mathsf{CA}}$ in tre parti congruenti ($\overline{\mathsf{CB}}' < \overline{\mathsf{CB}}''$).

   Indicare quindi con:
   - L il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{AA}}'$ e $\overline{\mathsf{BB}}''$;
   - M il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{AA}}'$ e $\overline{\mathsf{CC}}''$;
   - N il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{BB}}'$ e $\overline{\mathsf{CC}}''$;
   - P il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{BB}}'$ e $\overline{\mathsf{AA}}''$;
   - Q il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{CC}}'$ e $\overline{\mathsf{AA}}''$;
   - R il punto intersezione dei segmenti $\overline{\mathsf{CC}}'$ e $\overline{\mathsf{BB}}''$.

   a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono LMNPQR è 1/10 di quella del triangolo ABC.

   b) Ammesso che l'area di tale esagono sia
   $$\frac{9}{10}h^2\sqrt{3},$$
   dove h è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta NR.

   c) Supponendo nota la formula:
   $$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$
   che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

2. Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti $\overline{\mathsf{AE}}$, $\overline{\mathsf{BF}}$, $\overline{\mathsf{CG}}$ sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.

   Sullo spigolo $\overline{\mathsf{BF}}$ prendere un punto P tale che: $|\overline{\mathsf{BP}}| = x$.

a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale $\overline{\mathrm{AG}}$ è espressa dalla seguente funzione:

$$y=\sqrt{\frac{2}{3}(x^2-x+1)}.$$

b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti.

c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x=h$ (con $h>0$), calcolare per quale valore di h questo volume è

$$\frac{16}{9}\pi.$$

3. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione:

$$y=\sin x+\frac{1}{4\sin x}.$$

a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.

b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione $y=1$.

N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione

$$\frac{1}{\sin x}$$

si suggerisce di porre

$$\tan\frac{x}{2}=t.$$

3.69.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Nel parallelepipedo rettangolo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD ed EFGH sono opposte e i segmenti $\overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{CG}}$ sono spigoli. Inoltre:

$$|\overline{\mathrm{AB}}|=3x \qquad , \qquad |\overline{\mathrm{AD}}|=4x \qquad , \qquad |\overline{\mathrm{A}}|E=2a-x$$

essendo a una lunghezza nota ed x una lunghezza incognita.

Chiamato P il piede della perpendicolare condotta da A alla retta FH, considerare il poliedro Σ avente per vertici i punti A, B, F, E, P.

Calcolare il valore di x che rende massimo il volume di Σ, il valore di a per il quale questo volume massimo è uguale a $128/75\,\mathrm{cm}^2$ e, infine, per tale valore di a, l'area della superficie del solido Σ di volume massimo.

2. Studiare la funzione:
$$y = \sqrt[3]{x^2+1}$$
e disegnarne il grafico Γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$. Verificato che Γ ha due flessi, F' ed F'', calcolare l'area del triangolo di vertici O, F', F''.

   Trovare i due interi consecutivi entro i quali è compresa quest'area.

   Calcolare infine il volume del solido generato dal triangolo $\mathsf{OF'F''}$ quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

3. È assegnata l'equazione:
$$y = -ax^2 + bx + c$$
dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi.

   Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale $\mathsf{O}xy$, interseca l'asse x nei punti O, A ed ha vertice nel punto V in modo che:

   — il triangolo OAV sia rettangolo,

   — il segmento parabolico individuato dalla corda OA generi un solido di volume
$$\frac{128\pi}{15}$$
   quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

   Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni piane in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.

3.70. Anno scolastico 1995-1996

3.70.1. Sessione ordinaria

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, sono assegnate le parabole di equazione:
$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$$
dove a è un numero reale positivo.

   Tra di esse determinare la parabola p che, con la sua simmetrica q rispetto all'origine O, delimita una regione di area $128/3$.

   Constatato che per la parabola p risulta $a = 2$, calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole p, q nel loro punto comune di ascissa positiva.

Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di un parallelogramma e calcolarne l'area.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva k di equazione:
$$y = \frac{x^2}{4-x^3}.$$
Dopo aver studiato la funzione
$$f x) = \frac{x^2}{4-x^3}$$
(dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k.

   Indicata con t la tangente a k parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t.

   A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni:

   a) Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.
   b) Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

   Dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

3. Considerato il rettangolo ABCD, il cui lato $\overline{AD}$ è lungo $8a$, dove a è una lunghezza nota, sia M il punto medio del lato $\overline{AB}$. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per M, prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi col piano del rettangolo un angolo α tale che
$$\tan \alpha = \frac{3}{4}.$$
Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base ABCD è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$, calcolare la lunghezza di $\overline{AB}$.

   Constatato che tale lunghezza è $5a$, condurre un piano σ parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ per la quale il volume di tale prisma risulta massimo.

   A completamento del problema, dimostrare che se i numeri reali positivi x, y variano in modo che la loro somma si mantenga costante, allora il prodotto $x^2 \cdot y$ è massimo quando risulta $x = 2y$.

3.70.2. Sessione suppletiva

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = \frac{2x^2 + ax + b}{x^3}$$
dove a, b sono parametri reali.

   Trovare quale relazione lega questi parametri quando le curve considerate hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e stabilire a quali altre condizioni devono soddisfare a e b affinché tali punti, quando esistono, abbiano ascisse dello stesso segno.

   Tra le curve assegnate determinare la curva k avente gli estremi relativi nei punti A, B di ascisse 1 e 3 rispettivamente e disegnarne l'andamento.

   Calcolare infine l'area della regione piana delimitata dalla curva k e dalla retta $y = q$, dove q è l'ordinata del punto B.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$
dove a, b, c sono numeri reali.

   Determinare tra queste le due curve k_1 e k_2 che passano per l'origine e per il punto $A(2,0)$ e sono tangenti all'asse delle ascisse rispettivamente in O e in A.

   Disegnare l'andamento di k_1 e di k_2.

   Considerata la regione piana R delimitata dagli archi di k_1 e k_2 aventi gli estremi in O e in A, calcolarne l'area e trovare tra le sue corde parallele all'asse delle ordinate quella di lunghezza massima. Calcolare poi l'area del quadrilatero convesso avente per vertici gli estremi di questa corda e i punti O e A.

   Verificare che le equazioni delle due curve k_1 e k_2 si trasformano una nell'altra con la sostituzione
$$\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$
ed esprimere questa proprietà in termini geometrici.

3. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, risulta:
$$|\overline{AB}| = a \qquad , \qquad \sin A\widehat{B}C = \frac{4}{5},$$
dove a è una lunghezza nota.

   Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimere l'area Σ del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza x dell'angolo $B\widehat{A}D$. Constatato che si ha:
$$S = \frac{a^2}{6}\left(4\sin^2 x + 3\sin x \cos x\right),$$

studiare questa funzione e disegnarne l'andamento con riferimento alla questione geometrica. Utilizzare il disegno ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area Σ risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale.

Determinare infine il perimetro del triangolo ABD per il quale è massima l'area Σ.

3.71. Anno scolastico 1996-1997

3.71.1. Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza nota r ed una parabola p che seca k nei punti A e B e passa per il suo centro C. Inoltre l'asse di simmetria della parabola è perpendicolare alla retta AC e la corda $\overline{AB}$ è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in k. Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy:

   a) determinare l'equazione della parabola p;

   b) calcolare il volume del solido generato, con una rotazione completa attorno alla retta AC, dalla regione piana delimitata dai segmenti di rette $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e dall'arco BC della parabola p;

   c) considerata la retta t, tangente alla parabola p e parallela alla retta AB, trovare la distanza delle rette t ed AB;

   d) dopo aver dimostrato analiticamente che p e k non hanno altri punti comuni oltre ad A e B, calcolare le aree delle regioni piane in cui p divide il cerchio delimitato da k.

2. Sono assegnate le funzioni in x:
$$y = \frac{x^4 + ax^2 + b}{x^2 + 1}$$
   dove a, b sono parametri reali.

   a) Fra tali funzioni indicare con $f(x)$ quella per cui la curva Γ di equazione $y = f(x)$, disegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, soddisfi alle seguenti condizioni:

      — la retta di equazione $y = 1$ sechi Γ in due punti e sia tangente ad essa in un punto;

      — l'asse x sia tangente a Γ in due punti distinti.

   b) Disegnare l'andamento di Γ.

   c) Calcolare l'area della regione piana delimitata da Γ e dall'asse x.

   d) Calcolare:
$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x.$$

3. Considerare i coni circolari retti in cui è uguale ad una lunghezza assegnata la somma del doppio dell'altezza col diametro della base.

   Fra tali coni determinare quello di volume massimo e stabilire se ha anche la massima area laterale.

   Nel cono di volume massimo inscrivere poi il cilindro circolare retto avente la base sul piano di base del cono e volume massimo.

   A completamento del problema, considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, e detta $f(x)$ decrescente in I se $x' < x''$ implica $f(x'') > f(x')$ per ogni x', x'', dimostrare il seguente teorema:

   Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo I. Condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia decrescente in I è che risulti $f'(x) < 0$ per ogni x appartenente ad I.

3.71.2. Sessione suppletiva

Il candidato svolga a suo piacimento due soli problemi scelti tra i tre proposti. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data l'equazione
$$y = ax^2 + bx + c$$
   rappresentata in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali da parabole con asse parallelo all'asse delle y, determinare, in funzione del coefficiente a, i coefficienti b e c che individuano la famiglia Γ delle parabole passanti per $\mathsf{A}(1,1)$ e $\mathsf{B}(2,0)$.

   Determinare e rappresentare nel piano cartesiano il luogo dei vertici delle parabole della famiglia Γ.

   Considerate le due parabole γ_1, e γ_2, della famiglia Γ aventi vertici rispettivamente in A e in B, calcolare il rapporto tra l'area S della regione di piano racchiusa tra le due parabole e l'area R del quadrilatero determinato dalle tangenti in A e in B alle due parabole.

   Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse delle x la superficie delimitata, oltre che dall'asse x stesso, dall'arco OA (essendo O l'origine degli assi cartesiani) della parabola γ_1 e dall'arco AB della parabola γ_2.

2. Data una semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$ si tracci la tangente t a detta semicirconferenza nel punto A.

   Preso un punto P sulla semicirconferenza si tracci la perpendicolare PH alla retta t. Dimostrare che la semiretta PA è bisettrice dell'angolo $\mathsf{H\widehat{P}O}$.

   Posto $|\overline{\mathsf{PH}}| = x$ esprimere in funzione di x l'area y del quadrilatero AOPH. Determinare per quale valore di x l'area $y = f(x)$ è massima.

   Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione della curva, che rappresenta la funzione $y = f(x)$, attorno all'asse delle x sapendo che $0 \le x \le 2$.

3. Due circonferenze concentriche γ_1 e γ_2 di centro C hanno raggio rispettivamente uguale a x e a 1 , con $x < 1$.

   Da un punto P di γ_2 tracciare le tangenti a γ_1. Siano Q e R i due punti di tangenza. Determinare la funzione $y = f(x)$ che rappresenta l'area del triangolo PQR in funzione di x.

   Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione $y = f(x)$.

   Verificare che l'area è massima per $x = 1/2$ e dimostrare che in tale caso il triangolo PQR è equilatero.

   Calcolare l'area della superficie di piano delimitata dalla curva rappresentante la funzione $y = f(x)$ e dall'asse x. (Si consiglia di integrare per sostituzione ponendo $1-x^2 = t^2$).

3.72. Anno scolastico 1997-1998

3.72.1. Sessione ordinaria

Il candidato scelga a sua piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = ax^3 + 3x + b$$
   dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.
   a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti.
   b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.
   c) Controllato che la curva γ si ottiene per $a = -1/2$, disegnarne l'andamento.
   d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x.
2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva C' di equazione:
$$y = \frac{x^2-1}{2x}.$$
   a) Studiarla e disegnarne l'andamento, indicando con A e B i punti in cui la curva seca l'asse x ($x_A > x_B$).
   b) Trovare l'equazione della circonferenza C'' tangente a C' in A e passante per B.
   c) Disegnare C'' sullo stesso piano di C' dopo aver determinato il raggio e il centro di C' e inoltre le coordinate dell'ulteriore punto in cui C'' seca C'.
   d) Determinare l'angolo sotto cui C' e C'' si secano in B.
   e) Calcolare le aree delle regioni in cui C' divide il cerchio delimitato da C''.

3. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $2a$, dove a è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a $4/5$.

   a) Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con x la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di x il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta t.

   b) Verificato che risulta:
   $$V(X)=\frac{1}{2}\pi a^3(4\sin x+3\cos x)$$
   con x appartenente ad un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

   c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove k è un parametro reale assegnato.

   d) Completare la risoluzione dimostrando, col metodo preferito, che il volume V di un tronco di cono di raggi R ed r ed altezza h è espresso dalla seguente formula:
   $$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr).$$

3.72.2. Sessione suppletiva

Il candidato scelga a suo piacimento due dei problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sia data la funzione
   $$f(x)=(x+1)e^{(1-x)}.$$
   Il candidato:

   a) studi la funzione $f(x)$;

   b) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, disegni la curva C di equazione $y=f(x)$;

   c) determini l'area della regione finita di piano compresa tra la curva C, l'asse delle ascisse e le due rette, parallele all'asse delle ordinate e passanti rispettivamente per il punto $A(x_0, f(x_0))$, essendo x_0 il valore di x in cui $f(x)$ assume valore estremo relativo, e per il punto $B(x_1, f(x_1))$, essendo x_1 il valore di x in cui $f(x)$ ha un flesso.

2. Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ la sua circonferenza massima. Sulla semiretta di origine O, perpendicolare al piano di Γ e che interseca S, si consideri il punto B tale che $|\overline{OB}|=\sqrt{3}$.

   Il candidato:

   a) individui il punto C del segmento $\overline{OB}$ che sia il centro dell'ulteriore cerchio di intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;

b) detto P un punto del segmento $\overline{OC}$ la cui distanza da O sia x, scriva in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente i cerchi Γ_1, e Γ_2 ottenuti dall'intersezione con S e con Σ del piano per P, perpendicolare ad $\overline{OC}$;

c) considerata la corona circolare W delimitata da Γ_1, e Γ_2, determini il volume $V(x)$ del solido delimitato da W e dalle superfici laterali dei coni anzidetti;

d) disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = V(x)$.

3. In una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ è inscritto un triangolo rettangolo ABC, retto in C ed avente il cateto $\overline{CB}$ uguale ai doppio del cateto $\overline{AC}$. Sia P un punto dell'arco di estremi A e B, che non contiene C.

   II candidato:

   a) determini i cateti del triangolo ABC ed i valori di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$, essendo $\alpha = C\widehat{A}B$;

   b) indicato con ϑ l'angolo $C\widehat{A}P$, esprima in funzione di $x = \cot\vartheta$ il rapporto:

$$R(x) = \frac{4 \cdot |\overline{AB}|^2 - 4 \cdot |\overline{CP}|^2}{5 \cdot |\overline{PB}|^2 + 3 \cdot |\overline{CP}|^2}$$

   c) tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva di equazione $y = R(x)$ e descriva l'andamento di $R(x)$;

   d) trovi i valori di x quando y assume il valore 1/3.

3.73. Anno scolastico 1998-1999

3.73.1. Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

   a) Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:

      — necessaria ma non sufficiente,

      — sufficiente ma non necessaria,

      — necessaria e sufficiente

      per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

   b) Posto

$$f(x) = \frac{x^3}{ax + b}$$

dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva γ di equazione cartesiana $y = f(x)$ abbia un estremo relativo nel punto di coordinate

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right).$$

c) Controllato che la curva γ cercata si ottiene per $a = 2$, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$.

d) Nello stesso piano $\mathsf{O}xy$ disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato in particolare le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

e) Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r e una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ è

$$\frac{8}{3}r^2.$$

Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani $\mathsf{O}xy$:

a) determinare l'equazione della circonferenza k,

b) determinare l'equazione della parabola p;

c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;

d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;

e) stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a

$$\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

3. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio $\overline{\mathsf{AB}}$, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $\mathsf{T}\hat{\mathsf{A}}\mathsf{B}$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

a) Esprimere in funzione di x il rapporto:

$$f(x) = \frac{|\overline{\mathsf{CP}}| + |\overline{\mathsf{CQ}}|}{|\overline{\mathsf{AT}}|}.$$

b) Studiare la funzione $f(x)$ ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnare il grafico in un piano cartesiano ai fini della soluzione del punto c).

c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.

d) Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x + 1}.$$

e) Stabilire che risulta:

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

3.73.2. Sessione suppletiva

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data una semicirconferenza di centro O e di diametro $|\overline{AB}| = 2$, si assuma su di essa un punto C in modo ohe l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo, siano:

   — $x = tg\frac{\varphi}{2}$,

   — $y =$ raggio della circonferenza tangente tanto al diametro quanto, nel punto C, alla semicirconferenza.

   Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio $\overline{OC}$, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $y = f(x)$ senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.

2. Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di $16\pi\,\text{cm}^3$. II candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale.

   Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.

   Considerate infine le formule:

   $$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \qquad , \qquad S = \pi x^2$$

   che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

3. L'informazione che si ha della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ è tutta concentrata nel punto di ascissa $x = 5$ ed è:

   $$f(5) = 0 \qquad , \qquad f'(5) = -1 \qquad \text{e} \qquad f''(5) = -1/2.$$

   — determinata la parabola e detti A e B i suoi punti d'intersezione con l'asse x calcolare l'area del triangolo ABC ove con C si è denotato il punto d'incontro delle tangenti alla parabola in A e in B e stabilire il rapporto tra tale area e quella del segmento parabolico di base $\overline{AB}$;

   — stabilire altresì il rapporto tra i volumi descritti dalle aree prima considerate per effetto della loro rotazione completa attorno all'asse x.

3.73.3. Sessione straordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. È assegnata, nel piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva g di equazione

$$y = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

   Il candidato

   a) studi e disegni il grafico di g e quello della curva g_1 simmetrica di g rispetto alla retta $y = 1$;

   b) determini k ($k > 0$) in modo tale che la regione limitata da g e g_1 e dalle rette $x = \pm k$ sia equivalente al cerchio di raggio unitario;

   c) dica in che cosa consista il problema della *quadratura del cerchio* e perché venga definito un *problema classico*.

2. È assegnato un tronco di cono il cui volume è doppio di quello di una sfera di raggio r. Stabilire se tale tronco può essere circoscritto alla sfera e in caso affermativo esprimere i raggi delle basi del tronco in funzione del raggio r della sfera. Generalizzare la questione ponendo uguale a k il rapporto tra il volume del tronco di cono e quello della sfera; stabilire le condizioni di risolubilità del problema illustrando altresì il caso $k = 3/2$.

3. Della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ si hanno le seguenti informazioni, tutte localizzate nel punto $x = 0$: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

   a) Determinata la parabola, si scrivano le equazioni delle tangenti ad essa condotte per il punto P dell'asse y di modo che valga $60°$ l'angolo $A\widehat{P}B$, essendo A e B i rispettivi punti di tangenza;

   b) accertato che il punto P ha ordinata $1/4$, si scriva l'equazione della circonferenza passante per A, B e P;

   c) si calcolino le aree delle due parti in cui la circonferenza risulta divisa dall'arco di parabola di estremi A e B.

3.74. Anno scolastico 1999-2000

3.74.1. Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$(1) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = 2 \qquad \text{e} \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = -5.$$

a) Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$$

dire se le condizioni (1) sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

b) Posto:

$$f(x) = ax^3 + bx + c,$$

dove a, b, c sono parametri reali con $a \neq 0$, determinare le curve di equazione $y = f(x)$ che soddisfano alle condizioni (1).

c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima.

d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata —4.

e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

2. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

   a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

   b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato $\overline{AD}$ prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno

   $$\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

   Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

   c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

   d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = a/2$.

3. Il candidato dimostri i seguenti enunciati:

   a) Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

   b) Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

   Il candidato chiarisca, infine, il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

3.74.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di due soli temi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso: 5 ore.

1. Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento $\overline{AB}$, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

   a) le coordinate di A, B e C;

   b) l'equazione della parabola;

   c) l'equazione del cerchio inscritto nel triangolo ABC.

2. II candidato:

   — illustri il teorema di de L'Hopital e lo applichi per dimostrare che:

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0;$$

   — determini i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

   $$\int_0^1 e^{mx+n}\,dx=\frac{e^n}{m}$$

   e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente;

   — interpreti geometricamente la questione posta sopra.

3. Si consideri la successione di termine generale

   $$a_n=\frac{f(n)}{3^n},$$

   dove:

   $$f(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{n}.$$

   a) Dimostrare che $f(n)=2^n$.

   b) Determinare il più piccolo valore di n per cui risulta: $a_n<10^{-10}$.

   c) Spiegare perché, se n è dispari, risulta:

   $$f(n)=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right],$$

   fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula cui si fa ricorso. Scrivere un'espressione equivalente di $f(n)$ quando n è pari.

d) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} a_n$$

e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

e) Esiste

$$\lim_{n \to 10^{10}} a_n?$$

Motivare esaurientemente la risposta.

3.74.3. Sessione straordinaria

La prova richiede lo svolgimento di due soli temi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso: 5 ore.

1. É assegnata, nel piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva γ di equazione

$$y = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Il candidato

a) Studi e disegni il grafico di γ e quello della curva γ_1 simmetrica di γ rispetto alla retta $y = 1$.

b) Determini k ($k > 0$) in modo che la regione limitata da γ e γ_1 e dalle rette $x = \pm k$ sia equivalente al cerchio di raggio unitario.

c) Dica in cosa consista il problema della *quadratura del cerchio* e perché venga definito un *problema classico*.

2. É assegnato un tronco di cono il cui volume è doppio di quello della sfera di raggio r. Stabilire se tale tronco può essere circoscritto alla sfera e, in caso affermativo, esprimere i raggi delle basi del tronco in funzione del raggio r della sfera. Generalizzare la questione ponendo uguale a k il rapporto tra il volume del tronco di cono e quello della sfera; stabilire le condizioni di risolubilità del problema illustrando altresì il caso $k = 3/2$.

3. Della parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ si hanno le seguenti informazioni, tutte localizzate nel punto $x = 0$:

$$f(0) = 1 \qquad , \qquad f'(0) = 0 \qquad , \qquad f''(0) = 2.$$

a) Determinata la parabola, si scrivano le equazioni delle tangenti ad essa condotte per il punto P dell'asse y in modo che valga 60° l'angolo $A\widehat{P}B$, essendo A e B i rispettivi punti di tangenza;

b) accertato che il punto P ha ordinata 1/4, si scriva l'equazione della circonferenza passante per A, B e P.

c) si calcolino le aree delle due parti in cui la circonferenza risulta divisa dall'arco di parabola di estremi A e B.

3.75. Anno scolastico 2000-2001

3.75.1. Esempio di prova - 1

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano sono assegnate una circonferenza k di diametro $\overline{AB}$, lungo 2, e una parabola p passante per A e avente per asse di simmetria il diametro perpendicolare ad $\overline{AB}$. Si sa che la parabola divide il cerchio delimitato da k in due parti, la maggiore delle quali è 5 volte la minore.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani:

1. determinare l'equazione di k;
2. determinare l'equazione di p;
3. trovare le coordinate dei punti M ed N comuni alle curve k e p;
4. trovare le equazioni delle rette tangenti a p nei punti M ed N;
5. stabilire com'è situato rispetto alla circonferenza il punto in cui si secano le due rette tangenti trovate sopra.

Problema 2

Considerata una sfera di diametro $\overline{AB}$, lungo 2, per un punto P di tale diametro si conduca il piano α perpendicolare ad esso e si ponga uguale ad x la lunghezza di $\overline{AP}$.

1. Si calcoli in funzione di x la differenza $d(x)$ fra il volume del cono avente altezza $\overline{AP}$ e base il cerchio sezione di α con la sfera e il volume del segmento sferico avente la medesima base e altezza $\overline{PB}$.
2. Controllato che risulta:
$$d(x) = \frac{\pi}{3}(2-x)(2x^2-x-2),$$
si studi la funzione $d(x)$ e se ne disegni il grafico.
3. Si utilizzi questo grafico per calcolare i valori di x per i quali $d(x) = k$, dove k è un parametro reale assegnato.
4. Si trovi, in particolare, la posizione di P per cui $d(x)$ è massima.

Questionario

1. Considerata la successione di termine generale
$$a_n = 3^{\frac{f(n)}{n}},$$
dove
$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n},$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)dx = -5.$$

Di ciascuno dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}dx, \quad \int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$$

dire se le condizioni assegnate sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

3. Si dimostri la formula della derivata del prodotto di due funzioni:

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. Si dimostri che il volume V di un segmento sferico ad una base, di raggio r ed altezza h è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2).$$

5. Si dimostri la formula che esprime la derivata, rispetto ad x, della funzione x^n, dove n è un intero qualsiasi non nullo.

6. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si determinino i lati del trapezio sapendo che il solido generato da esso quando ruota di un giro intorno alla base maggiore ha il minimo volume.

7. Si conducano le rette tangenti ad una parabola in due suoi punti distinti A e B. Si dimostri quindi la relazione che sussiste fra l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco $\overset{\frown}{AB}$ di parabola e dalle due tangenti suddette e l'area del segmento parabolico individuato dalla corda $\overline{AB}$, nel caso particolare in cui la retta AB è perpendicolare all'asse di simmetria della parabola.

8. Si calcoli il valore del seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

9. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativo oppure non ha estremanti.

10. In un piano cartesiano, l'insieme dei punti verificanti la condizione:

$$xy - 3x + 5x - 15 = 0$$

è costituito:

a) dai punti $(5,0)$ e $(0,-3)$;

b) dai punti $(-5,0)$ e $(0,3)$;

c) dall'intersezione delle rette di equazioni $x=-5$ e $y=3$;

d) dall'unione delle rette di equazioni $x=-5$ e $y=3$;

e) da una figura diversa dalle precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla fornendo una esauriente motivazione.

3.75.2. Esempio di prova - 2

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Della parabola $f(x)=ax^2+bx+c$ si hanno le seguenti informazioni, tutte localizzate nel punto $x=0$: $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$.

1. Determinata la parabola, si scrivano le equazioni delle tangenti ad essa condotte per il punto P dell'asse y di modo che valga 60° l'angolo $\widehat{APB}$, essendo A e B i rispettivi punti di tangenza;
2. accertato che il punto P ha ordinata 1/4, si scriva l'equazione della circonferenza passante per A, B e P;
3. si calcolino le aree delle due parti in cui la circonferenza risulta divisa dall'arco di parabola di estremi A e B.

Problema 2

Vincenzo Viviani (1622-1703) nell'opera *De Maximis et Minimis*, data alle stampe nel 1659, avvertì la necessità di inserire un problema a cui aveva dato soluzione e che era stato oggetto di studio anche da parte di altri più noti e valenti matematici del tempo.

Il problema è il seguente: "Dato un triangolo ABC, i cui angoli misurano ciascuno meno di 120°, trovare un punto X tale che la somma $\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}$ sia minima".

La soluzione di Viviani, trovata, egli dice, non senza iterati sforzi, è questa: X è il punto, interno al triangolo, che "vede" o proietta i lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, sotto angoli di 120°.

Il problema conserva inalterata la sua importanza in quanto se i vertici A, B, C rappresentano, ad esempio, tre villaggi o città che si vogliono collegare tra loro, ragioni di convenienza potrebbero consigliare di realizzare la rete stradale minima.

Il candidato:

1. localizzi il punto X nell'ipotesi semplificatrice che la retta passante per C e per il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ sia perpendicolare a tale segmento;
2. dimostri che il punto X che realizza il minimo appartiene al segmento $\overline{CM}$;
3. introdotto un sistema di coordinate tale che C sia l'origine e CM coincida con l'asse x positivo e indicate con (a,b) e $(x,0)$ rispettivamente le coordinate di A e di X, dimostri che

$$s(x) = |\overline{XA}| + |\overline{XB}| + |\overline{XC}|$$

è data dalla formula:

$$s(x) = x + \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$$

4. dimostri che se $a \leq b/\sqrt{3}$, $s(x)$ assume il minimo in $x = 0$, mentre se $a > b/\sqrt{3}$, $s(x)$ assume il minimo in $x = a - b/\sqrt{3}$;
5. interpreti geometricamente il risultato confrontandolo con l'enunciato e la soluzione, più generale, di Viviani.

Questionario

1. Illustrare il teorema di *l'Hôpital* e applicarlo per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

2. Determinare i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{m}$$

e che l'integrale fra 1 e 2 della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente.

3. Interpretare geometricamente la questione posta sopra.
4. Illustrare il problema classico della *quadratura del cerchio*, la cui impossibilità Dante Alighieri così evocava poeticamente:

   "Qual è 'l geometra che tutto s' affigge
   per misurar lo cerchio, e non ritrova,
   pensando, quel principio ond' elli indige,
   ...."

   (Paradiso, c. XXXIII, vv.133-135).

5. Dare un esempio di funzione $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$ ed ivi continua, tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3.$$

6. Determinare al variare del parametro k il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - kx + 2 - k = 0$$

7. Considerate le formule

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad \text{e} \quad S = \pi x^2$$

che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

8. Dimostrare, utilizzando il teorema di Rolle, che se l'equazione:
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$$
9. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una data sfera mostrare che quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.
10. Chiarire il significato di $n!$ (fattoriale di n) e il suo legame con i coefficienti binomiali.

3.75.3. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$
dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1, 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

Problema 2
Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato $\overline{BC}$ tali che: $\overline{RD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti $\overline{AD}$ ed $\overline{AE}$.

a) Dimostrare che il quadrilatero DENM è la quarta parte del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area del quadrilatero DENM sia
$$\frac{45}{2}a^2$$

dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $\mathsf{A\widehat{B}C}$ sia acuto e si abbia inoltre: $|\overline{\mathsf{AB}}| = 13a$, $|\overline{\mathsf{BC}}| = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

Questionario

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{2x\mathrm{e}^x}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli $\overline{\mathsf{AA'}}$, $\overline{\mathsf{BB'}}$, $\overline{\mathsf{CC'}}$, $\overline{\mathsf{DD'}}$, in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e $\mathsf{A'B'C'D'}$. Sia E il punto medio dello spigolo $\overline{\mathsf{AB}}$. I piani $\mathsf{ACC'A'}$ e $\mathsf{D'DE}$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

   a) area massima e perimetro massimo;

   b) area massima e perimetro minimo;

   c) area minima e perimetro massimo;

   d) area minima e perimetro minimo.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:
$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$
dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione
$$\frac{\sin x - \cos x}{x}$$
quando x tende $+\infty$:

   a) è uguale a 0;
   b) è uguale a 1;
   c) è un valore diverso dai due precedenti;
   d) non è determinato.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione
$$\frac{x + \sin x}{x - \cos x}.$$
Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hopital.

3.75.4. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Si consideri la funzione reale f_m, di variabile reale x tale che:
$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m}$$
dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

Problema 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$ dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che

$$\frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{|\overline{\mathsf{BC}}|} = \frac{3}{5}$$

e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo γ tale che

$$\sin\gamma = \frac{12}{13}.$$

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è
$$\frac{24}{5}a,$$
calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

Questionario

1. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

   A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.

   B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

   Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

   a) A vera - B vera;

   b) A vera - B falsa;

   c) A falsa - B vera;

   d) A falsa - B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli $\overline{\mathsf{AA}'}$, $\overline{\mathsf{BB}'}$, $\overline{\mathsf{CC}'}$, $\overline{\mathsf{DD}'}$ in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e $\mathsf{A'B'C'D'}$. Indicato con E il punto medio dello spigolo $\overline{\mathsf{AB}}$, sia CF la retta perpendicolare a $\overline{\mathsf{DE}}$ condotta per C. I piani $\mathsf{D'DE}$ e $\mathsf{C'CF}$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \log a$.
6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.
7. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.
9. Calcolare la derivata della funzione $\sin 2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata.
10. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

    a) necessaria e sufficiente;

    b) necessaria ma non sufficiente;

    c) sufficiente ma non necessaria.

    Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3.76. Anno scolastico 2001-2002

3.76.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+3}.$$

a) Determinare per quali valori di x questa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1. (N.B. *Si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

Problema 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

$$(1) \qquad a+2x \quad , \quad a-x \quad , \quad 2a-x$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze (1) si possano considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, tra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze (1), ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = 4$ le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo od ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che $\overline{BC}$ sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che $\overline{AD}$ sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

Questionario

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $A' = 2 \cdot A''$. Calcolare il valore del rapporto
$$\frac{V'}{V''}.$$

3. Considerati i numeri reali a, b, c, d - comunque scelti - se $a > b$ e $c > d$ allora:
   a) $a + d > b + c$;
   b) $a - d > b - c$;
   c) $ad > bc$;
   d) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4. Si consideri la seguente proposizione: *la media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica*. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5. Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:
$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$
   sia un'identità.

6. Si consideri la funzione:
$$f(x) = (2x - 1)^7 (4 - 2x)^5.$$
   Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $1/2 \leq x \leq 2$.

7. Calcolare la derivata, rispetto ad x della funzione $f(x)$ tale che:
$$f(x) = \int_x^{x+1} \log t \, dt \qquad , \qquad \text{con } x > 0.$$

8. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1, 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1, 3[$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]1, 3[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(x) \leq 5$.

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:
$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$
   Tale luogo è costituito da:
   a) un punto;

b) due punti;

c) infiniti punti;

d) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a \qquad , \qquad \int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = b$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \log 2 \qquad , \qquad \int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \log 4.$$

3.76.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per x^2-1 si ottiene x come quoziente e x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2-1}$$

e disegnarne il grafico G in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo avere trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa 2.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a e b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

si calcoli una primitiva della funzione $f(x)$.

Problema 2

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:

— il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato $\overline{AB}$ perpendicolare alle basi del trapezio;

— lo spigolo $\overline{VA}$ è perpendicolare al piano di base del piramide;

— la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento $\overline{AB}$, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$ dove a è una lunghezza assegnata, e che $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AD}$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

Questionario

1. Si consideri la seguente equazione in x, y:

$$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$$

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

   a) è una circonferenza per ogni valore di k;

   b) è una circonferenza solo per $k < 1/2$;

   c) è una circonferenza solo per $k < 1/4$;

   d) non è una circonferenza qualunque sia k.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2. Considerata la funzione di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$$

dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a 1 e giustificare la risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = 2$ e $x = -1$; $f(-2) = 1$ e $f(1) = -2$.

   Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}\sin 2x, & \text{per } 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1+a}{\sin x}, & \text{per } -\dfrac{\pi}{2}<x<0, \end{cases}$$

   dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x=0$.

5. Un titolo in borsa ha perso ieri l'x% del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y%, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

6. Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7. Una primitiva della funzione

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+4}$$

   è:

   a) $\log\dfrac{x}{x+2}$;

   b) $\log\dfrac{x+2}{x}$;

   c) $\log\sqrt{x^2+2x}$;

   d) $\log\sqrt{2x^2+x}$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8. S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che

$$a_n=\frac{S_n}{2n^2},$$

   è:

   a) costante;

   b) crescente;

   c) decrescente.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9. Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10. Di due rette a e b, assegnate nello spazio ordinario, si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.

    a) É possibile che le due rette a, b siano parallele?
    b) É possibile che le due rette a, b siano ortogonali?
    c) Le due rette a, b sono comunque parallele?
    d) Le due rette a, b sono comunque ortogonali?

    Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

3.76.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Con riferimento ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto $(8,2)$ e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M e N in cui la bisettrice b del primo e terzo quadrante interseca la curva;

b) scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti M ed N;

c) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b;

d) dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno punti in comune oltre ad M e N, calcolare le aree delle regioni in cui la regione delimitata da k è divisa dalla parabola.

Problema 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy:

a) studiare le funzioni:
$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} \quad , \quad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$
e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento $\overline{OA}$ un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse delle y, sia massima la lunghezza del segmento $\overline{RS}$, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare l'area della regione finita di piano determinata dalle due curve.

Questionario

1. Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ e sia $x_0 \in D$: definire la continuità e discontinuità di $f(x)$ in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

2. In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M′ e N′ rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN′M′, fornendo una esauriente dimostrazione.

3. Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

4. In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ è assegnata l'iperbole di equazione
$$y = \frac{1}{x}.$$
Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $1/a$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

5. Dimostrare che la derivata della funzione $\log_\alpha x$ è la funzione
$$\frac{1}{x} \log_\alpha \mathrm{e},$$
dove e è la base dei logaritmi naturali.

6. Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per $k \to +\infty$.

7. Dopo aver definito il limite destro ed il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:
$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1.$$

8. Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

9. Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

10. Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e dalle permutazioni semplici su k oggetti.

3.77. Anno scolastico 2002-2003

3.77.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto un piano α contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana determinata dalla parabola e dalla retta EA ha area 3 cm^2.

Problema 2
É assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$$

dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnare il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo avere stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed avere fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1. Dopo avere fornito una definizione di *rette sghembe*, si consideri la seguente proposizione: "Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe". Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire la misura diretta della distanza $|\overline{\mathsf{AB}}|$. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza $|\overline{\mathsf{PB}}|$, è tuttavia possibile misurare la distanza $|\overline{\mathsf{AP}}|$. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e con B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza $|\overline{\mathsf{AB}}|$.

4. Il dominio della funzione
$$f(x)=\log\left(\sqrt{x+1}-(x-1)\right)$$
è l'insieme degli x reali tali che:

   a) $-1<x\leq 3$;
   b) $-1\leq x<3$;
   c) $0<x\leq 3$;
   d) $0\leq x<3$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione $2x^3-3x^2+2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione
$$f(x)=\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
è la funzione
$$f'(x)=x\mathrm{e}^{-x^4}.$$
Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:
$$1,\,2,\,3,\,\dots,\,n-1,\,n,$$
moltiplicarli combinandoli in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

   a) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;
   b) $\frac{1}{3}n\left(n^2-1\right)$;
   c) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$;
   d) $\frac{1}{24}n\left(n^2-1\right)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
   a) è divisibile per 2 e per 3;
   b) è divisibile per 2 ma non per 3;
   c) è divisibile per 3 ma non per 2;
   d) non è divisibile né per 2 né per 3.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.
10. Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3.77.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$$|\overline{AB}| = 3\,\text{cm};\ |\overline{AC}| = 2\,\text{cm};\ C\widehat{A}B = 60°.$$

Si tracci la bisettrice di $C\widehat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato $\overline{BC}$.

a) Si calcoli la lunghezza del lato $\overline{BC}$ e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.

b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di $\overline{AD}$ e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.

c) Si trovi sul lato $\overline{AD}$, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.

d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

Problema 2

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente gli spigoli delle basi e l'altezza del tronco di cono che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b e h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.

b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}\,\text{dm}^2$.

c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.

d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

Questionario

1. Tra i rettangoli aventi la stessa area di $16\,\mathrm{m}^2$ trovare quello di perimetro minimo.
2. Cosa si intende per *funzione periodica*? Quale è il periodo della funzione $f(x) = \sin x - 2\cos x$?
3. Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.
4. Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?
5. Dare una giustificazione delle formule
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad ; \qquad cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$
e utilizzarle per provare che:
$$\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$
6. Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.
7. Enunciare il Teorema del valor medio o di Lagrange (da *Giuseppe Luigi Lagrange* (1736-1813)) e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.
8. Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che
$$f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$
Quale è $f(x)$?
9. Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.
10. Definire gli asintoti - orizzontale, obliquo, verticale - di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3.77.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Viene assegnata la seguente equazione in x:
$$x^3 + 2x - 50 = 0.$$

a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\bar{x}$ nel campo reale.

b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $\quad z < \bar{x} < z + 1.$

c) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare, se esistono, i valori del parametro reale k, ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.

d) Stabilire se esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui la curva $C_{\bar{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

e) Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

Problema 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

$$6\,\text{cm}, \quad 10\,\text{cm}, \quad 4(4+\sqrt{5})\,\text{cm}.$$

a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile ad una circonferenza.

b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.

c) Dopo aver riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.

d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.

e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.

f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

Questionario

1. Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni. Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano la seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

(1) un punto; (2) due punti; (3) infiniti punti; (4) nessun punto.

3. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

4. Dire se è vero che risulta:

$$\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$$

per ogni x reale e giustificare la risposta.

5. Si consideri la funzione polinomiale in x:
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$
Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1 x$.
6. Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:
$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ a_{n-1} + n, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$
Calcolare a_{100}.
7. Considerata la successione di termine generale:
$$a_n = \frac{2}{3^n}$$
calcolare
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$
8. Considerata la funzione $f(x)$ tale che:
$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, \mathrm{d}t, \quad \text{con } x > 0,$$
determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.
9. Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:
$$V = \frac{1}{6}\pi h \left(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2\right).$$
Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.
10. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})\, \mathrm{d}t}{\sin^2 x},$$
essendo e la base dei logaritmi naturali.

3.78. Anno scolastico 2003-2004

3.78.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da $f(x) = 2x - 3x^3$.

a) Disegnate il grafico G di f.

b) Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.

c) Determinate c in modo che R ed S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.

d) Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto a $y = 4/9$.

Problema 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{\mathsf{BC}}$.

a) Dimostrate che la mediana relativa a $\overline{\mathsf{BC}}$ è congruente alla metà di $\overline{\mathsf{BC}}$.

b) Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.

c) Con $|\overline{\mathsf{BC}}| = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.

d) Determinate la misura approssimata, in radianti e in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

Questionario

1. Trovate due numeri a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale.
5. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad g(2) = 4.$$
Trovate una espressione di $g(x)$.
6. Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?
8. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

9. Calcolate
$$\int_0^1 \arcsin(x)\,dx.$$

10. Considerate gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

3.78.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione

$$y=\frac{2x(6-x)}{2+x}. \tag{1}$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo
$$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$$
dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.

d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

Problema 2

Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza $\overline{VH}$ della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato $\overline{AB}$. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che

$$\cos\varphi=\frac{3}{5}$$

e indicare con $\overline{EF}$ la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso ABEF è inscrivibile in una circonferenza γ.

b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?

c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide è divisa dal piano α.

d) Dopo avere riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, determinare l'equazione della circonferenza γ.

Questionario

1. La funzione
$$f(x)=\frac{3x-2\sin x}{2x-3\sin x}$$
è, per $x\to+\infty$, una forma indeterminata di tipo ∞/∞. Il limite della funzione per $x\to+\infty$

   a) non esiste;

   b) è $2/3$;

   c) è $3/2$;

   d) è un valore diverso da $2/3$, $3/2$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2. Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica
$$\sum_{k=5}^{n} k$$
non supera 10000.

3. Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a)>0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a)<0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a)=0$ ed $F''(a)<0$.

4. Risolvere la seguente disequazione in x:
$$(\log x)^2>\log\left(x^2\right).$$

5. Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x+y+z$ risulta:

   a) sempre maggiore di h;

   b) sempre minore di h;

   c) sempre uguale ad h;

   d) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'equazione $xy+px+qy+r=0$. Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7. Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

8. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

É allora possibile calcolare:

 a) $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$;

 b) $\int_0^3 f(3x)\,\mathrm{d}x$;

 c) $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$;

 d) $\int_0^1 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log\left(2x - \sqrt{4x-1}\right).$$

10. Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \sin\beta = \frac{24}{25}$$

 ne esistono:

 a) 0 , b) 1 , c) 2 , d) 3.

 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3.78.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento $\overline{\mathsf{VF}}$ sia lungo 1/2. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy:

a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

b) Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel primo quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento $\overline{RS}$, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a

$$\frac{8}{9}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

Problema 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

Questionario

1. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali, ed approssimati al secondo.
2. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso. Si puo concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
3. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x}).$$

4. Il limite di $\tan x$ per x tendente a $+\infty$:

   a) è $+\infty$;

   b) è $\frac{\pi}{2}$;

   c) non esiste;

d) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5. Dimostrare il seguente teorema: *Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a e che sia derivabile in a.*
6. Utilizzando il calcolo integrale dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.
7. Indica con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $1/2$ e ragione $1/2$, calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}.$$
8. Calcolare il valore della seguente somma $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$.
9. In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.
10. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrano i nostri due amici fra i primi tre classificati.

3.79. Anno scolastico 2004-2005

3.79.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 quesiti scelti nel questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione $y=6-x^2$.

a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.

b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y=6$.

c) Si determini il valore di k per cui la retta $y=k$ dimezza l'area di R.

d) Per $0<t<\sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.

e) Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Problema 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0,+\infty[$ da:
$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x=0,\\ \dfrac{1}{2}x^2(3-2\log x)+1, & \text{se } x>0,\end{cases}$$
e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

a) Si stabilisca se f è *continua e derivabile* in 0 .
b) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0, +\infty[$, un'unica radice reale.
c) Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
d) Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette $x = 1/n$ e $x = 1$.

Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°, \sin 36°$.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di carta. Se una lattina ha la capacità di $0,4$ litri, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero e di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)] come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. É un ottaedro regolare? Qual è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$\sin^2(35°) + \sin^2(55°),$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione
$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$
è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

3.79.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

— Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

— Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

a) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;

b) supposto che gli spigoli $\overline{\mathsf{AB}}$ e $\overline{\mathsf{MN}}$ siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;

c) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;

d) calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;

e) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

Problema 2

É assegnata la funzione

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$$

dove a è un parametro reale non nullo.

a) Dopo avere fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.

b) Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro $\overline{\mathsf{DA}}$.

c) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

d) Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

e) Dopo avere controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

Questionario

1. É dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.

   Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

2. Siano $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{AC}}$, $\overline{\mathsf{AD}}$ tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

3. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}.$$

Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \text{ intero qualsiasi}).$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ intero qualsiasi}).$$

É vero o falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4. Si consideri la seguente equazione in x:

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$$

dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5. Il limite della funzione

$$(1-x)^{(1/x)}$$

per $x \to 0$:

a) è uguale ad 1;

b) è uguale ad $+\infty$;

c) non esiste;

d) è uguale ad e;

e) è uguale ad 1/e,

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6. Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche:

$$f(1) = 1 \quad , \quad f'(1) = 0 \quad , \quad f''(1) < 0.$$

7. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Quale è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

8. É vero o falso che le due funzioni

$$\log\left(x^2-4\right) \quad \text{e} \quad \log(x+2)+\log(x-2)$$

hanno lo stesso grafico? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^{10},\ a^9 b,\ a^8 b^2,\ a^7 b^3 2,;a^6 b^4,\ a^5 b^5,\ a^4 b^6,\ a^3 b^7,\ a^2 b^8,\ a b^9,\ b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

10. Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

3.79.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base $\overline{\mathsf{BC}}$, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a $\overline{\mathsf{BC}}$, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:

   1. $\overline{\mathsf{EC}}$ è perpendicolare a $\overline{\mathsf{CB}}$;
   2. i triangoli EFC ed AFD, dove F è il punto comune ai segmenti $\overline{\mathsf{ED}}$ ed $\overline{\mathsf{AC}}$, sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $\mathsf{A\widehat{E}F}$ e $\mathsf{F\widehat{C}D}$ sono congruenti;
   3. EA è parallela a CB;
   4. il quadrilatero AECD è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di $\overline{\mathsf{BC}}$ e $\overline{\mathsf{CD}}$, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 6 e 24/5, dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

   1. le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
   2. l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero AECD.

Problema 2

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c. \tag{1}$$

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva (1) volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva (1) abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2,2)$.

d) Indica con K la curva trovata, stabilire come è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

Questionario

1. Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto tra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

2. Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente da esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.

3. Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$\log_2 27 + \log_2 12 \quad \text{e} \quad 2 + \log_2 81.$$

Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esauriente motivata.

4. Dimostrare che ogni funzione del tipo

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x,$$

dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5. Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k$$

non supera 10000.

6. Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

7. Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$.

8. Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

9. Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$.

Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del *triangolo di Tartaglia* (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 circa - 1557): enunciarla.

10. Calcolare quante sono le possibili *cinquine* che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

3.80. Anno scolastico 2005-2006

3.80.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata ed un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Problema 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

a) Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log(x) = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

b) Si calcoli, posto $a = 1$, l'area che è compresa fra i grafici delle funzioni f e g e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = 2$.

c) Si studi la funzione $h(x) = \log(x) - ax^2$ scegliendo per a un valore maggiore di $1/(2\mathrm{e})$ e se ne disegni il grafico.

Questionario

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\,\mathrm{cm}^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
6. L'equazione risolvente di un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale ed x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$
8. La funzione $f(x) = \tan x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo
$$I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$
eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. La funzione $f(x) = a\sin x + b\cos x$ ha un estremo relativo per
$$x = \frac{4\pi}{3}$$
ed è
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$$
Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

3.80.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2 \qquad , \qquad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $\mathsf{V}'\mathsf{V}''$ della parabola p', dall'arco $\mathsf{V}''\mathsf{P}$ della parabola p'' e dal segmento $\overline{\mathsf{V}'\mathsf{P}}$.

c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

d) Nel segmento parabolico delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p' inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.

e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

Problema 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.

b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

d) Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y.

e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.

Questionario

1. Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato $\overline{\mathsf{AB}}$ e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro attorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V/V''.

2. Il numero della soluzioni dell'equazione $\sin(2x)\cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è

a) 0; b) 2; c) 3; d) 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione
$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
per $x \to 0$:
   a) non esiste;
   b) è 0;
   c) è un valore finito diverso da 0;
   d) è $+\infty$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
4. Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata rispetto ad x della funzione $f(x) = \tan x$.
5. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali, ed approssimata al *primo*.
6. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.
7. Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
significa che per ogni numero reale M esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$. È vero o falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.
8. É assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisca un secondo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞.
9. Si consideri la seguente uguaglianza:
$$\log(2x+1)^4 = 4\log(2x+1).$$
E vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
10. Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia 1, posta a capotavola, è riservata al ragazzo 1, che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

3.80.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei problemi e 5 dei quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

É dato il triangolo ABC in cui:

$$|\overline{AB}| = \frac{25}{2}, \quad |\overline{AC}| = 5\sqrt{5}, \quad \tan\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativo al lato $\overline{AB}$ e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato $\overline{AB}$. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta $\overline{AB}$:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento $\overline{BC}$;

c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

Problema 2

Si considerino i polinomi di quinto grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy, sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto

$$\left(-2, \frac{64}{15}\right).$$

a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

b) Dimostrare che tali grafici hanno 3 punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse in cui la retta dei flessi interseca γ.

Questionario

1. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).

2. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.
3. Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambi tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano le condizioni previste del teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
quando $x \to a$. É vero o falso? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
4. Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to \infty$:

   a) è 0; b) è un valore finito diverso da 0; c) è$+\infty$; d) è $-\infty$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione $\arctan(x)$ è
$$\frac{1}{1+x^2}.$$
6. Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, nell'intervallo $[-1, 1]$.
7. Giustificare con considerazione analitica o mediante considerazione grafica, che la seguente equazione:
$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$
ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z+1]$ al quale appartiene tale soluzione essendo z un numero intero.
8. Considerata l'equazione: $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.
9. Considerare l'equazione:
$$\cos\frac{x}{2}\sin(2x) = 12,$$
spiegare in maniera esauriente, se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.
10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola "Maria" fra i maschi c'è un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da 2 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti "Maria" e "Antonio"?

3.81. Anno scolastico 2006-2007

3.81.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si considerino i triangoli la cui base è $|\overline{AB}| = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

a) Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

b) Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.

c) Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

d) Si provi che se $A\widehat{B}C = 36°$ allora è

$$|\overline{AC}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Problema 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

a) Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.

b) Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che

$$S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

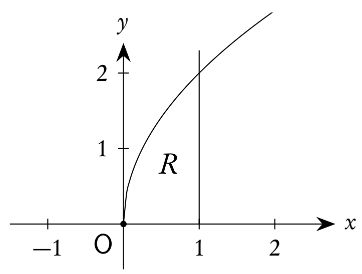
e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.

c) Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.

d) Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Questionario

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40 cm, 60 cm e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$$

4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo $[-2, 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2, 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?
8. Si risolva l'equazione:
$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$
9. Si calcoli l'integrale indefinito
$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
e, successivamente, si verifichi che il risultato di
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

3.81.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri il punto $A(2, 0)$.

a) Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:
$$|\overline{PO}|^2 + 2\cdot|\overline{PA}|^2 = 8$$
controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

b) Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.

c) Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento $\overline{\mathrm{OB}}$ e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.

c) Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \log 3$.

Questionario

1. Si calcoli il limite della funzione
$$f(x) = \frac{x^2 \cos x}{x^2 - \sin^2 x}$$
quando x tende a 0.

2. Si determini il campo di esistenza della funzione
$$y = \arcsin(\tan x),$$
con $0 \le x \le 2\pi$.

3. Si calcoli il valore medio della funzione $y = \tan^2 x$, nell'intervallo
$$0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

4. Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$, nell'intervallo $0 \le x \le 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

5. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e dei doppio della base.

6. Si consideri la seguente proposizione: *Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta*. Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

7. Sia data la funzione:
$$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & \text{per } x\neq 0,\\ 0, & \text{per } x=0.\end{cases}$$
Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

8. Si determini l'area della regione piana limitata curva di equazione $y=e^x$, dalla curva di equazione $y=x^3$ e dalle rette $x=0$ e $x=1$.

9. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva
$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x+2}.$$

10. Si risolva la disequazione
$$\binom{x}{3}>\frac{15}{2}\binom{x}{2}.$$

3.81.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Data una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}|=2r$, si prenda sul prolungamento di $\overline{AB}$, dalla parte di B, un punto C tale che sia $\overline{BC}=\overline{AB}$. Essendo P un punto della semicirconferenza:

a) Si esprima per mezzo di r e dell'ampiezza dell'angolo $x=A\widehat{P}B$ il rapporto
$$y=\frac{|\overline{CP}|^2}{|\overline{AP}|\cdot|\overline{PB}|}.$$

b) Si studi nell'intervallo $[0,2\pi]$ la funzione $y=f(x)$ espressa per mezzo di $\tan x$.

c) Si calcoli in gradi e primi(sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo $0<x<\pi/2$, per cui il rapporto y assume il valore minimo.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $y=f(x)$, dall'asse delle ascisse e delle rette di equazione
$$x=\frac{\pi}{4}\quad \text{e}\quad x=\frac{\pi}{3}.$$

Problema 2

Si consideri la funzione $f(x)=\log\sqrt{x^2-4}$.

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei punti in cui essa incontra l'asse x e si calcoli l'area del triangolo formato dalle suddette tangenti e dall'asse x medesimo.

c) Si studi la funzione derivata $f'(x)$ e se ne tracci il grafico C'.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C', dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -\sqrt{3}$.

Questionario

1. Si determini il campo di esistenza della funzione

$$y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{|x-4|}}.$$

2. Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3} + 1}$$

quando x tende a 1.

3. Si calcoli, in base alla definizione di derivata, la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

nel punto $x = -1$.

4. In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri l'ellisse γ d'equazione $x^2 + 9y^2 = 9$ e di asse maggiore $\overline{AB}$. Fra i trapezi isosceli contenuti nel semipiano $y \geq 0$ iscritti in γ e di cui una base è $\overline{AB}$, si determini quello di area massima.

5. Si consideri la seguente proposizione: *Dato un triangolo rettangolo, il cerchio che ha per raggio l'ipotenusa è la somma ei cerchi che hanno per raggio i cateti*. Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

6. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{per } x \leq 0, \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

Se ne studi la continuità nel punto $x = 0$.

7. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dell'asse stesso nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

8. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^2 + 6}{bx + 3}$$

perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione $y = x + 3$.

9. Si enunci il teorema di *Lagrange* e se ne fornisca un'interpretazione geometrica.
10. Si determinino le costanti a, b in modo che la funzione

$$F(x) = a\sin^3 x + b\sin x + 2x$$

sia una primitiva della funzione $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$.

3.82. Anno scolastico 2007-2008

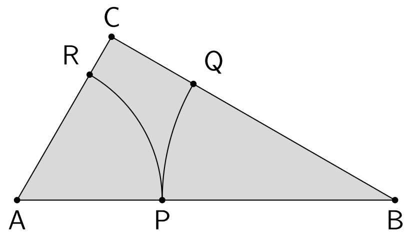
3.82.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $|\overline{AB}| = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \pi/3$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su $\overline{AB}$ e su $\overline{BC}$. Sia poi R l'intersezione con il cateto $\overline{CA}$ dell'arco di circonferenza di centro A e raggio $\overline{AP}$. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

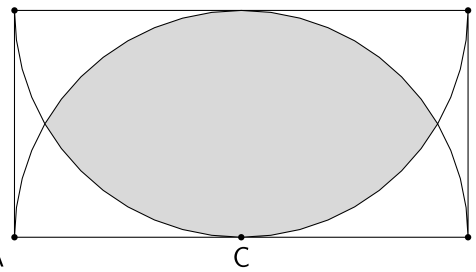
c) Tra i rettangoli con un lato su $\overline{AB}$ e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad $\overline{AB}$, sono tutti quadrati.

Problema 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $|\overline{AB}| = 2$, si affrontino le seguenti questioni.

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad $\overline{AB}$ in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su $\overline{\mathsf{AB}}$. Si ponga $\mathsf{P}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B} = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Si calcoli il rapporto

$$f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}.$$

d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

Questionario

1. Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che
$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 — 1704) e la si applichi per dimostrare che è:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

5. Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:
$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

6. Se
$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$$
con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

8. Sia f la funzione definita da $\pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|};$$

esiste il

$$\lim_{x \to 1} f(x)?$$

Si giustifichi la risposta.

10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (vedi la figura sottostante) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.

Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

3.82.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco $\widehat{AB}$ un punto P.

a) Si esprima in funzione di

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad (\text{con } x = B\widehat{O}P)$$

l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

b) Si studi la funzione $f(t)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

c) Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

Problema 2

Si consideri la funzione

$$y = \sin x(2\cos x + 1).$$

a) Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $\mathsf{P}(\pi, 0)$.

b) Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

c) Si scrivano le equazioni delle retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\pi/2$ e $3\pi/2$ e si determini il loro punto d'intersezione C.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

Questionario

1. Si determini la distanza delle due rette parallele:

$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0 \quad , \quad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0.$$

2. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

3. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}.$$

4. Si calcoli il limite della funzione:
$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x},$$
quando x tende a 0.

5. Si calcoli il valore medio della funzione

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

6. Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

7. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione

$$y = e^{x/2}(x + 1)$$

e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

8. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$$

nel punto P di ascissa $x = \pi/2$.

10. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $\mathsf{P}(1 + t^2, 1 + t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

3.82.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia data la parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

a) Si determinino a, b, c, in modo che la parabola passi per i punti $\mathsf{A}(0, -6)$, $\mathsf{B}(1, 0)$ e nel punto B sia tangente alla retta di coefficiente angolare 5.

b) Si determinino le misure dei lati del rettangolo di perimetro massimo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x.

c) Trovato questo rettangolo ed essendo M ed N i due suoi vertici che stanno sulla parabola, si calcoli, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due tangenti alla parabola in M ed N.

d) Si calcoli il rapporto tra i volumi dei solidi generati in una rotazione attorno all'asse x dal segmento parabolico e dal rettangolo di perimetro massimo considerato.

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \frac{x+1}{x^2+2}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$.

b) Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y.

c) Si studi la funzione

$$g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$$

e se ne tracci il grafico Γ.

d) Si calcoli l'area della superficie piana delimitata dalla curva Γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \sqrt{2}$.

Questionario

1. Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione
$$F(x) = a\cos x + b\cos^3 x$$
sia una primitiva della funzione
$$f(x) = 3\sin x - 2\sin^3 x.$$
2. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva
$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}.$$
3. Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto, avente raggio di base r e altezza h, si trovi quello di volume massimo.
4. Si consideri la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 3x + \dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Se ne studi la continuità per $x = 0$ e poi si tracci il suo grafico.
5. Si consideri la seguente proposizione: "Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se ogni retta di α è perpendicolare a ogni retta di β". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
6. Si determini, in base alla definizione, la derivata della funzione
$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{in} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$
7. Si provi che alla funzione
$$f(x) = \tan x + \sin x,$$
nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$, non è applicabile il teorema di Rolle.
8. Si calcoli il valor medio della funzione
$$y = \frac{x^4+1}{x^2+1},$$
nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.
9. Si determini il campo di esistenza della funzione
$$y = \log\left(\sqrt{x^2-2x} - x + 4\right).$$
10. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{e^{\sin x} - \cos x}{e^{\cos x} - e\log(x+e)},$$
quando x tende a 0.

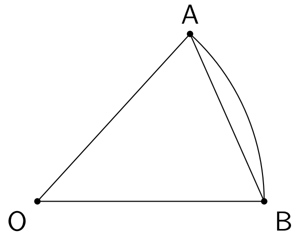
3.83. Anno scolastico 2008-2009

3.83.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).



a) Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda è espressa, in funzione di x, da

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \quad \text{con} \quad x \in [0, 2\pi].$$

b) Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).

c) Si fissi l'area del settore AOB pari a $100\,\mathrm{m}^2$. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

d) Sia $r = 2$ e $x = \pi/3$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad $\overline{\mathsf{OB}}$ sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*).

a) Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?

b) Sia δ l'inclinazione sull'asse x della tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?

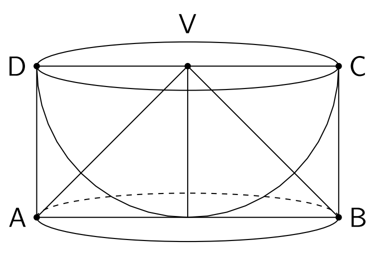
c) Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.

d) Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

Questionario

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto $(0,2)$.
2. Sono dati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y=x^3+kx^2+3x-4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. "*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\quad \frac{0}{0};\quad \frac{1}{0};\quad 0^0.$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Si calcoli
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$
7. Si dimostri l'identità
$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$
con n e k naturali e $n>k$.
8. Si provi che l'equazione
$$x^{2009}+2009x+1=0$$
ha una sola radice compresa tra -1 e 0.
9. Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.

   Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. Si determini il periodo della funzione $f(x)=\cos 5x$.

3.83.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

I due segmenti adiacenti $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $|\overline{OC}| = a$. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

a) Si calcoli il rapporto:

$$\frac{|\overline{CP}|^2 + |\overline{PQ}|^2 + |\overline{QC}|^2}{2a^2} \tag{1}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulta

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).

d) Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

Problema 2

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x), & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? È derivabile in tale punto?

b) Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

c) Si calcoli l'espressione, in funzione di t $(t > 0)$, dell'integrale

$$I(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x)\,dx.$$

d) Si faccia vedere che $I(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

Questionario

1. Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.
2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \sin^2(x-1)}$$
quando x tende a 1.
3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva
$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = \sqrt{3}$.
4. Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio sono determinati due menischi, detti *lunule d'Ippocrate*. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.
5. Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:
$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$
$$(1-\lambda)x + y + 2 = 0,$$
descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.
6. Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.
7. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?
8. Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con $a > 0$), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.
9. Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.
10. Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

3.83.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione f definita da:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^{3x}}.$$

a) Si studi f e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

c) Si provi che la funzione

$$F(x) = -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x+4)$$

è una primitiva della funzione $f(x)$.

d) Si calcoli l'area $A(k)$ della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x=-1$ e $x=k$ con $k>0$. Cosa si può dire di $A(k)$ quando $k \to +\infty$?

Problema 2

Sia $f(x) = a\cos^3 x + b\cos x + c$ e $x \in \mathbb{R}$.

a) Si determinino a, b, c in modo che risulti

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(\pi) = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad f''(\pi) = 0.$$

b) Si studi, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, la funzione così trovata e se ne tracci il grafico γ.

c) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a γ nei due punti di flesso.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ e dall'asse delle ascisse.

Questionario

1. Si inscriva in una semisfera di raggio r il tronco di cono di massima superficie laterale, avente la base maggiore coincidente con quella della semisfera. Si assuma come incognita l'apotema del tronco di cono.

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{\ln(1+\sin(3x))}{e^{\tan(2x)}-1}$$
quando x tende a 0.

3. Si dimostri che il volume di una sfera, il volume del cilindro circoscritto e il volume del cono equilatero circoscritto sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

4. Se P è un punto arbitrario del diametro $\overline{MN}$ di una data semicirconferenza, sui segmenti $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$, presi come diametri, si descrivano due semicirconferenze dalla stessa parte di quella data.

   Si dimostri che la figura (è detta *arbelo*) limitata dalle tre circonferenze, è equivalente al cerchio il cui diametro è medio proporzionale tra $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$.

5. Si determini il valore medio della funzione $f(x) = \sqrt{2x-1}$ nell'intervallo $4 \leq x \leq 6$.
6. Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhi si trovano a 7 metri sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di 4°, si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità.
7. Si consideri la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2+13 & \text{per} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$
È applicabile ad essa, nell'intervallo chiuso $[0,3]$, il teorema di Lagrange?
8. Si risolva l'equazione:
$$6\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right] = x(x+11).$$
9. Il
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$
vale 0. Si dica se quest'affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.
10. Quali punti del grafico della funzione
$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$
hanno distanza minima dall'origine?

3.84. Anno scolastico 2009-2010

3.84.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia ABCD un quadrato di lato 1, P un punto di $\overline{AB}$ e γ la circonferenza di centro P e raggio $\overline{AP}$. Si prenda sul lato $\overline{BC}$ un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

a) Se $|\overline{AP}| = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

b) Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?

c) Se

$$g(x)=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|, \quad x\in\mathbb{R};$$

quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $\mathsf{R}(0,1)$? E nel punto $\mathsf{S}(1,0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?

d) Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

Problema 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane $\mathsf{O}xy$, si consideri la funzione f definita da $f(x)=b^x$ ($b>0$, $b\neq 1$).

a) Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.

b) Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di $\overline{\mathsf{AB}}$ è uguale a 1?

c) Sia r la retta passante per O tangente a G_{e} (e = numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

d) Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_{e} e dalla retta d'equazione $y=\mathrm{e}$.

Questionario

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x)=n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di
$$f(x)=\mathrm{e}^{3x}+1.$$
Per quale valore di x la retta tangente a γ in $\big(x,f(x)\big)$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli
$$\lim_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x}.$$
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione
$$f(x)=\sqrt{\cos x}.$$
7. Per quale o quali valori di k la funzione
$$h(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4, & \text{se } x\leq 4\\ kx^2-2x-1, & \text{se } x>4\end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e
$$\binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n-2}, \quad \binom{n}{n-3}$$
sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AC}| = 2$ e $A\widehat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AC}| = 2$ e $A\widehat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

3.84.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che $\overline{AB} = \overline{BC}$.

a) Si calcoli, in funzione dell'angolo $A\widehat{O}B = x$, la quantità:
$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 + |\overline{CA}|^2$$
controllando che risulti
$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8.$$

b) Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

c) Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$.

d) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

Problema 2

Sia data la funzione
$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

a) Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

b) Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.

d) La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

Questionario

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.
2. Considerata la funzione
$$f(x)=\frac{3^{3x}-a^x}{6^x-5^x},$$
dove a è una costante positiva, si determini tale costante, sapendo che
$$\lim_{x\to 0} f(x)=2.$$
3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione
$$f(x)=ax^2+bx+c$$
vale la relazione
$$f'(x_1)+f'(x_2)=0$$
e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
5. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
nell'intervallo $1\le x\le 2$.
6. Si determinino a e b in modo che il grafico della funzione
$$y=a^{x+b}$$
passi per i punti del piano xy di coordinate $(1,4)$ e $(3,8)$.
7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche
$$x=2t \quad \text{e} \quad y=\frac{2}{t^2+1}$$
nel suo punto di coordinate $(2,1)$.
9. Si dimostri che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

3.84.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un triangolo ABC, l'angolo $\widehat{B}$ è doppio dell'angolo $\widehat{C}$ e inoltre è $|\overline{BC}| = a$.

1. Dette $\overline{BH}$ e $\overline{CL}$, rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C, si consideri il rapporto:
$$\frac{|\overline{BH}|^2 + |\overline{CL}|^2}{a^2}$$
espresso in funzione di $x = A\widehat{B}C$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.

Problema 2

Sia data la funzione:
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

a) Si verifichi che la curva che la rappresenta è simmetrica rispetto all'origine.

b) Si studi tale funzione e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

c) Si verifichi che
$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x^2 - 1|$$
è una funzione primitiva di $f(x)$.

d) Si calcoli l'errore che si commette approssimando l'area racchiusa dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = 2$ e $x = 3$ con l'area del trapezio ABCD, essendo $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C(3, f(3))$ e $D(2, f(2))$.

Questionario

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori (non tenendo conto dell'ostacolo grattacielo)?
2. Si calcoli il limite della funzione
$$(1 + \tan x)^{\cot x}$$
quando x tende a 0.
3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.
5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici $\mathsf{A}(2,2)$, $\mathsf{B}(6,4)$, $\mathsf{C}(6,6)$.
6. Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:
$$2 + 2^x = \sin^4 x + \cos^4 x + 6\sin^2 x\cos^2 x.$$
7. Sia P un punto del piano di coordinate
$$\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right).$$
Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.
8. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.
9. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \cos^3 x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/2$.
10. Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.

3.85. Anno scolastico 2010-2011

3.85.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:
$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x.$$

a) Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
b) Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6, 6]$ e se ne indichino le coordinate.
c) Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0, 2]$. Si calcoli l'area di R.
d) La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

Problema 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x/3}+3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0)=2$.

a) Si provi che $a=1$ e $b=-1$.

b) Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione
$$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x/3}+3$$
e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.

c) Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y=3$.

d) Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto b) e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Questionario

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4,0)$.
3. Sia R la regione delimitata dalla curva $y=x^3$, dall'asse x e dalla retta $x=2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y=\cos x$ e dall'asse x da $x=1$ a $x=2$ *radianti*.
6. Si calcoli
$$\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}.$$
7. Si provi che l'equazione: $x^{2011}+2011x+12=0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?

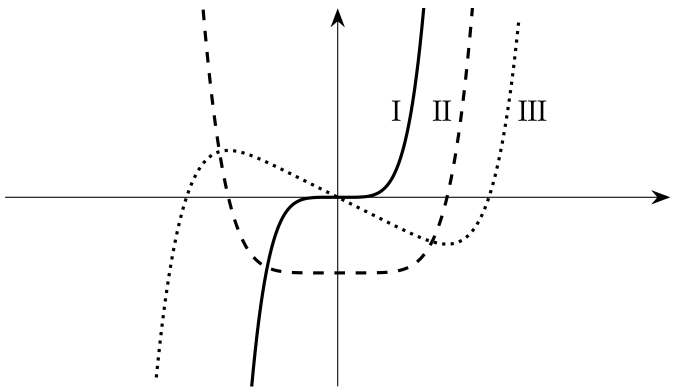
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sottostante, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.

    Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

    Si motivi la risposta.



3.85.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Data una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad $\overline{AB}$.

a) Si esprima la somma $|\overline{AP}| + |\overline{PM}|$ in funzione di $x = P\widehat{A}B$.

b) Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

c) Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

d) Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \pi/3$

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro.

c) Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x=k$ con $k>0$. Si calcoli poi il limite di A_k quando $k\to+\infty$.

d) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x=1$.

Questionario

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione
$$f(x)=\frac{1}{\left(e^{1/x}-1\right)^2}$$
non è definita nel punto $x=0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione $x=8$ seca la parabola di equazione $x=y^2-4y+3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base $\overline{AB}$ si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

4. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$f(x)=(3\cos x+\sin^2 x-3)^{\cos x}.$$
Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin x$?

5. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x)=e^x(x^2+x+1),$$
nell'intervallo $0\le x\le 1$.

6. Si dica se l'equazione
$$2\sin x+2\cos x=3+2^x$$
ha soluzione.

7. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali
8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata $f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine".
9. Si calcoli il limite della funzione
$$f(x) = \frac{e^{x^3} - 1}{x \sin^2 x}$$
quando x tende a 0.
10. Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro $\overline{AB}$ le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza. Si dimostri che l'angolo $C\widehat{O}D$ è retto.

3.85.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Siano dati un segmento $|\overline{AB}| = 1$ ed una circonferenza con il centro O sulla perpendicolare in A ad $\overline{AB}$ e il diametro $|\overline{AC}| = 2x$.

a) Posto $y = \tan O\widehat{B}C$, si esprima y in funzione di x, mostrando che risulta:
$$y = \frac{x}{1 + 2x^2}, \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$
b) Si studi la funzione $y = f(x)$ e se ne tracci il grafico Γ.
c) Si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x.
d) Si determini l'area della regione di piano limitata da Γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \sqrt{6}$.

Problema 2

Si consideri la funzione:
$$f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3).$$
a) Si studi tale funzione e se ne disegni il grafico Λ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
b) Si scriva l'equazione della tangente alla curva Λ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli il raggio del cerchio inscritto nel triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
c) Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al suddetto triangolo.
d) Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel IV quadrante, delimitata dalla curva Λ e dall'asse x.

Questionario

1. Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?
2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}$$
quando x tende a 0^+.
3. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.
4. Si dimostri che il grafico di una qualsiasi funzione polinomiale di terzo grado ha esattamente un flesso.
5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva
$$y=\sqrt{\frac{x}{1+x}},$$
dall'asse x e dalle rette $x=1$, $x=3$.
6. Sia data la funzione:
$$f(x)=\begin{cases} e^{2x/(x-1)}, & \text{se } x\neq 1;\\ 0, & \text{se } x=1.\end{cases}$$
Si dica se essa è continua nel punto $x=1$.
7. Si determini il campo di esistenza della funzione
$$y=\arcsin\log(2-x).$$
8. Si consideri la seguente proposizione: "La relazione di perpendicolarità fra rette nel piano è riflessiva, simmetrica e transitiva". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y=\sqrt{\sin x}\cdot\cos x,$$
nell'intervallo $0\leq x\leq\pi/2$.
10. Si dimostri che una corona circolare ha la stessa area del cerchio che ha per diametro una corda del cerchio maggiore la quale sia tangente al cerchio minore.

3.86. Anno scolastico 2011-2012

3.86.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = \left|27x^3\right| \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

a) Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.

b) Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = 1/3$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?

c) Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.

d) La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

Problema 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A$(3,0)$ e B$(0,3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0,3/2)$.

a) Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.

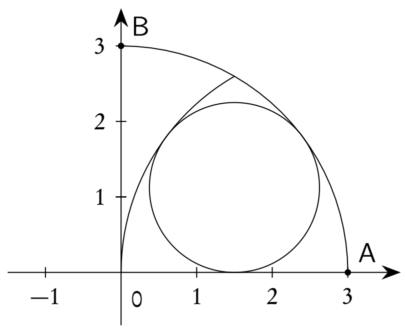
b) La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area

$$S(x) = e^{5-3x}.$$

Si determini il volume di W.

c) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.

d) Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco $\widehat{AB}$ e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura sottostante.



Questionario

1. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?
$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\dfrac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{h}.$$
2. Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
3. La posizione di una particella è data da
$$s(t)=20\left(2e^{-t/2}+t-2\right).$$
Qual è la sua accelerazione al tempo $t=4$?
4. Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?
5. Siano dati nello spazio n punti $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \mathsf{P}_3, \dots, \mathsf{P}_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?
6. Sia
$$f(x)=5\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x-\frac{5}{2}\sin 2x-\cos 2x-17;$$
si calcoli $f'(x)$.
7. È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.
8. Qual è il valor medio di $f(x)=1/x$ da $x=1$ a $x=e$?
9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
    a) $\cos\left(\sin(x^2+1)\right)$.
    b) $\sin\left(\cos(x^2+1)\right)$.
    c) $\sin\left(\ln(x^2+1)\right)$.
    d) $\cos\left(\ln(x^2+1)\right)$.

    Si giustifichi la risposta.

3.86.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

a) Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:
$$V(x)=\frac{\pi}{3}\,\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{\sin^2 x}.$$

b) Si studi la funzione
$$f(x)=\frac{3V(x)}{\pi}$$
e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0<x<2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

c) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x=\pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x=\pi$.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x=\pi/4$ e $x=\pi/2$.

Problema 2

Si consideri la funzione
$$f(x)=x\sqrt{2-x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si risolva la disequazione:
$$x\sqrt{2-x}<1.$$

c) Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

d) La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

Questionario

1. Si divida il segmento $|\overline{AB}|=a$ in due parti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, in modo che, costruito su $\overline{AC}$ il quadrato ACDE e su $\overline{CB}$ il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono ABFDE.

2. Data la funzione
$$f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\log(\sin 2x), & \text{se } 0<x<\pi/2,\\ 0, & \text{se } x=0,\end{cases}$$
si provi che è continua ma non derivabile, nel punto $x=0$.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0,2)$.

4. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + \tan x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

5. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x.$$

7. Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\varrho = 2,7\,\mathrm{g/cm^3}$), avente lo spigolo $l = 5\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è $m = 155\,\mathrm{g}$, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.

8. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \le x \le b$, con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

10. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1},$$

si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso $[-1,0]$, tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

3.86.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa $|\overline{BC}| = 2a$; sia P il punto medio di $\overline{AC}$, Q la sua proiezione ortogonale su $\overline{BC}$ e $A\widehat{B}C = \alpha$.

a) Si calcoli il rapporto
$$\frac{|\overline{PQ}| + |\overline{QC}|}{|\overline{BQ}|}$$
e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulti:
$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+2}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si determinino le coordinate del punto $D(x_D, y_D)$ in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scrivano le equazioni della tangente e della normale in tale punto.

d) Si determini l'area della superficie piana, appartenente al I quadrante, delimitata dall'asse delle ascisse, dalla curva γ e dalla retta $x = x_D$.

Problema 2

Si consideri la funzione:
$$f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x-5}}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo φ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.

c) Si calcoli il volume del solido Ω, generato dalla superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalle rette $x = 6$ e $x = 10$, in una rotazione completa attorno all'asse x.

d) Se tutte le misure fossero espresse in dm, potrebbe un recipiente, avente la stessa capacità del solido Ω, contenere $3\,\mathrm{m}^3$ di acqua?

Questionario

1. Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze $|\overline{CA}| = 837$ metri, $|\overline{CB}| = 1164$ metri e l'angolo $A\widehat{C}B$ la cui ampiezza è $44{,}5°$. Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2},$$
quando x tende a 0.

3. Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura l. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = \log_x \left(x^2 + 4\right)$$

nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione

$$y = x^2\sqrt{x+1}$$

e dall'asse x nell'intervallo $-1 \le x \le 0$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Σ.

6. Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } -1 \le x \le 0; \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x \sin x}, & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Si dica se essa è continua nel punto $x = 0$.

7. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log \frac{8 - x}{3x + 2} + \sqrt{5 + 4x - x^2}.$$

8. Un tetraedro regolare di rame (densità $\varrho = 8{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$), avente lo spigolo $l = 6\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità di forma sferica. Sapendo che la massa del tetraedro è $m = 200\,\mathrm{g}$, si calcoli la lunghezza del raggio della cavità.

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{x^5 - 1}{x^2 + 1},$$

nell'intervallo $0 \le x \le 1$.

10. Si dimostri che il teorema di Pitagora è un caso particolare del teorema di Carnot.

3.87. Anno scolastico 2012-2013

3.87.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

La funzione f è definita da

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] dt$$

per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0, 9]$.

a) Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$, ove f' indica la derivata di f.

b) Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.

c) Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

d) Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \le x \le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area

$$A(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = \frac{8}{4 + x^2}.$$

a) Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2, 1)$ e $Q(2, 1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.

b) Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0, 1)$. Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y = 2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate (x, y) di un punto di Φ.

c) Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0, 2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.

d) La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

Questionario

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Si calcoli il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti A(2,−1) e B(−6,−8). Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

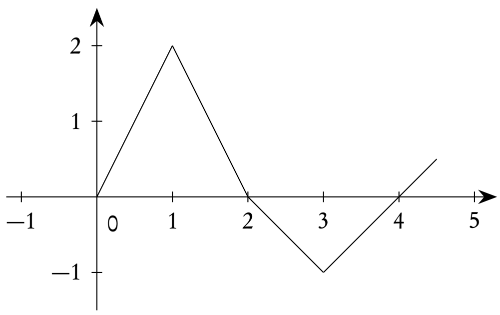
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge: "Due valigie della stessa forma sembrano "quasi uguali", quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

7. Un foglio rettangolare, di dimensioni a e b, ha area $1\,\mathrm{m}^2$ e forma tale che, tagliandolo a metà (parallelamente al lato minore) si ottengono due rettangoli simili a quello di partenza. Quali sono le misure di a e b ?

8. La funzione f ha il grafico in figura.



Se

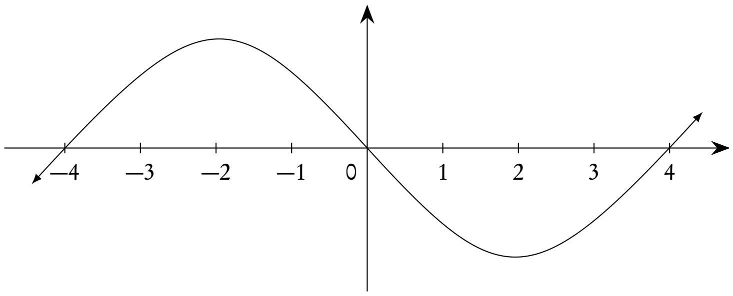
$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

per quale valore di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.

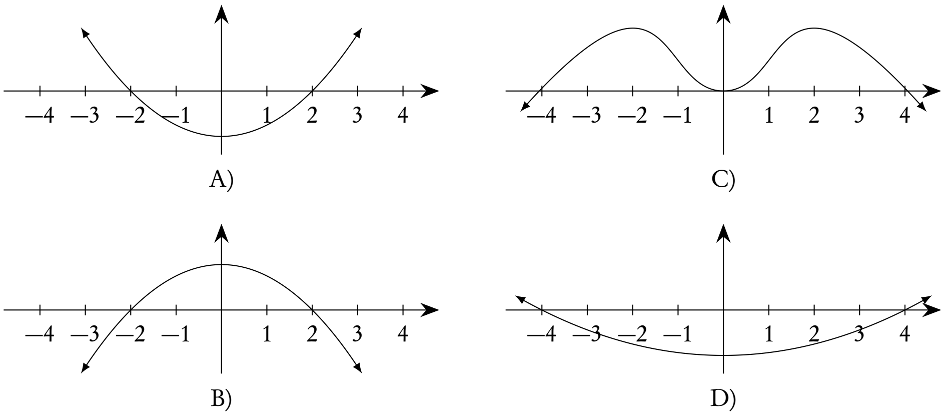
9. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

10. Se la figura sottostante rappresenta il grafico di $f(x)$



quale dei seguenti potrebbe essere il grafico di $f'(x)$? Si motivi la risposta.



3.87.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

ABC è un triangolo equilatero di lato a. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una semiretta r che formi l'angolo α con il lato $\overline{AB}$. Si denotino con B′ e C′, rispettivamente, le proiezioni ortogonali su r dei vertici B e C.

a) Si calcoli il rapporto
$$\frac{|\overline{BB'}|^2+|\overline{CC'}|^2}{a^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x=\tan\alpha$, controllando che risulta:
$$f(x)=\frac{5x^2-2\sqrt{3}x+3}{4(x^2+1)}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si determinino le coordinate del punto in cui la curva γ incontra il suo asintoto e si scriva l'equazione della tangente ad essa in tale punto.

d) Si determini l'area della superficie piana, appartenente al II quadrante, delimitata dall'asse y, dalla curva γ e dal suo asintoto.

Problema 2

Del trapezio ABCD si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore $\overline{AB}$ e la base minore $\overline{DC}$ misurano rispettivamente 4 m e 1 m, l'altezza del trapezio misura 3 m e la tangente dell'angolo $B\widehat{A}D$ è uguale a 3/2.

a) Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.

b) Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio.

c) Riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani, si trovi l'equazione della parabola Γ avente l'asse perpendicolare alle basi del trapezio e passante per i punti B, C, D.

d) Si determinino le aree delle due regioni in cui il trapezio è diviso da Γ.

Questionario

1. È dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\pi/3$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio $\overline{OB}$, Q sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ e P su $\overline{OA}$. Si determini l'angolo $Q\widehat{O}B = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.
2. Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche *solidi platonici*?
3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:
$$x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$
nel punto P di ordinata $y = 2$.
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \ln x$ e dall'asse x sull'intervallo $[1, e]$. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?
5. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?
6. Si consideri la curva d'equazione
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}.$$
La curva ha asintoti? In caso affermativo, se ne determinino le equazioni.
7. Un cubo di legno di pioppo (densità $\varrho_1 = 0{,}385\,\mathrm{g/cm^3}$) ed un tetraedro regolare di cristallo ($\varrho_2 = 3{,}33\,\mathrm{g/cm^3}$) hanno entrambi lo spigolo $l = 5\,\mathrm{cm}$. Quale dei due ha la massa maggiore?
8. Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$f(x) = \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

nell'intervallo $1 \leq x \leq 4$.

10. Si controlli se la funzione $f(x) = \tan x + \sin x + 7$, nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$, verifica le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, si calcoli l'ascissa dei punti ove si annulla la derivata prima.

3.87.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia data una circonferenza di centro O e raggio 1 e una sua corda $\overline{MN}$, condotta alla distanza x da O.

a) Si calcoli il rapporto $f(x)$ fra l'area del triangolo, formato dalla corda $\overline{MN}$ e dalle tangenti alla circonferenza in M ed N, e quella del rettangolo di lato $\overline{MN}$, inscritto nella circonferenza, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{1-x^2}{4x^2}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo T che esse formano con l'asse x.

d) Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta $y = 1/2$.

Problema 2

Si consideri la funzione:
$$f(x) = \ln(x^2+1).$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse x.

c) Si calcoli l'area della superficie piana S, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

d) La superficie S è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

Questionario

1. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di $34,6°$; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino $= 1853,182\,\mathrm{m}$).
2. Si calcoli il limite della funzione
$$(1+x^2)^{1/\sin^2 x},$$
quando x tende a 0.
3. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\pi/6$ e quello in C misura x. Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:
$$\frac{|\overline{\mathsf{BC}}|+|\overline{\mathsf{HC}}|}{|\overline{\mathsf{AC}}|}$$
risulti massima.
4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x)=\log_x 2$$
nel punto P di ascissa $x=2$.
5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y=\ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1\le x\le \mathrm{e}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.
6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}.$$
7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$y=\arccos\left(\mathrm{e}^{2\sin x-1}\right),\quad \text{con}\quad 0\le x\le 2\pi.$$
8. Un cubo di alluminio (densità $\varrho=2,7\,\mathrm{g/cm^3}$), avente lo spigolo $l=10\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità a forma di cilindro equilatero, avente il raggio di lunghezza $r_c=2,5\,\mathrm{cm}$. Si calcoli la massa m del cubo.
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y=\frac{x}{\cos^2 x},$$
nell'intervallo $0\le x\le \pi/3$.

10. Un delfino si trova nel punto A del bordo ovest di una piscina circolare. Nuota in linea retta per 12 m, e tocca con il naso il bordo della piscina nel punto B. Si gira e nuota in una direzione diversa in linea retta per 5 m, e arriva nel punto C situato sul bordo della piscina e diametralmente opposto al punto A dal quale era partito. Se la profondità dell'acqua è ovunque di $2,50$ m, quanti litri d'acqua sono contenuti nella piscina?

3.88. Anno scolastico 2013-2014

3.88.1. Sessione ordinaria

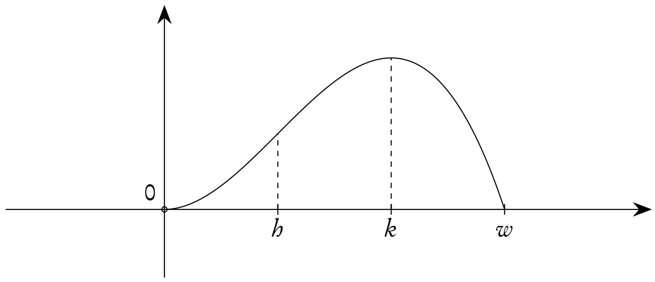
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nella figura sottostante è disegnato il grafico Γ di

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

con f funzione definita sull'intervallo $[0, w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x = h$ e $x = k$.



a) Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.

b) Si supponga, anche nei punti successivi c) e d), che $g(x)$ sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.

c) Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w = 3$ e $g(1) = 2/3$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y = 2/3$.

d) Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa attorno all'asse y. Si spieghi perché il volume di W si può ottenere calcolando:

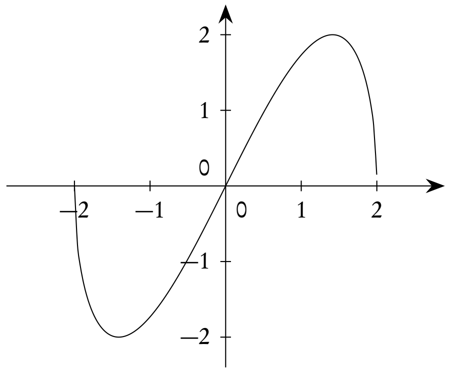
$$\int_0^3 (2\pi x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Supposte fissate in decimetri le unità di misura del sistema monometrico $\mathrm{O}xy$, si dia la capacità in litri di W.

Problema 2

Di seguito è disegnato il grafico Γ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$



a) Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.

b) Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.

c) Si disegni la curva d'equazione

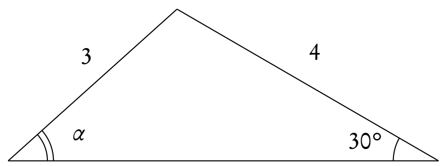
$$y^2 = x^2(4-x^2)$$

e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

d) Sia $h(x) = \sin\big(f(x)\big)$ con $0 \le x \le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte?

Questionario

1. Nel triangolo disegnato di seguito, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.

3. Nello sviluppo di

$$\left(2a^2 - 3b^3\right)^n$$

compare il termine $-1080a^4b^9$. Qual è il valore di n?

4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di

$$f(x) = e^{1/x}$$

e dall'asse x sull'intervallo $[-2,-1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da

$$h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Si calcoli il volume del solido.

5. Dei numeri $1, 2, 3, \dots, 6000$, quanti non sono divisibili né per 2, né 3 né per 5?
6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?
7. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k.
8. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.
9. Si determini il dominio della funzione:
$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}.$$
10. Si determinino i valori reali di x per cui:
$$\left(\frac{1}{5}\left(x^2 - 10x + 26\right)\right)^{x^2-6x+1} = 1.$$

3.88.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco $\overset{\frown}{AB}$ e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

a) Posto $A\hat{O}M = \alpha$, si calcoli il rapporto:
$$\frac{|\overline{MN}|}{|\overline{MA}|}$$
e lo si esprima in funzione di
$$x = \sin\frac{\alpha}{2},$$
controllando che risulta
$$f(x) = \frac{x}{1-2x^2}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.

d) Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = 1/3$ e $x = 1/2$.

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log^2 x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \mathrm{e}$, e si calcoli l'area del trapezio T che essa forma con l'asse x, con l'asintoto verticale e con la retta di equazione $x = \mathrm{e}$.

c) Si calcoli l'area della regione S_k delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = \mathrm{e}$ e $x = k$ ($k > \mathrm{e}$).

d) Si faccia vedere che S_k tende verso un limite finito quando k tende a $+\infty$ e si confronti tale limite col valore numerico dell'area del trapezio T, arrotondato alla quarta cifra decimale.

Questionario

1. Si determini il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2}.$$

2. La funzione

$$f(x) = \sin \sqrt[3]{x},$$

è evidentemente continua nel punto $x = 0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + \sin^2 \frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x = 1/\pi$.

4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ ed il grafico della funzione $y = \mathrm{e}^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.

5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di $42,4°$ e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di $46,5°$. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.

6. Si trovino gli eventuali flessi della curva:

$$f(x) = x\left[(\log 3x)^2 - 2\log 3x + 2\right].$$

7. Una scatola di forma cilindrica ha raggio r e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?

8. Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\log \sin 2x},$$

quando x tende a $\pi/4$.

9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y = \cos^5 x,$$
nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/2$.
10. Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

3.88.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

È data una semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{AB}| = 2r$. Siano C e D i punti d'intersezione delle tangenti in B e in A, rispettivamente, con una terza tangente alla semicirconferenza.

a) Si dimostri che l'angolo $C\hat{O}D$ è retto e che $|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}| = r^2$.

b) Posto $r = 1$ e $|\overline{BC}| = x$, si calcoli il volume del solido generato dal trapezio ABCD, ruotando attorno ad $\overline{AB}$, controllando che risulta:
$$V(x) = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}.$$
Per quali valori di x, $V(x)$ ammette un massimo o un minimo?

c) Prescindendo dalla questione geometrica si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/(2\pi)$ e se ne tracci il grafico γ.

d) Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 3$.

Problema 2

Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si verifichi che sono parallele.

c) Si calcoli l'area del triangolo che la prima di tali tangenti forma con l'asse x e con la retta $x = \pi/2$, e il volume del cono generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo.

d) Si calcoli l'area, nell'intervallo $[0, \pi/4]$, della regione di piano σ limitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalla retta $x = \pi/4$.

Questionario

1. Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2°; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5°. Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.
2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{(e^x-1)^2}{3x^2+4x^3},$$
quando x tende a 0.
3. Data una statua $\overline{AB}$ di altezza $h = 2,5\,\mathrm{m}$, posta su di un piedistallo $\overline{BP}$ di altezza $a = 2\,\mathrm{m}$, si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo un punto O tale che da esso la statua sia vista sotto angolo massimo.
4. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale al diagramma della funzione:
$$f(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}\right)\log\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$
nel punto P di ascissa $x = 0$.
5. La regione del I quadrante delimitata dall'iperbole di equazione $9x^2 - 4y^2 = 36$ e dall'asse x nell'intervallo $2 \le x \le 4$, è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.
6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$
7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$y = \log_{\sin x}(x^2 - 5x + 6), \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 2\pi.$$
8. Il kilogrammo campione è un cilindro di platino-iridio, che ha un diametro di 39 mm ed è alto 39 mm. Qual è la densità in g/cm^3 della lega che è stata usata per costruirlo?
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y = x^2\sqrt{x^3 - 1}$$
nell'intervallo $1 \le x \le 2$.
10. Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre nell'ordine iniziale, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?

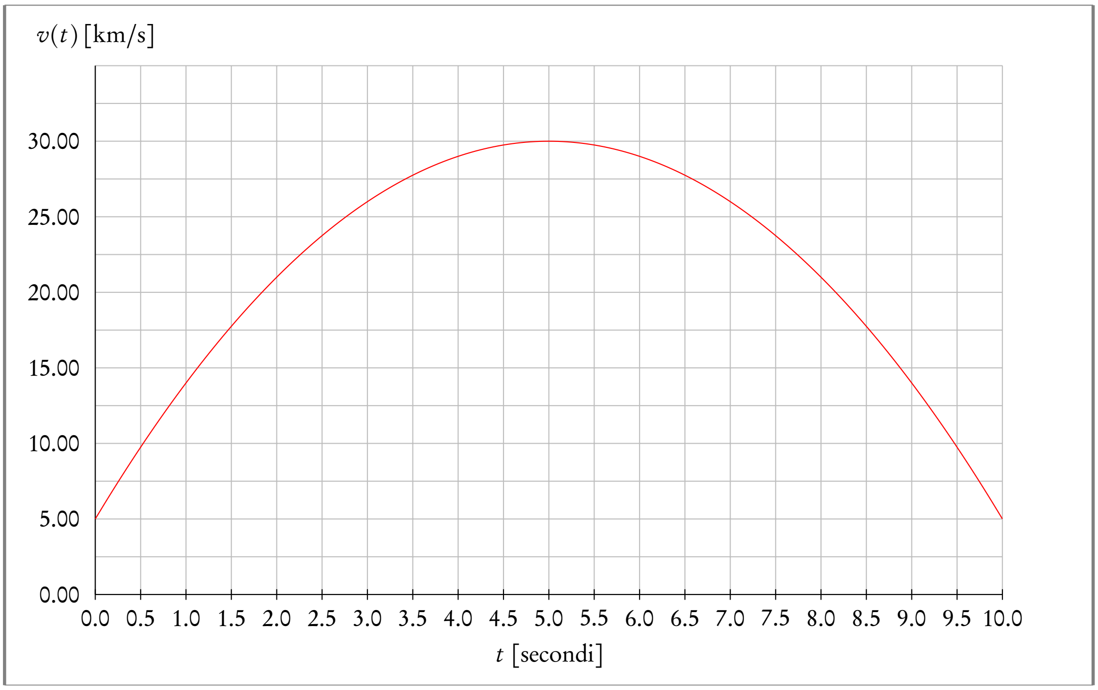
3.89. Anno scolastico 2014-2015

3.89.1. Simulazione del 25 febbraio 2015

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova tre ore.

Problema 1: Una collisione tra meteoriti

Marco e Luca, durante la visita guidata ad un museo scientifico interattivo, osservano su un monitor la simulazione della collisione tra due meteoriti, effettuata da un videogioco. Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del primo meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo, mostrato in figura.



In base alle loro conoscenze di matematica, discutono sul tipo di curva geometrica rappresentata dal grafico e cercano di determinarne l'equazione, necessaria per procedere nella simulazione.

a) Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Dopo che Marco e Luca hanno scritto sul terminale l'equazione trovata, il videogioco si complimenta con loro e sul monitor appare la seguente espressione:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t, \quad \text{con} \quad t \geq 0.$$

Viene quindi chiesto loro di verificare se la funzione data rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo (legge oraria del moto).

b) Aiuta Marco e Luca a verificare che la funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto, spiegando il procedimento seguito.

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

c) Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo.

Marco e Luca rispondono correttamente e il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto. Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t.$$

Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo t_{urto} in cui è avvenuto l'urto. Aiuta Marco e Luca a:

d) determinare il tempo t_{urto};

e) studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e $3 \cdot t_{\text{urto}}$ secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

Problema 2: Un mappamondo prezioso

Lavori in un laboratorio d'arte vetraria e il responsabile del museo civico della tua città ti chiede di progettare un espositore avente forma conica che possa contenere un prezioso e antico mappamondo. Il mappamondo ha raggio R e l'espositore deve essere ermeticamente chiuso, per impedire che il mappamondo prenda polvere.

Il tuo collega Mario dice che, per costruire l'espositore, si potrebbe utilizzare il quarzo ialino ma, data la preziosità del materiale, per risparmiare è necessario determinarne le dimensioni ottimali. Inoltre per proteggere l'espositore dalla polvere decidete di ricoprirlo con una sottile pellicola trasparente di nuova generazione e piuttosto costosa.

a) Trascurando lo spessore dell'espositore e attraverso un'opportuna modellizzazione geometrica, determina l'altezza h e il raggio di base r dell'espositore affinché sia minima la sua superficie totale, allo scopo di utilizzare una quantità minima di pellicola[1]

b) Fornisci una spiegazione adeguata e convincente del procedimento seguito, eventualmente anche con rappresentazioni grafiche.

Ora tu e Mario dovete scegliere la pellicola da sistemare sulla superficie esterna dell'espositore. La scelta va fatta tra due pellicole che hanno lo stesso costo unitario ma diverse proprietà: la prima ogni anno perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, mentre la seconda ogni anno perde il 2% della resistenza all'usura iniziale.

c) Aiuta Mario nel capire quale pellicola convenga scegliere in funzione della durata, tenendo conto del fatto che entrambe hanno la stessa resistenza di partenza e che una pellicola va cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza di partenza.

[1] Ricorda che la superficie totale S di un cono è data dall'espressione:

$$S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Indicatori di valutazione portati a conoscenza dello studente

Comprendere
Analizzare la situazione problematica, rappresentare i dati, interpretarli e tradurli in linguaggio matematico.

Individuare
Mettere in campo strategie risolutive attraverso una modellizzazione del problema e individuare la strategia più adatta.

Sviluppare il processo risolutivo
Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari, con l'eventuale ausilio di strumenti informatici.

Argomentare
Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia applicata, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati.

3.89.2. Simulazione del 22 aprile 2015

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e 5 quesiti a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova sei ore

Problema 1: Curva Nord

Sei il responsabile della gestione del settore "Curva Nord" dell'impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all'ingresso e all'uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all'assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di $3{,}25\,\text{persone}/\text{m}^2$, e che il $9{,}5\%$ della superficie della "Curva Nord" è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

a) determina la capienza massima N_{max} attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia.

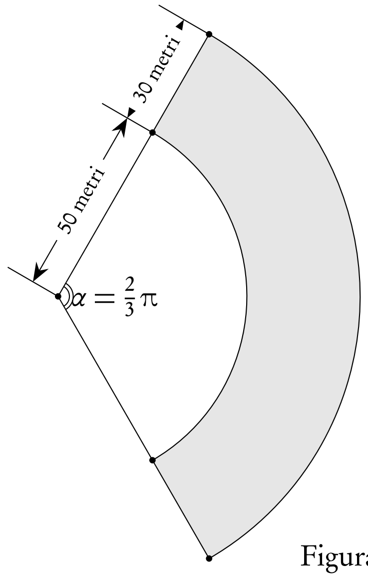


Figura 1

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un'ora prima dell'inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l'andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un'ora prima dell'inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2.

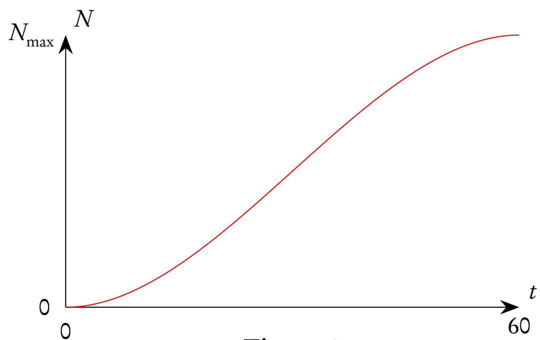


Figura 2

b) esprimendo il tempo t in minuti, determina il polinomio $p(t)$ di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso ($t = 0$) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora ($t = 60$), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

c) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con $t = 0$ l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0, t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto.

d) Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante $t = 0$ (apertura dei cancelli) all'istante $t = t_c$.

Problema 2: Il vaso

L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega. Il vaso, di altezza $h = 18\,\text{cm}$, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito (figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale.

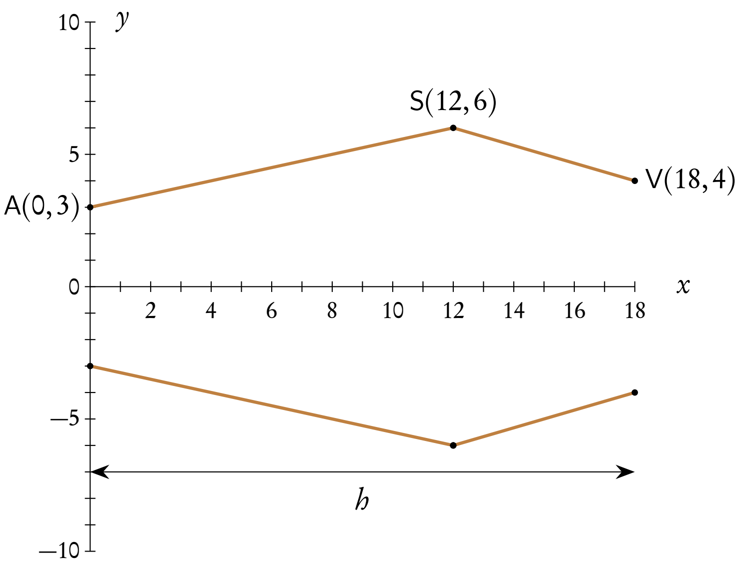


Figura 1

Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:

a) verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti dà un suo disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2).

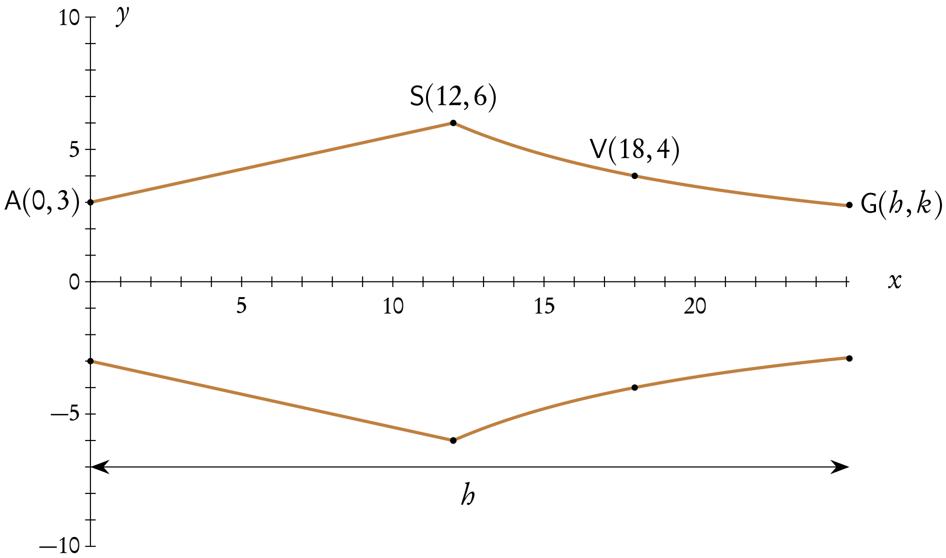


Figura 2

La curva passante per i punti S, V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione $y = a/x$.

b) Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori delle coordinate h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

Dopo che un primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo del vaso nel punto S ne rende costosa la produzione.

c) Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

d) lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A e S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiungere i punti A e S, eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Sezione quesiti

1. Assegnata la funzione
$$y = e^{x^3} - 8,$$
   a) verificare che è invertibile;
   b) stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta.

2. Data l'equazione differenziale del primo ordine
$$y' = \frac{1}{2x-1},$$

determinare la soluzione del problema di Cauchy, tenendo conto della condizione iniziale $y(1) = 0$.

3. Di quale delle seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $y = \ln(x-3)$?

   a) $(x-3)y'' - (x-3)^2 y' + 2 = 0$;
   b) $xy'' - (x-3)y' + x + 2 = 0$;
   c) $(x-3)^2 y'' - (x-3)y' + 2 = 0$;
   d) $x^2 y'' + y' + 3x - 9 = 0$.

   Giustificare la risposta.

4. Verificare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$$

   e, nel caso in cui sia convergente, determinare la sua somma.

5. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.

6. La base di un solido, nel piano Oxy, è il cerchio avente come centro l'origine e raggio 3. Le sezioni del solido perpendicolari all'asse delle x sono quadrati. Calcolare il volume del solido.

7. Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate $(1, 1, z)$, con z negativa.

8. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \big(\arcsin(x) + \arccos(x)\big)\, dx$$

   e rappresentare graficamente la funzione primitiva passante per il punto $(2/\pi, 2)$.

9. Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2(x)}\, dx.$$

10. In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni. Determinare la probabilità che in 20 minuti:

    a) non arrivi alcun treno;
    b) ne arrivi uno solo;
    c) ne arrivino al massimo quattro.

3.89.3. Sessione ordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

a) individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

b) Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}.$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

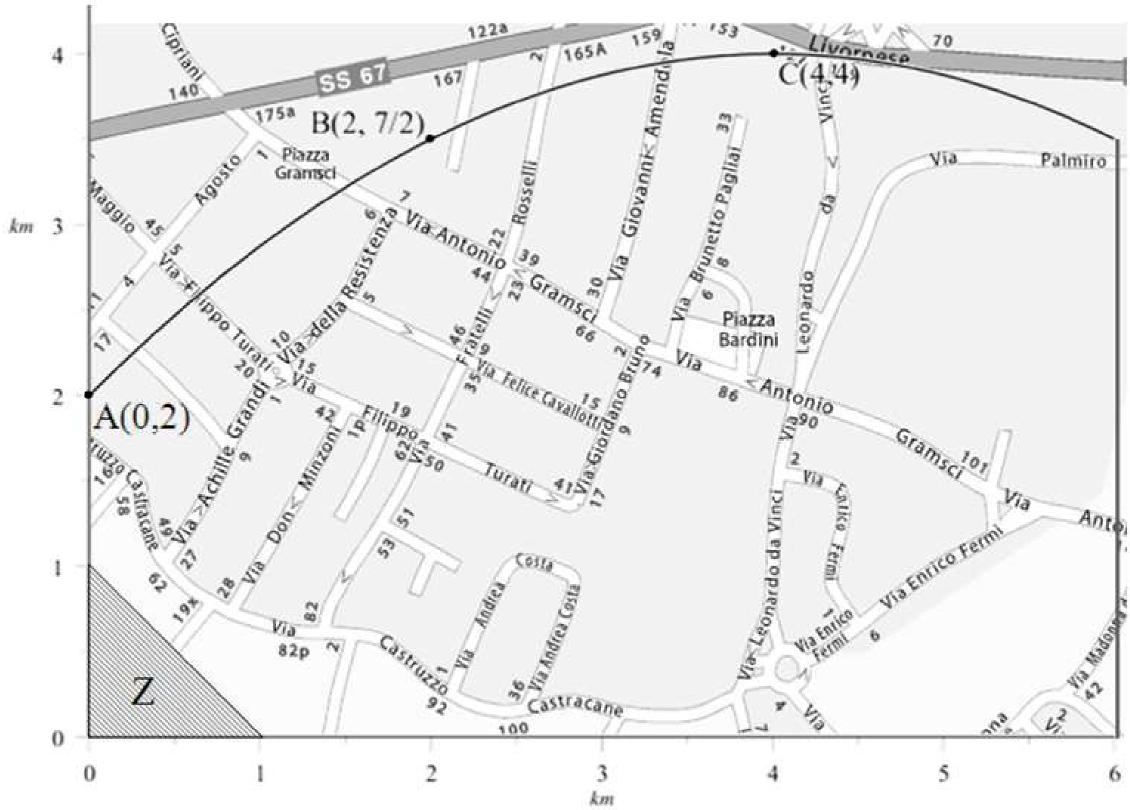
Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse (vedi la figura successiva).

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

c) Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.

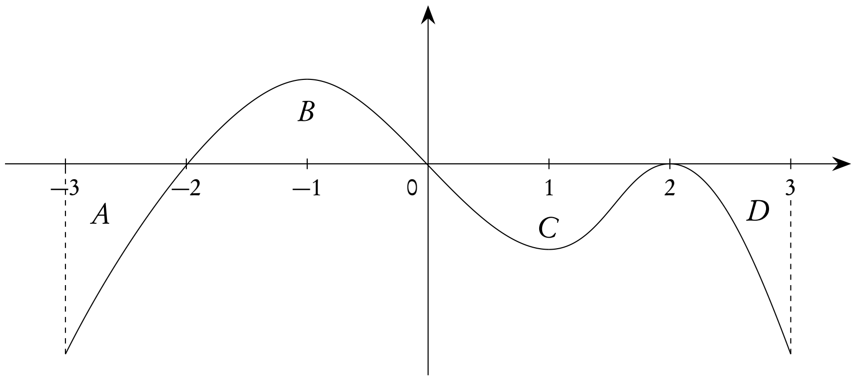
L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

d) Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni$f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.



Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



a) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

b) Individua i valori di $g(x) \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

c) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}.$$

d) Sia $h(x)=3f((2x+1)$, determina il valore di

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questionario

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y=f(x)$ sapendo che la retta $y=-2x+5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x)=-2x^2+6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot(R^2+r^2+Rr),$$

dove R e r sono i raggi e h l'altezza.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?
4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione

$$y=\frac{\ln(x)}{x}$$

è soluzione?

$$y''+2\cdot\frac{y'}{x}=y$$
$$y'+x\cdot y''=1$$
$$x\cdot y'=\frac{1}{x}+y$$
$$x^2\cdot y''+x\cdot y'+\frac{2}{x}=y$$

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x+y-z=0$.
6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2,$$

determinare il minimo di f.

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che
$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$
e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 - kx + k, & \text{se } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$
determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0,2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$) divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici A$(1,0)$, B$(4,0)$, C$(4,2)$ e D$(1,2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

3.89.4. Sessione suppletiva

Il testo è valevole anche per il Liceo scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.

La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate $(-4,0)$, $(4,0)$, $(-4,25)$ e $(4,25)$; nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.

Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione
$$y = -\frac{25}{16}x^2 + 25, \quad x \in [-4,4],$$
la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione
$$y = \frac{100}{4 + x^2}$$
e le rette $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$.

a) Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano Oxy. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.

b) Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}, 0]$ che per $x \in [0, 2\sqrt{3}]$ la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione $f(x) = |x| + 1$; è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.

c) Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}, 0]$.

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, tale piano deve passare per i punti $(-4, 0, 5)$, $(4, 0, 5)$ e $(0, 25, 4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

d) Determina l'equazione del piano prescelto.

Problema 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq k^2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

a) In un riferimento cartesiano Oxy, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x)$, per $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore

$$\frac{64\pi}{192};$$

b) calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per $x = 0$;

c) assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_S = \frac{\pi \displaystyle\int_a^b x\,[f_k(x)]^2\,dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione a e b vanno scelti opportunamente, e V indica il volume del solido di rotazione;

d) all'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio $0,5$ e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Questionario

1. Data la funzione integrale
$$\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t,$$
determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

2. Data la famiglia di funzioni
$$y = -x^3 + 6kx + 33$$
trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

3. Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto X il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di X e mostrare che
$$p(X = 3) = \frac{5}{36}.$$
Calcolare inoltre la media e la varianza di X.

4. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $\mathsf{O}xyz$ sono dati i punti $\mathsf{A}(-3, 4, 0)$ e $\mathsf{C}(-2, 1, 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determinare l'equazione che descrive il piano E.

5. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.

6. Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$, sia M il punto medio dell'arco $\widehat{\mathsf{BC}}$. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero ABMC.

7. Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:
   - la distribuzione binomiale;
   - la distribuzione di Poisson.

8. Provare che la funzione
$$y = \mathrm{e}^x - \tan x$$
ha infiniti zeri, mentre la funzione
$$y = \mathrm{e}^x - \arctan x$$
non ne ha alcuno.

9. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x,$$
adoperando la definizione di derivata.

10. Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da
$$f''(x) = 3x - 6.$$
Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $\mathsf{P}(2, -7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale $45°$.

3.89.5. Sessione straordinaria

La traccia di questa prova è identica a quella assegnata nella sessione ordinaria delle scuole italiane all'estero del calendario boreale 2 ("Americhe"), a cui si rimanda (vedi 6.31.2).

3.90. Anno scolastico 2015-2016

3.90.1. Simulazione del 10 dicembre 2015

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e 5 quesiti a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova tre ore.

Problema 1: Il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe.

Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo:

1. Scelto un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:
$$\begin{aligned} & y = \mathrm{e}^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2 && a,b,c,d \in \mathbb{R},\ x \in [0,3] \\ & y = \frac{\sin^2(ax+b) + \cos^2(ax+b)}{cx+d} && a,b,c,d \in \mathbb{R},\ x \in [0,3] \\ & y = ax^3 + bx^2 + cx + d && a,b,c,d \in \mathbb{R},\ x \in [0,3] \end{aligned}$$
2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo, determina i valori dei parametri a, b, c, e d in base alle dimensioni definite dall'artigiano;

3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5€ per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500€; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15€ e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;

4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

Problema 2: Il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume $10\,\mathrm{dm}^3$, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;
2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di $-18\,°\mathrm{C}$, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di $10\,°\mathrm{C}$; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_g - T_a)\mathrm{e}^{-Kt}$$
$$T(t) = (T_a - T_g)\cdot(1 - \mathrm{e}^{-Kt}) + T_g$$
$$T(t) = (T_a - T_g)\mathrm{e}^{-Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm;

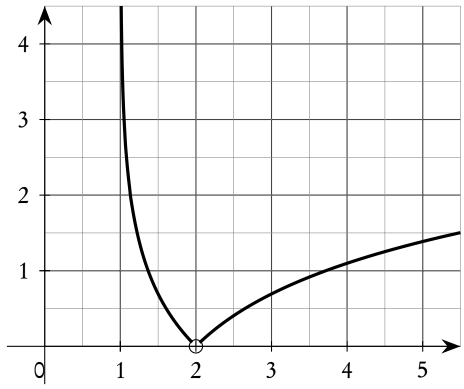
4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del $9,05\%$, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Questionario

1. Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?
2. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola nel punto di ascissa 2 e nel suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria della parabola.
3. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto(2) $(1,1,1)$ al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.
4. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ x^2 - kx + h, & \text{se } 2 < x \le 4 \end{cases},$$
determinare i parametri h e k in modo che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo $[0,4]$.
5. Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:
$$f(x) = \frac{x}{2^{1/x} + 1}.$$
6. Risolvere la seguente equazione:
$$6 \cdot \binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}.$$
7. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2,$$
dopo aver determinato il campo di esistenza ricerca l'eventuale asintoto verticale.
8. Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione: $y = \sin 2x$ e generalizza il risultato per $y = \sin nx$ con $n \in \mathbb{N}$.
9. Un oggetto viene lanciato verso l'alto; supponendo che
$$h(t) = 40t - 2t^2$$
sia la legge oraria del suo moto espressa in metri, determina la funzione velocità e la quota massima raggiunta dall'oggetto.
10. Analizza il grafico(3) della funzione
$$y = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$$
e studiane i punti di discontinuità:

[2] Il testo ministeriale usa in realtà la scrittura $[1,1,1]$ per indicare il punto in esame: non abbiamo reperito alcun caso in letteratura di uso delle parentesi quadre per indicare le terne di numeri reali.

[3] Vedi il commento al testo originale del ministero pubblicato nella pagina 696.



Dopo aver individuato il tipo di discontinuità scrivi l'espressione della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità.

3.90.2. Simulazione del 29 aprile 2016

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 1

Le centraline di controllo del Po a Pontelagoscuro (FE) registrano il valore della portata dell'acqua, ovvero il volume d'acqua che attraversa una sezione trasversale del fiume nell'unità di tempo. Come responsabile della sicurezza della navigazione fluviale in quel tratto del Po, devi valutare quando consentire la navigazione stessa, in considerazione delle condizioni atmosferiche e del livello dell'acqua.

Nel corso dell'anno le portate medie del Po (a Pontelagoscuro) sono di circa 34 milioni di m^3 al giorno in regime di magra, 130 milioni di m^3 al giorno in regime normale con un'oscillazione del 10% e 840 milioni di m^3 al giorno in regime di piena (fonte *deltadelpo.net*).

Durante un periodo di alcuni giorni di piogge intense, dalle rilevazioni registrate risulta che:

— nei primi due giorni dall'inizio delle misurazioni il valore della portata dell'acqua si è alzato dal valore di regime normale di 130 milioni di m^3 al giorno fino al valore massimo di 950 milioni di m^3 al giorno;

— nei giorni successivi la portata si è ridotta, tornando verso il valore di regime normale, inizialmente più velocemente e poi più lentamente.

1. Indicando con t il tempo, misurato in giorni, fissa un adeguato sistema di riferimento cartesiano in cui rappresentare il grafico dell'andamento della portata. Verifica se una delle seguenti funzioni può essere usata come modello per descrivere tale andamento, tenendo conto dei valori rilevati e del punto di massimo, giustificando con opportune argomentazioni sia la scelta che l'esclusione.

$$f(t) = a \cdot cos(b \cdot t) + c$$
$$g(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-t^2/b} + c$$
$$h(t) = a \cdot t \cdot \mathrm{e}^{1-b \cdot t} + c$$
$$a,\, b,\, c \in \mathbb{R}.$$

2. Individuata la funzione, determina i parametri in modo che siano verificate le condizioni sopra descritte per la portata e tracciane il grafico.
3. Studia la variazione della portata nel tempo e valuta dopo quanti giorni tale variazione raggiunge il suo minimo. Inoltre, dovendo prevedere quando autorizzare la ripresa della navigazione in condizioni di sicurezza, valuta, analiticamente o per via grafica, dopo quanti giorni la portata rientra nel limite di oscillazione del valore di regime normale.
4. Nel tempo trascorso tra l'inizio del fenomeno e il rientro nei limiti normali, qual è il volume di acqua che ha superato il valore di regime normale?

Problema 2

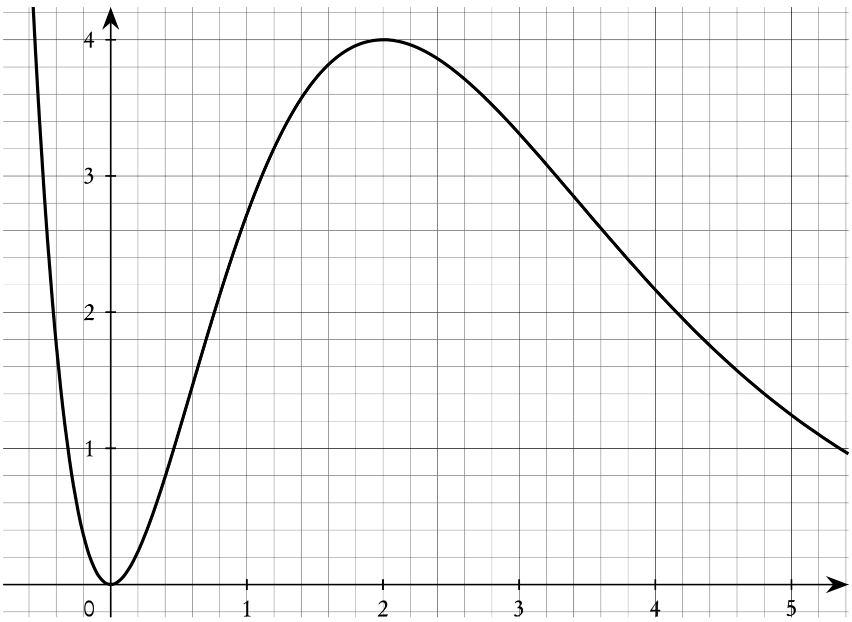


Figura 1: grafico G

Il grafico G in figura 1 rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

1. Determina il valore del parametro k affinché la $f(x)$ sia rappresentata dal grafico, motivando la tua risposta. Calcola inoltre le coordinate dei punti di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti e le equazioni delle rette tangenti a G nei punti di flesso;
2. considera un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine, nel punto della funzione di ascissa a, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determina il valore $a \geq 0$ per cui la sua area sia massima;
3. calcola l'area della regione piana delimitata da G e dall'asse x nell'intervallo $[0, 2]$ e determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo $[0, 2]$ si adotta,

per approssimare $f(x)$, una funzione razionale di 3° grado della forma

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

con $r(0) = f(0) = 0$, $r(2) = f(2) = 4$, $r'(0) = 0$, $r'(2) = 0$;

4. dimostra che, dette A e B le intersezioni tra le tangenti a G nei punti di flesso e l'asse x, C e D le proiezioni dei punti di flesso sull'asse x, si ha:

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = |\overline{\mathsf{CD}}|,$$

per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Questionario

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione

$$y = x^3 - x + 3$$

e dalla retta stessa.

2. Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{1/x} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$g(x) = \frac{x}{3^{1/x} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

   a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?

   b) Descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

4. Utilizzando il differenziale calcola di quanto aumenta il volume di un cono retto avente raggio di base 2 m e altezza 4 m quando il raggio di base aumenta di 2 cm.

5. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

6. Determinare la soluzione particolare della equazione differenziale $y' - x = xy$, verificante la condizione iniziale $y(0) = 2$.

7. Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \le x \le 3, \\ e^{x-3} + 1, & \text{se } 3 < x \le 6, \end{cases}$$

nell'intervallo $[1, 6]$ e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

8. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

9. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x + 2y - z + 2 = 0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10. Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

nel suo punto di flesso.

N.B. I quesiti 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10 sono identici a quelli proposti nella prova d'esame della sessione ordinaria 2015 delle scuole italiane all'estero (Americhe), il quesito 1 è quasi identico all'analogo quesito della stessa prova. Gli stessi quesiti sono stati anche proposti nella sessione straordinaria del corso di ordinamento dell'anno 2015.

3.90.3. Sessione ordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

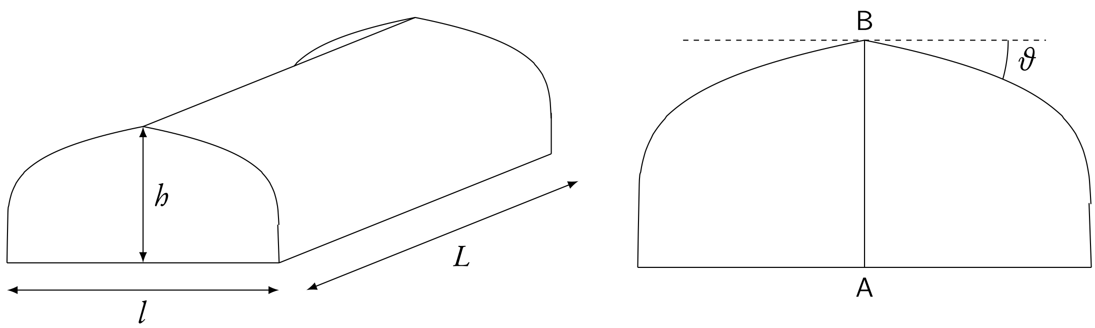


Figura 1 Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

— la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a 8 metri;

— la larghezza l del serbatoio deve essere pari a 2 metri;

— l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;

— il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;

— la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno $13\,\mathrm{m}^3$, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;

— al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che può descrivere meglio il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{1/k}$$
$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$
$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\, x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Problema 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni punti.

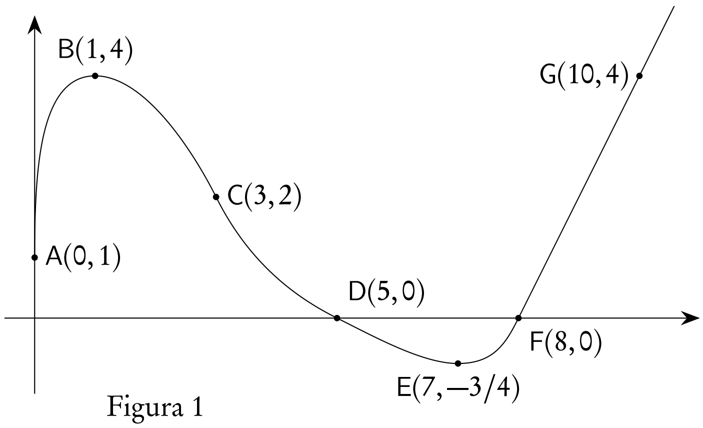


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x+y-8=0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco ABCD, dall'asse delle x e dall'asse delle y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x),$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$
$$y = |f(x)|'$$
$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0,8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1,7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9,10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Questionario

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

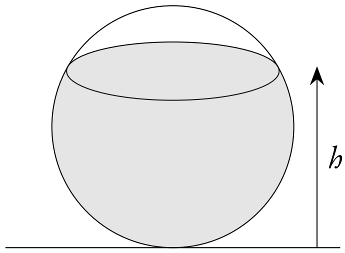
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}\,dx, \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx.$$

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con} \quad a > 0,$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h.



Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da

$$V = \pi \cdot \left(r h^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

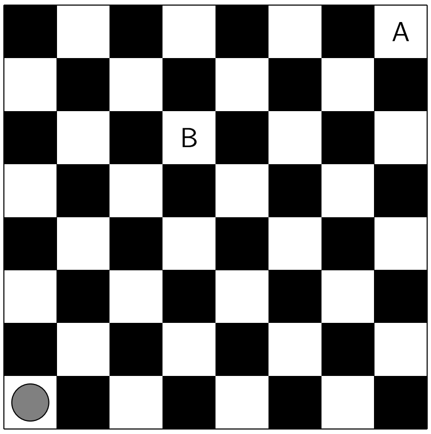
4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una sola è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

5. Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, 1, 2)$ è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

"Esiste un polinomio $P(x)$ tale che $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$".

7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura.



Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?

8. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x(2x+x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1,2\mathrm{e})$.

9. Date le rette

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

e il punto $\mathsf{P}(1,0,-2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1,+\infty[$:

$$f(x)=\int_{\mathrm{e}}^{x^2}\frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{\mathrm{e}}$.

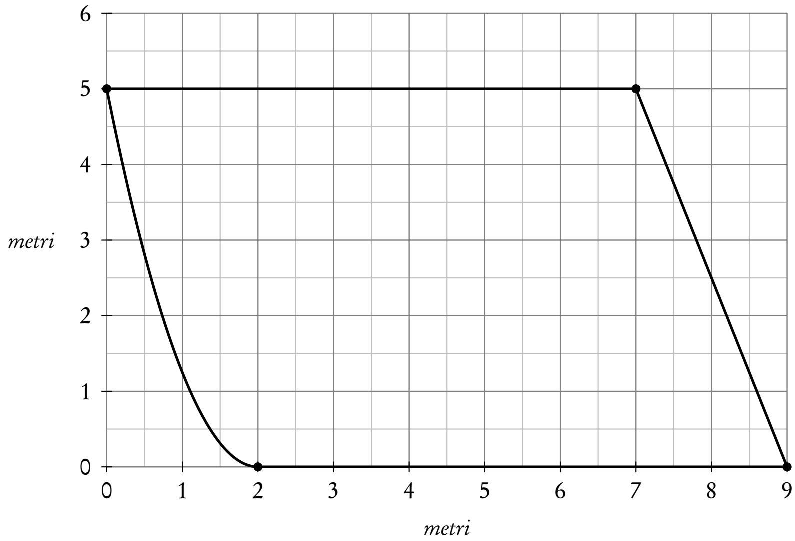
3.90.4. Sessione suppletiva

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e da attrezzare. La superficie individuata è rappresentata in figura:



La superficie viene chiusa con pareti laterali altre 3.60 metri e con un tetto piano e orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di CO_2 (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di CO_2 lo 0.15%: su un milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di CO_2 deve essere dunque 1500.

Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

METRI CUBI DA AERARE	POTENZA RICHIESTA (Kilowatt)
41	2
68	2.6
108	3.5
135	4.4
162	5.3
216	6.1
270	7.2

1. In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di CO_2 installato nella sala indica una concentrazione dello 0.3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0.15%. Il sistema di aerazione immette nella sala 20 $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{minuto}}$ di aria fresca contenente lo 0.1% di CO_2.

2. Approssimando il volume della sala a $130\,\mathrm{m}^3$, ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (espresso in minuti). Verifica inoltre che la funzione
$$c(t) = k \cdot \mathrm{e}^{-2t/13} + h$$
è una soluzione di tale equazione differenziale.
3. Determina i valori da assegnare alle costanti k e h in modo che la funzione $c(t)$ rappresenti l'andamento della concentrazione di $\mathrm{CO_2}$ a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'areatore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.
4. L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di $\mathrm{CO_2}$ (*fonte*: OSHA, *Occupational Safety and Health Administration*), descrivi come cambierà l'andamento di $c(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

Problema 2

Fissato $k \in \mathbb{R}$, la funzione $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita:
$$g_k(x) = \mathrm{e}^{-k \cdot x^2}.$$
Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano $\mathrm{O}xy$.

1. Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \mathbb{R}$, l'andamento della funzione g_k.
2. Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k, passano tutte per il punto $\mathrm{T}(0, 2/\sqrt{\mathrm{e}})$.

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k.

3. Prova che esiste un unico rettangolo R_k di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. È possibile scegliere k in modo che il rettangolo R_k sia un quadrato?
4. Posto
$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x,$$
determina il valore di
$$\lim_{t \to +\infty} G(t),$$
e interpreta il risultato in termini geometrici.

Questionario

1. Si consideri questa equazione differenziale:
$$y'' + 2y' + 2y = x.$$
Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

a) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + x$.

b) $y = 2e^{-x} + x$.

c) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(x - 1)$.

d) $y = e^{-2x} + x$.

2. Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3 - 1|},$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

3. Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0.1\,\mathrm{m}^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$.

4. Posto, per $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \int_0^1 x^n e^x \,dx,$$

stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha

$$A_n = e - n A_{n-1}.$$

5. I lati di un triangolo ABC misurano: $|\overline{AB}| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\overline{BC}| = 6\,\mathrm{cm}$, $|\overline{CA}| = 5\,\mathrm{cm}$. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A?

6. I punti $A(3,4,1)$, $B(6,3,2)$, $C(3,0,3)$, $D(0,1,2)$ sono vertici di un quadrilatero ABCD. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

7. Determinare la distanza tra il punto $P(2,1,1)$ e la retta

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}.$$

8. Supponiamo che l'intervallo di tempo t (in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di $100\,\mathrm{m}^2$ sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:

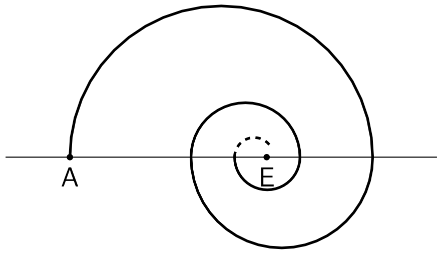
$$P(t \le z) = \int_0^z 0.01 \cdot e^{-0.01s} \,ds.$$

a) Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni uno dall'altro.

b) Si determini qual è il minimo numero di anni z, tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro.

9. Una curva "a spirale" inizia nel punto A, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di 80 cm. Il diametro d_2 della seconda è pari ai 3/5 di d_1. Il diametro d_3 della terza è pari ai 3/5 di d_2, e così via:

$$d_{n+1} = \frac{3}{5} d_n, \quad \text{per ogni} \quad n.$$



Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie semicirconferenze tendono al cosiddetto "occhio" E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).

Qual è la distanza (in linea retta) tra il putno A e il punto E?

E qual è la lunghezza del cammino che va da A ad E, percorrendo l'intera curva?

10. Si stabilisca il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-73\cos^3\left(4x+\dfrac{\pi}{11}\right)}{5x-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{7}\right)},$$

motivando adeguatamente la risposta.

3.90.5. Sessione straordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di $12\pi\,\text{cm}^3/\text{s}$. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.

1. Determina l'espressione della funzione $h(t)$, che rappresenta il livello h (in cm) raggiunto dall'olio all'istante t (in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.

2. Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.
3. Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio l_A, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione $V(l_A)$ da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.
4. A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R, a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

Problema 2

La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è così definita:

$$f(x)=\sin(x)-x\cdot\cos(x).$$

1. Dimostra che f è una funzione dispari, che per $x\in\,]0,\pi]$ si ha $f(x)>0$ e che esiste un solo valore $x_0\in\,]0,2\pi]$ tale che $f(x_0)=0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x\in[0,5\pi]$.
2. Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e sapendo che risulta

$$\int_0^{\pi/2} f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3+18\pi<96$$

anche non conoscendo il valore di π.

3. Verifica che, qualsiasi sia $n\in\mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=4,$$
$$\int_0^{2n\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

4. Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

Questionario

1. Calcolare il limite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\big(\cos(x)-1\big)}{\ln\big(\cos^2(x)\big)}.$$

2. In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia?

3. Determinare il parametro reale a in modo che i grafici dei $y=x^2$ e di $y=-x^2+4x-a$, siano tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.

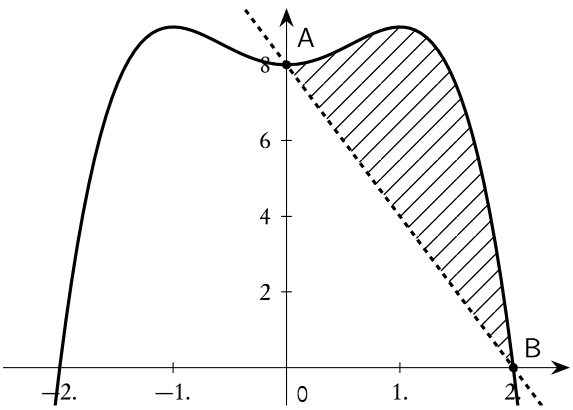
4. Dati i punti $\mathsf{A}(2,4,-8)$ e $\mathsf{B}(-2,4,-4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ e l'equazione del piano tangente alla sfera passante per A.

5. Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una gionata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?

6. In un semicerchio di raggio $r=10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?

7. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione esplicitando il procedimento seguito:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n}.$$

8. Data la funzione $f(x)=-x^4+2x^2+8$, sia g la retta passante per i punti $\mathsf{A}(0,8)$ e $\mathsf{B}(2,0)$. Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.



9. Dati i punti $\mathsf{A}(-2,0,2)$, $\mathsf{B}(1,1,2)$, $\mathsf{C}(0,-1,-2)$, $\mathsf{D}(1,1,0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

10. Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y.

3.91. Anno scolastico 2016-2017

3.91.1. Sessione ordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $|\overline{DE}| = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

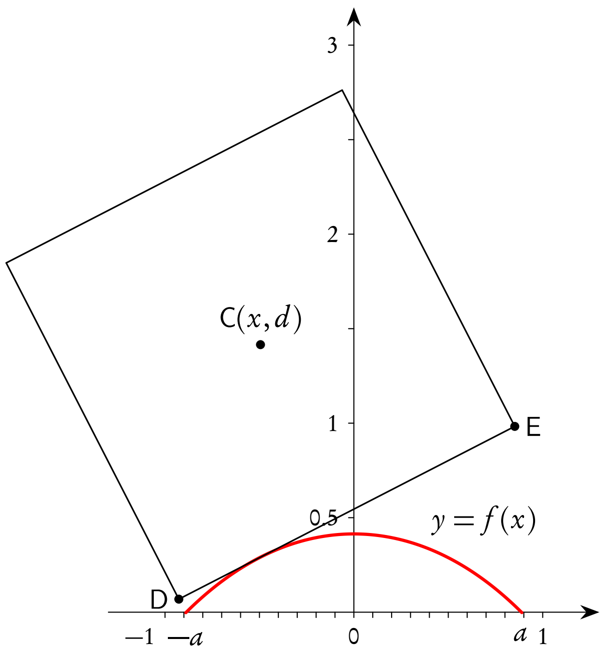


Figura 2

1. Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a, a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a, a]$, come mostrato in figura 3.

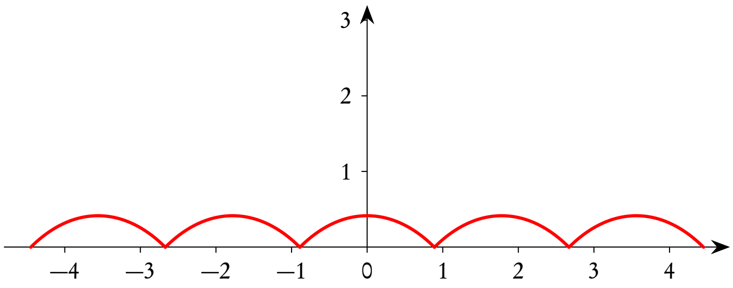


Figura 3

2. Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

   — a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;

   — la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$, per $x \in [-a, a]$.

   Stabilisci se tali condizioni sono verificate[4].

3. Considerando la similitudine dei triangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

[4] In generale, la lunghezza dell'arco di una curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx.$$

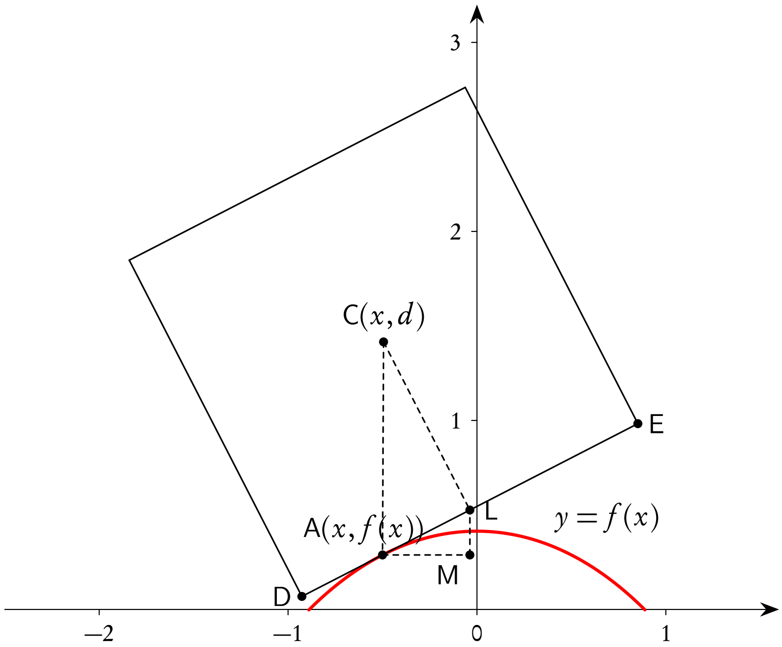


Figura 4

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{per} \quad x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}, \frac{\ln(3)}{2}\right],$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta ad essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4. Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$, il cui grafico, nell'intervallo $[0, 4]$, è il seguente:

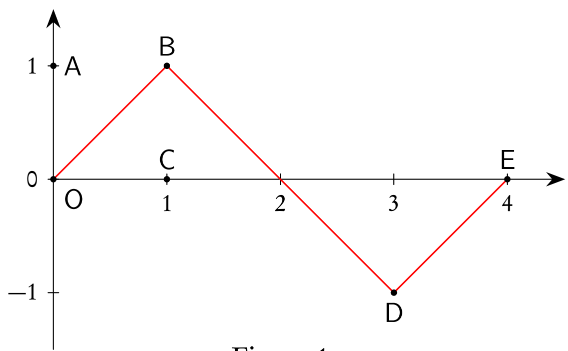


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti $\overline{\mathsf{OB}}$, $\overline{\mathsf{BD}}$, $\overline{\mathsf{DE}}$ del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $\mathsf{O}(0,0)$, $\mathsf{B}(1,1)$, $\mathsf{D}(3,-1)$, $\mathsf{E}(4,0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x\in[0,4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x)=f'(x)$$

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Considera la funzione

$$s(x)=\sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano OABC in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina la probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni[5]

$$f^2(x) \quad \text{e} \quad s^2(x)$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x\in[0,3]$ e l'asse delle x.

Questionario

1. Definito il numero E come:

$$E=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

dimostrare che risulta

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

in termini di e ed E.

[5] Il testo ministeriale usa le notazioni $f(x)^2$ e $s(x)^2$ per i quadrati delle due funzioni, notazione abbastanza inusuale, seppure utilizzata in alcuni software.

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.
3. Sapendo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$
determinare i valori di a e b.
4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0,2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:
$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3.$$
Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

   Quale la probabilità che il primo estratto sia 4/3?

   Quale la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?
5. Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.
6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^a}$$
sia un numero reale non nullo.
7. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:
$$x+2y-z+1=0$$
nel suo punto P di coordinate $(1,0,2)$.
8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.
9. Dimostrare che l'equazione:
$$\arctan(x)+x^3+e^x=0$$
ha una e una sola soluzione reale.
10. Data la funzione:
$$f(x)=|4-x^2|$$
verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3,3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3,3]$ in cui la derivata di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

3.91.2. Sessione suppletiva

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, come in figura 1.

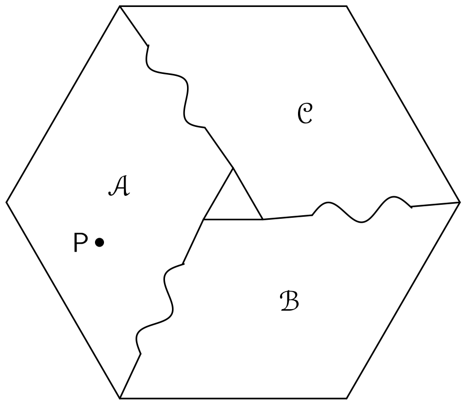


Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un certo varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.

Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in $\mathcal{A}$, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 ($\mathcal{A}$ e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da $\mathcal{A}$).

Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1. Dimostrare che
$$p_1(x) = (1-x)^2, \quad p_2(x) = 2x(1-x)^2, \quad p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$
e disegnare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0,1]$.
2. È vero che, qualunque sia $x \in [0,1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0.3 e almeno una deve essere minore di 0.4?
3. Provare che esiste un unico $x_0 \in [0,1]$ tale che:
$$p_1(x_0) = p_3(x_0)$$

e stabilire se vale la disuguaglianza:

$$x_0 > \frac{1}{2}.$$

Discutere inoltre, al variare di x in $[0,1]$, quale delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

4. Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = 1/2$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?

Problema 2

Data una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x)\sin(2x).$$

1. Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

con k numero intero.

2. Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.

3. Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \text{ intero})?$$

Presenta dei flessi in tutti i suoi punti di intersezione con l'asse x? Motiva le tue risposte.

4. Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e, posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H?

Questionario

1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{3-x}.$$

Preso un numero reale a, sia R_a la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa $x > a$ che sono compresi tra il grafico di f e l'asse x. Per quale valore di a l'area di R_a risulta pari a 2?

2. Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto $(1,0,3)$ al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.

3. Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo $[0,2]$, è distribuita secondo la densità di probabilità
$$p(x)=k\cdot x^2(2-x),$$
dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata.

4. Rappresentare il grafico della funzione
$$f(x)=\left|\frac{3-2x}{x-3}\right|.$$
Verificare se negli intervalli $[0,2]$ e $[4,6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e in casso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a,b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

5. Sia $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$. Determinare $f^{(2017)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

6. Determinare la distanza tra il punto $\mathsf{P}(6,6,8)$ e la retta:
$$\begin{cases} x-y=2z+1 \\ z=y+1 \end{cases}.$$

7. Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa un punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa due punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

8. Stabilire se le rette:
$$r:\quad y=5x-6$$
$$s:\quad y=21x+25$$
sono tangenti alla curva δ di equazione:
$$y=x^3-2x^2+x+1.$$

9. Data la funzione
$$f(x)=x^2+1\quad x\in\mathbb{R},$$
determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x\in[0,3]$.

10. Trovare una funzione g, il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:
$$g(0)=0\quad g'(0)=0\quad g''(0)=0\quad g'''(0)=1\quad g^{(4)}(0)=1\quad g^{(5)}(0)=1.$$

3.91.3. Sessione straordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la corrispondente sperimentazione quadriennale.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

L'azienda per cui lavori vuole aprire in città una pista di pattinaggio su ghiaccio e ti ha dato l'incarico di occuparti del progetto.

La pista verrà realizzata su un terreno di forma rettangolare, di base 40 metri e altezza 20 metri. e secondo le specifiche che ti sono state fornite sarà di forma ellittica[6] e avrà area pari a 600 m^2. Stabilito un sistema di assi cartesiani Oxy, il cui centro coincide con il centro dell'ellisse e con quello del rettangolo, in figura 1 sono rappresentati il terreno e la pista, in figura 2 la regione relativa al primo quadrante. La superficie in grigio è da adibire a deposito e a servizi tecnici, per cui deve essere inaccessibile al pubblico: essa è delimitata dalle tanegtni alla pista passanti per i punti medi dei lati verticali $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

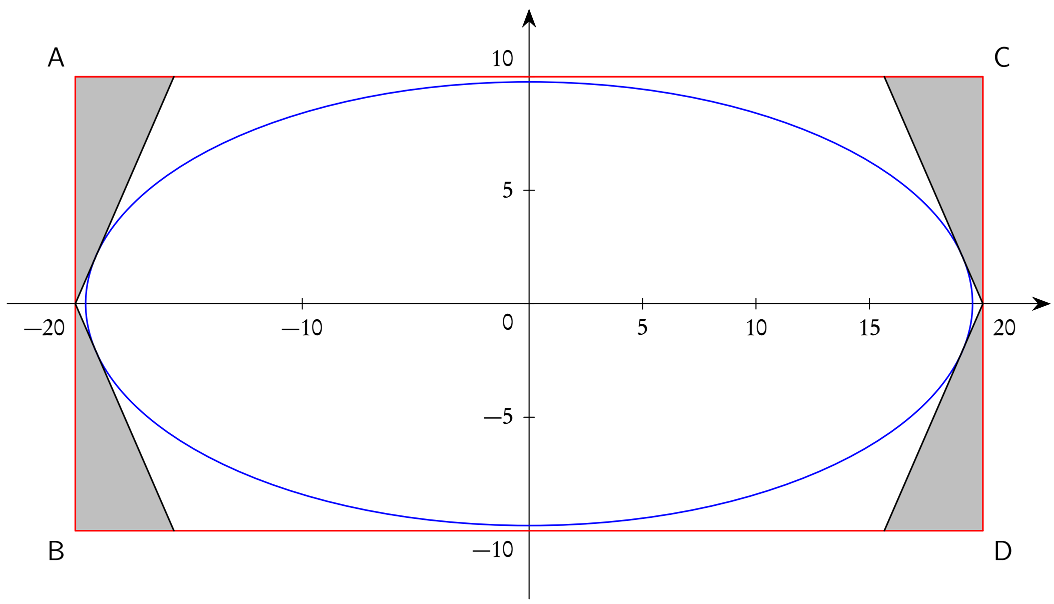


Figura 1

[6]L'equazione dell'ellisse, in coordinate cartesiane, è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

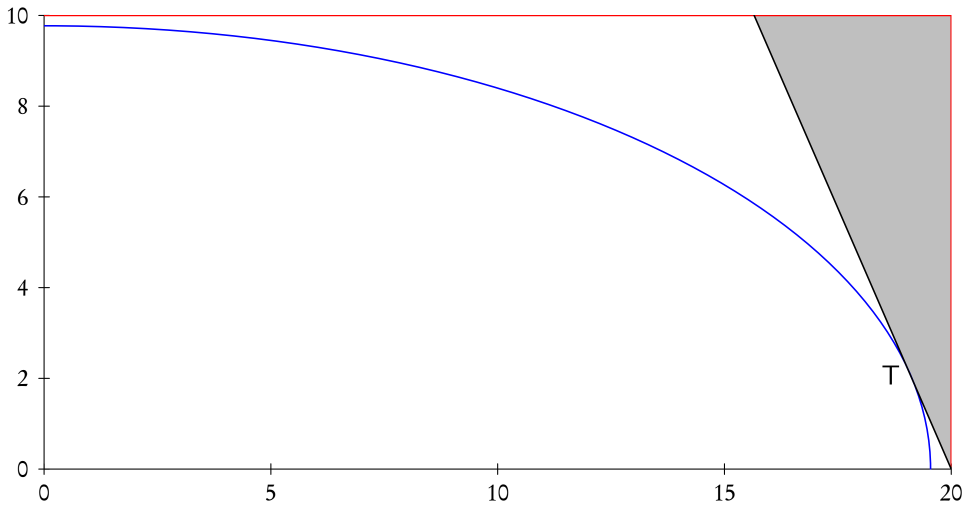


Figura 2

1. Determina, in funzione di a e b (rispettivamente lunghezza del semiasse orizzontale e del semiasse verticale del'ellisse) le coordinate del punto di tangenza T, e verifica che l'espressione della superficie totale S dell'area evidenziata in grigio nella figura 2 è:

$$S = \frac{50\sqrt{400 - a^2}}{b}.$$

2. Per motivi estetici, è richiesto che la proporzione tra il semiasse orizzontale e quello verticale dell'ellisse sia uguale a quella tra il lato orizzontale e quello verticale del rettangolo. Ricordando che l' area della pista(7) deve essere pari a $600\,\mathrm{m}^2$, determina i valori di a e b (approssimati al centimetro). Verifica inoltre che la superficie evidenziata in grigio occupi meno del 15% del terreno disponibile.

Un'altra problematica da affrontare riguarda la scelta di un macchinario per la produzione del ghiaccio necessario per la pista, tenendo presenti la dimensione della pista, il tempo impiegato per tale produzione e il relativo consumo di energia. Tramite una ricerca di mercato, hai individuato un dispositivo che riesce a lavorare a una velocità che è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto e in 3 ore di lavoro, a temperatura ambiente standard, produce una lastra di ghiaccio di superficie di $600\,\mathrm{m}^2$ avente uno spessore di 3 cm.

3. Individua, per il macchinario selezionato, il modello matematico che descrive l'andamento dello spessore dello strato di ghiaccio in funzione del tempo.

Per un utilizzo ottimale la pista deve avere uno spessore compreso tra i 6.5 e gli 8 cm.

4. Determina il tempo che il macchinario impiega a realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7.5 cm.

(7) L'area della superficie racchiusa dall'ellisse di semiassi a e b è pari a $\pi a b$.

Problema 2

Le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\,,\\
g_2(x) &= |x| - 1\,,\\
g_3(x) &= -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),\\
g_4(x) &= \ln(|x|).
\end{aligned}$$

1. Verifica che nei punti $x = 1$ e $x = -1$ la funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 condividono le stesse rette tangenti.
2. Dopo aver tracciati i grafici delle funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 , deduci quelli delle funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1,\\ -g_1(x), & \text{se } |x| < 1,\end{cases}$$
$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1,\\ -g_2(x), & \text{se } |x| < 1,\end{cases}$$
$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & \text{se } |x| \geq 1,\\ -g_3(x), & \text{se } |x| < 1,\end{cases}$$

   Classifica gli eventuali punti di non derivabilità di f_1, f_2, f_3 e, posto

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-e}^{e} f_1(x)\,dx,\\
I_2 &= \int_{-e}^{e} f_2(x)\,dx,\\
I_3 &= \int_{-e}^{e} f_3(x)\,dx,
\end{aligned}$$

   verifica le disuguaglianze

$$I_1 < I_3 < I_2.$$

3. Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0,\\ g_1(x), & \text{se } 0 < x < 1,\\ \ln(|x|), & \text{se } x \geq 1.\end{cases}$$

   dimostra che la funzione

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

   ammette uno zero nell'intervallo $\left[\sqrt{e}, e\right]$.
4. Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di $\pi/3$ radianti attorno all'asse x la regione di piano delimitata dalle rette di equazione $x = -1$, $x = +1$ e dai grafici di g_2 e g_1.

Questionario

1. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=\ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.
2. Data la funzione:
$$f(x)=\begin{cases} kx^2-2x+1, & \text{per } x<2, \\ x^2+(k-1)x-1, & \text{per } x\geq 2, \end{cases}$$
determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.
3. Un solido ha per base la regione Π del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x)=x^2+2$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0,2]$. Per ogni punto P di Π, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $x+1$. Calcolare il volume del solido.
4. Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito: $a)$ 4 volte; $b)$ le prime 4 volte.
5. Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x)=x^3+2x^2+kx-4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k?
6. In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x-4y-22=0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $\mathsf{C}(3,3,0)$. Determinare il raggio della sfera.
7. Data la funzione
$$f(x)=\ln(x)-[\ln(x)]^2\,,$$
dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x>1$, che passano entrambe per il punto $\mathsf{P}(0,1)$ e scrivere le rispettive equazioni.
8. Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto P di coordinate $(1,1,0)$ al piano di equazione $2x-2y+z=0$.
9. Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca "testa" in un lancio è pari a p, determina i possibili valori che può assumere p, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è $8/27$.
10. Data la funzione integrale
$$F(x)=\int_0^{e^{2x}}\ln(t)\,\mathrm{d}t,$$
calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

3.92. Anno scolastico 2017-2018

3.92.1. Sessione ordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura)[(8)] e le fasi di lavoro sono le seguenti:

— si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0, 1]$, che soddisfi le condizioni:

a) $f(0) = 1$;

b) $f(1) = 0$;

c) $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

— La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y = f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici$(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

— La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

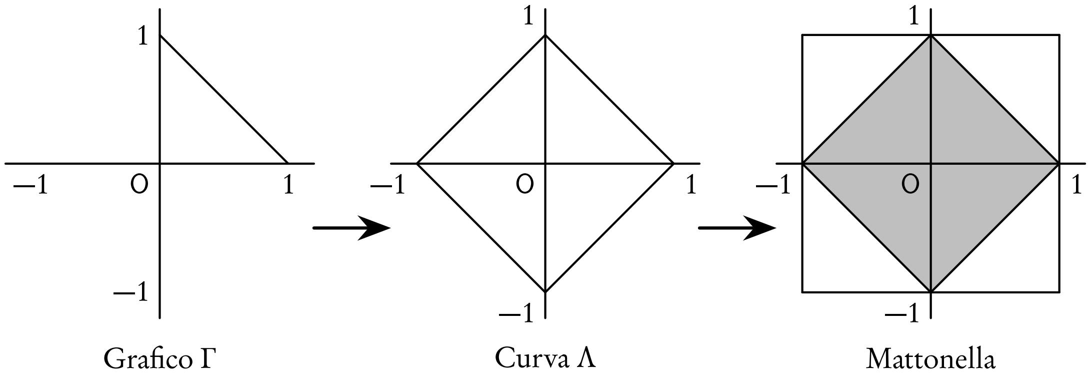


Grafico 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

[8]Il testo parla di lato di misura 1, mentre la figura propone un quadrato di lato 2.

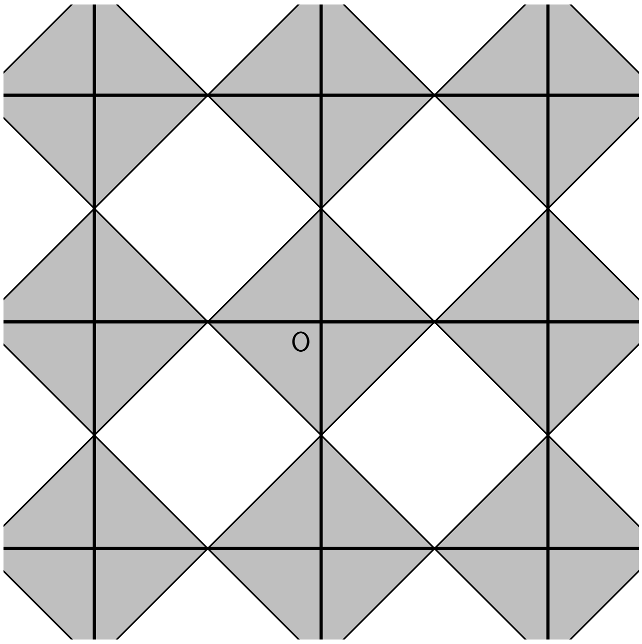


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e larea della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, considerate per $x \in [0, 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} BA(n)$$

ed interpreta i risultati ottenuti in termini geometrici.

Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

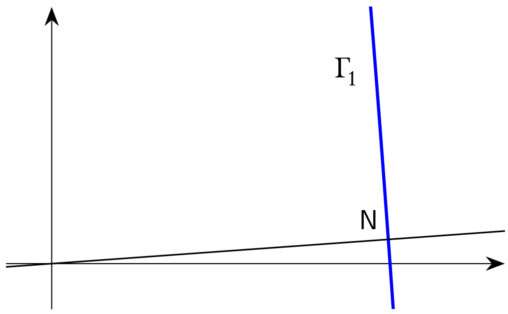
Problema 2

Consideriamo la funzione $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa 2/3.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P(x_P, y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Questionario

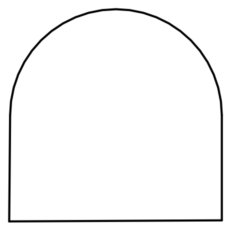
1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della

probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

3. Determinare i valori di k tali che la retta $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

4. Considerata la funzione
$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x},$$
determinare, se esistono, i valori di
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x),$$
giustificando adeguatamente le risposte fornite.

5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la vente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:



Determinare le dimensioni del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta
$$\mathrm{r}\colon \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
tangente al piano $\pi\colon 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $\mathrm{T}(-4, 0, 1)$.

7. Determinare a in modo che
$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)\,\mathrm{d}x$$
sia uguale a 10.

8. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

9. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $\mathrm{A}(3, 1, 0)$, $\mathrm{B}(3, -1, 2)$, $\mathrm{C}(1, 1, 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

10. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$y(x) = 2e^{kx+2}$$

è soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

3.92.2. Sessione suppletiva

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Un artigiano deve realizzare una cornice in cui inscrivere uno specchio di forma circolare. A partire da una tavola quadrata di lato 3π decimetri (approssimato alla seconda cifra decimale), adoperando una macchina a controllo numerico (*CNC*), incide su ciascun lato una decorazione che rappresenta una porzione di curva goniometrica come si vede in figura 1.

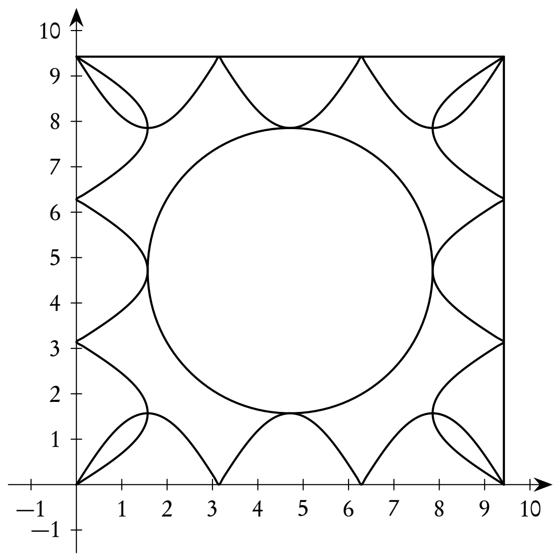


Figura 1

La macchina traccia sul lato giacente sull'asse delle ascisse la curva descritta dalla funzione $y = k|\sin(x)|$ con k parametro reale positivo. La cornice viene ruotata per realizzare la decorazione su ciascun lato. (La precisione della macchina è di 10^{-4} m, quindi al di sopra della precisione richiesta dalle misure della cornice).

1. Per ottenere la decorazione, occorre che le curve su due lati consecutivi si intersechino nel loro punto di massimo più vicino al vertice della cornice. Verifica che tale richiesta è soddisfatta per

$k = \pi/2$. La decorazione presenta delle "*foglie*" (colorate in grigio in figura 2) in corrispondenza dei quattro vertici. L'artigiano vuole rivestire queste quattro regioni con una polvere ceramica. Determina l'area, espressa in dm^2, della superficie da ricoprire.

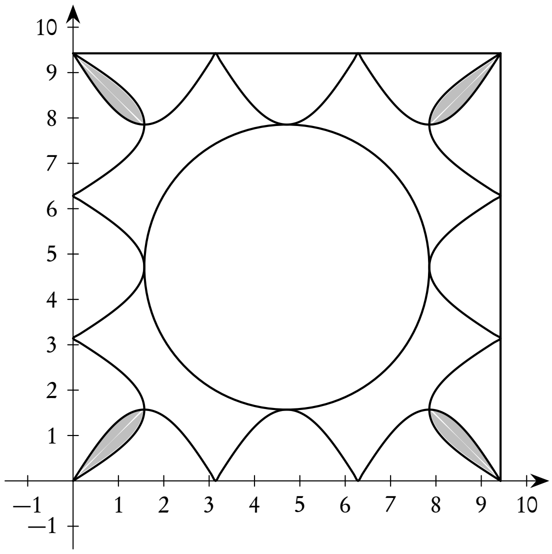


Figura 2

Volendo offrire ai clienti la possibilità di inserire nella cornice uno specchio di dimensioni maggiori, l'artigiano ne realizza un'altra con il lato delle stesse misure della precedente, ma con le quattro curve goniometriche che hanno in comune solo i vertici della cornice, così come in figura 3.

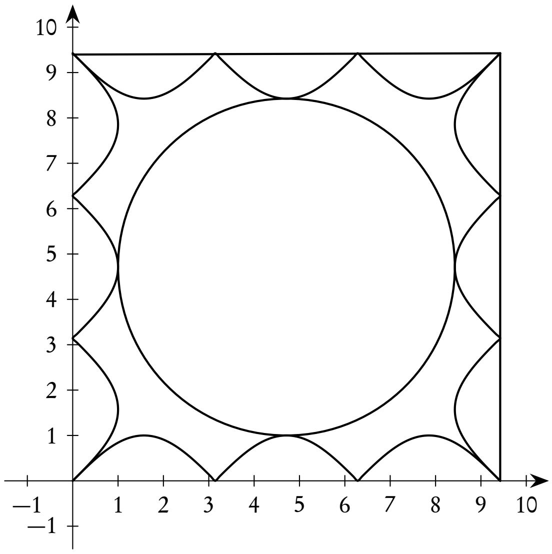


Figura 3

2. Verifica che per ottenere una decorazione di questo tipo occorre impostare nella macchina *CNC* un valore di k compreso tra 0 e 1 e che per $k = 1$ due decorazioni consecutive sono tangenti nel

vertice della cornice. Determina inoltre, in funzione di $k \in [0,1]$, l'area della parte di cornice compresa tra i lati e le quattro curve goniometriche, esprimendola in dm^2.

3. L'artigiano ha ovviamente l'esigenza di offrire la cornice a clienti che hanno specchi circolari di dimensioni diverse. Determina in funzione del parametro k l'area dello specchio tangente alle quattro curve goniometriche e stabilisci quindi l'area minima e massima possibile dello specchio.

Un cliente, per cui è stata realizzata una cornice con $k = 1$, chiede che la regione compresa tra lo specchio e le quattro curve venga dipinta con una vernice di cui l'artigiano possiede un flacone da 125 ml.

4. Dal momento che con 1 litro di vernice è possibile coprire m^2 di superficie, la quantità a disposizione è sufficiente per passare due mani di vernice? Per quale valore di k la quantità di vernice richiesta è massima?

Problema 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \quad \mathrm{e} \quad g_k(x) = \mathrm{e}^{x/k}$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, l due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni
$$a(x) = f_k\big(g_k(x)\big) \quad \mathrm{e} \quad b(x) = g_k\big(f_k(x)\big),$$
stabilisce se si verifica
$$a(x) = b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = \mathrm{e}^{x/2}$.

   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 assieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.

3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione y=x. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.

4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani. Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

Questionario

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $\mathsf{A}(0,0)$ e $\mathsf{B}(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ e dall'arco di curva avente equazione $y = 4\sin(x)$, con$0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento $\overline{\mathsf{AB}}$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

nell'intervallo $[p, 2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p. Determinare, al variare di p, le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.

3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1, -1, 2)$ tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.
4. Verificare che
$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(x)\,dx \quad \text{per} \quad n > 1$$
e usare questo risultato per calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx.$$
5. Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0.01%?
6. Data la funzione $y = x\,|ax^2 + b| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x = 1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.
7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2 + 1$ e $y = x^2 - 8x + 9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.
8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0, 10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x^2, & \text{se } 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{1}{10}, & \text{se } 1 < x \le 10. \end{cases}$$
Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.
9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistanti dai punti $A(0, 1, 2)$ e $B(-3, 2, 0)$.
10. Verificare che la funzione
$$y = e^{-x}\sin x$$
è soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

3.92.3. Sessione straordinaria

Il testo è valevole anche per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Un produttore di candeline tea light vuole produrre un nuovo tipo di candela colorata che abbia una parte inferiore di forma cilindrica ed una parte superiore avente la forma[9] riportata in figura 1, che si connetta perfettamente a quella inferiore, come mostrato in figura 2:

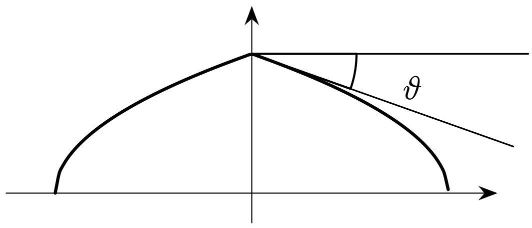


Figura 1

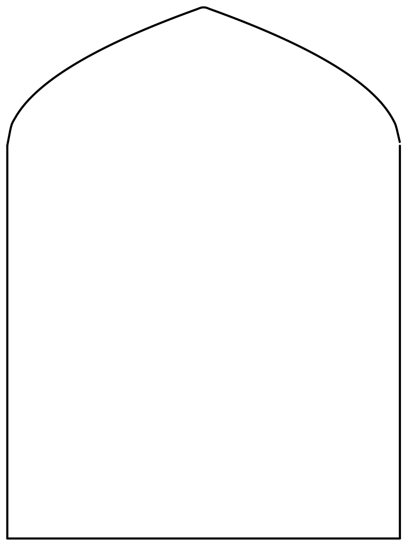


Figura 2

1. Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:

$$1.\quad y=\begin{cases}\sqrt{a-x}, & \text{se } 0\le x\le a,\\ \sqrt{a+x}, & \text{se } -a\le x<0\end{cases}\qquad \text{con}\quad a\in\mathbb{R}, a>0;$$

$$2.\quad y=a-x^2\quad \text{in}\quad \left[-\sqrt{a}\,,\sqrt{a}\right]\quad \text{con}\quad a\in\mathbb{R}, a>0;$$

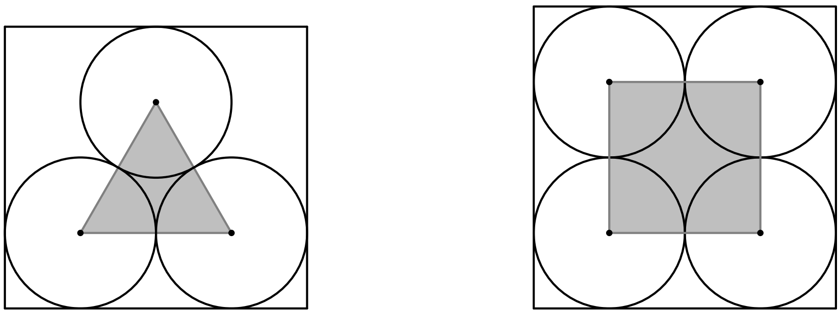
$$3.\quad y=-\sqrt{|x|}+a\quad \text{in}\quad \left[-a^2\,,a^2\right]\quad \text{con}\quad a\in\mathbb{R}, a>0.$$

[9]Nel testo ministeriale in realtà l'angolo ϑ è segnato tra la semiretta orizzontale e l'arco di curva, cosa per lo meno impropria, anche se risulta evidente dal contesto che si deve intendere l'angolo tra la semiretta orizzontale e la tangente "destra" all'arco di curva, come nella figura da noi modificata.

Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

2. Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.
3. Attribuendo all'altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un'opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all'interno delle scatole, rappresentate in figura 3:



Configurazione 1 Configurazione 2

Figura 3

4. Fornisci una valutazione numerica dell'efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile in ciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, così definita:

$$f(x)=\ln\left(a\cdot e^{bx}+c\right)$$

al variare di a, b, c parametri reali positivi.

1. Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad f''(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

2. Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per$x\to-\infty$, e un asintoto obliquo, per $x\to+\infty$; determina a, b, c, in modo che l'asintoto orizzontale, per $x\to-\infty$, sia la retta di equazione $y=0$ e l'asintoto obliquo, per $x\to+\infty$, sia la retta di equazione $y=x$.

3. Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$h(x) = f(-|x|)$$

e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2.$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S.$$

Questionario

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $k/2$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.
2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2, 2, 2)$ tangente al piano di equazione

$$x + 2y + z = 12.$$

3. Considerando la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{4} + 2x, & \text{per } x < 4, \\ e^{4-x} + 3, & \text{per } x \geq 4, \end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.
4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x \cdot \sin(x)$, adoperando la definizione di derivata.
5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

le rette $y = 2$, $x = 5$ e l'asse y.
6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

nel suo punto di flesso.

7. La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{per } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ \dfrac{7}{12}, & \text{per } x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right],\\ \dfrac{1}{2}, & \text{per } x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right]; \end{cases}$$

determinare la media e la mediana della variabile casuale x.

8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $(1,1,1)$ al piano di equazione $2x-y-z=0$, a distanza 6 da tale piano.

9. Considerando la funzione
$$f(x)=\frac{ax+1}{x}$$
definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a. Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3[(10)].

10. Dimostrare[(11)] che la derivata della funzione
$$f(x)=\mathrm{e}^{ax}$$
è la funzione
$$f'(x)=a\cdot\mathrm{e}^{ax}.$$

[10] L'area richiesta risulta maggiore di 3 se $a<-2-\sqrt{6}\vee a>-2+\sqrt{6}$, quindi non esiste un minimo con la condizione richiesta. Tale minimo è invece $-2-\sqrt{6}$ se si richiede che l'area sia uguale a 3.

[11] La richiesta è sibillina: a differenza del quesito 4, non si richiede di usare la definizione di derivata, per cui la risposta a questo quesito può essere estremamente banale, usando la regola di derivazione delle funzioni composte.

4. Corso sperimentale PNI

Questo capitolo raccoglie tutte le prove assegnate al corso sperimentale "Piano Nazionale Informatica" (PNI) del Liceo Scientifico, dalla sua istituzione all'ultimo anno scolastico in cui la sperimentazione è rimasta attiva, 2014-2015.

Anche se in alcuni casi le domande proposte sono state comuni a quelle del liceo di ordinamento, abbiamo preferito inserire in questo capitolo i testi completi delle tracce proposte.

4.1. Anno scolastico 1991-1992

4.1.1. Sessione ordinaria

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e C'di equazione rispettivamente:
$$y - x^2 = 0$$
e
$$y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$$
Si verifichi che C e C' sono tangenti in $A(1,1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB, sia $\overline{QQ'}$ la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, $\overline{RR'}$ la corda intercettata da C' sulla parallela per P all'asse delle ordinate ed S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$.

   Si studi come varia il rapporto:
$$\frac{8 \cdot |\overline{PS}|^2}{|\overline{QQ'}| \cdot |\overline{RR'}|}$$
al variare di P, determinando in particolare il suo valore minimo.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle parabole C e C'.

2. In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. Si consideri la trasformazione di equazioni:
$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = a'x + b'y \end{cases}$$
tale che al punto A di coordinate $x = 1$, $y = 1$ corrisponda il punto A' di coordinate $X = 0$, $Y = 2$ e al punto B di coordinate $x = 1$, $y = 0$ corrisponda il punto B' di coordinate $X = 1$, $Y = 0$.

Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi.

Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r′, si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r, determinando in particolare il massimo relativo ed il massimo assoluto di $\tan\alpha$.

3. Si desidera fondere due sequenze A e B di numeri interi, non ordinate e con eventuali valori ripetuti, in un'unica sequenza C nella quale compaiono, in ordine crescente e senza ripetizioni, i valori presenti in A e in B.

   Il candidato, formulate le eventuali ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie, proponga ed illustri una procedura per risolvere il problema e la codifichi in un linguaggio di sua conoscenza.

4.1.2. Sessione suppletiva

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Si consideri in un piano cartesiano ortogonale Oxy la circonferenza di centro $A(1,0)$, passante per l'origine degli assi.

   Detta r la retta di equazione $y = mx$, sia OPQ il triangolo rettangolo, inscritto nella circonferenza, il cui cateto $\overline{OP}$ appartiene alla retta r.

   Si studi come varia l'area $f(m)$ del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo OPQ e si tracci in un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $O'ms$, la curva C di equazione $s = f(m)$.

   Detti M' ed M'' i punti di massimo di $f(m)$, si determini l'area del triangolo mistilineo avente come lati gli archi della curva $O'M'$, $O'M$ ed il segmento $\overline{M'M''}$.

2. Si consideri l'insieme delle curve aventi, in un piano cartesiano ortogonale Oxy, equazione:
$$y = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x}.$$
   Si determinino le curve C e C' dell'insieme passanti per i due punti P e P′ dell'asse delle ascisse, ciascuno a distanza 2 dall'origine degli assi, e tali che P sia estremo per C e P′ estremo per C'.

   Si dimostri che P e P′ sono punti di flesso rispettivamente per C' e per C. Si calcolino le tangenti nei punti di flesso e si disegnino le curve.

   Scritta l'equazione della curva C'' corrispondente della curva C' nella simmetria avente per asse la retta di equazione $y = -2$, si dimostri che le curve C e C'' si corrispondono in una trasformazione T. Si individuino la natura di T e i suoi punti e rette unite.

   Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle curve C e C'' e dalla retta di equazione $x = 2\sqrt{2}$.

3. Si vuole trovare quali valori sono contenuti in un insieme A di numeri interi e con quale frequenza compare ciascun valore. Si desidera inoltre produrre un elenco di valori e delle relative frequenze in ordine decrescente di frequenza.

   II candidato, formulate le eventuali ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie, proponga ed illustri una procedura per risolvere il problema e la codifichi in un linguaggio di sua conoscenza.

4.2. Anno scolastico 1992-1993

4.2.1. Sessione ordinaria

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Si studi la funzione:
$$f(x)=1+\sqrt{x^2-2x+5}$$
e si tracci, in piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, la curva C di equazione $y=f(x)$, verificando che essa è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x=1$.

   Si determinino in particolare le equazioni $y=g_1(x)$ e $y=g_2(x)$ degli asintoti di C.

   Si determini sull'asse delle ascisse l'intervallo I di misura massima tale che, per ogni $x\in I$, l'errore assoluto che si commette, sostituendo a $f(x)$ il valore $g_1(x)$ o $g_2(x)$, sia minore di
$$\frac{1}{10^k}\quad (k \text{ intero}).$$
   Successivamente si descriva una procedura che consenta di calcolare gli estremi di tale intervallo e la si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

2. Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni:
$$\begin{cases} ax+y+bz=1\\ x+y+az=1\\ x+ay+bz=1\end{cases}$$
   ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione.

   Interpretando a e b come coordinate di un punto di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oab, si determini il luogo dei punti del piano soddisfacente alla condizione $x_0=2y_0z_0$, essendo x_0,y_0,z_0 la soluzione dei sistema nel caso essa sia unica.

3. Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p $(0<p<1)$ di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta.

   a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto.
   b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p'\neq p$ $(0<p'<1)$ di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p'>1/2$.
   c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

      $E_1=\{$la giuria composta da A, B e C ne assolve due su tre $\}$;

$E_2 = \{$la giuria composta da A, B e D ne assolve tre su tre$\}$;

$E_3 = \{$la giuria composta da A, B e D assolve almeno un imputato$\}$.

In particolare per $p = 3/4$ si determini il valore di p' (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione) in modo che $P(E_1) = P(E_2)$.

4.2.2. Sessione suppletiva

Il candidato deve svolgere due problemi, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Si studi la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x^3}$$

   e si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il grafico della curva C di equazione $y = f(x)$, determinando in particolare l'ascissa a del suo punto di flesso F appartenente al primo quadrante.

   Sia S l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva C, dagli assi coordinati e dalla parallela all'asse delle ordinate passante per F. Si divida l'intervallo I, appartenente all'asse delle ascisse, di estremi 0 e a, in n parti uguali di estremi $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = a$. Siano T_n e R_n rispettivamente le aree dei poligoni, il primo somma dei trapezi aventi per altezza i segmenti in cui è stato diviso I e per basi i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ e $f(x_{h+1})$ $(h = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ ed il secondo somma dei rettangoli aventi per lati le altezze dei trapezi ed i segmenti di lunghezza $f(x_h)$ $(h = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$.

   Si dimostri che:

$$R_n < S < T_n$$

   e si determini il valore minimo di n per il quale risulta $T_n - R_n < 1/10^k$ (k intero). Successivamente si descriva una procedura che consenta di calcolare tale valore di n e la si codifichi in un linguaggio di programmazione noto.

2. Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} ax + 2y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$$

   ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione.

   Nella relazione cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema non ammetta un'unica soluzione si esegua la sostituzione:

$$a = X \quad ; \quad b = XY$$

   Si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali OXY, la curva C rappresentata dall'equazione a cui si perviene.

3. Una macchina produce pezzi meccanici. Ogni pezzo prodotto ha una probabilità $0 < p < 1$ di essere funzionante e probabilità $q = 1 - p$ di essere difettoso.

a) Presi a caso k pezzi prodotti, si esprima la probabilità dei seguenti eventi:

$E_1 = \{$tutti i k pezzi sono funzionanti$\}$;

$E_2 = \{$uno solo dei k pezzi è difettoso$\}$;

$E_3 = \{$almeno uno dei k pezzi è difettoso$\}$.

b) Per ogni k si determini p in modo tale $P(E_1) = P(E_2)$.

c) Per $p = 6$ si calcoli la probabilità dell'evento: $E_4 = \{$il primo pezzo difettoso è il decimo prodotto dal momento in cui la macchina entra in funzione$\}$.

d) Per $p = 9/10$ si calcoli la probabilità dell'evento:

$E_5 = \{$si ha al massimo un pezzo difettoso nei primi dieci prodotti$\}$.

4.3. Anno scolastico 1993-1994

4.3.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Si studi la funzione:
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}.$$
Si tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, il grafico della curva C di equazione $y = f(x)$ e si scrivano le equazioni delle rette tangenti a C nei suoi punti $(x, f(x))$, per i quali $f(x)$ assume valore estremo relativo, e della tangente nel suo punto di flesso.

   Detta r la parallela all'asse delle ascisse passante per il punto P d'intersezione della curva C con il proprio asintoto a, si determini il rapporto dei segmenti $\overline{\mathsf{OR}}$ ed $\overline{\mathsf{OP}}$, essendo O e R le proiezioni su a degli ulteriori punti d'intersezione di r con C.

2. Si consideri la trasformazione T che muta i punti $\mathsf{A}(1, 0)$, $\mathsf{B}(0, 1)$, $\mathsf{C}(-1, 0)$ di un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, rispettivamente nei punti $\mathsf{A}'(0, 1)$, $\mathsf{B}'(2, -1)$, $\mathsf{C}'(0, -1)$.

   Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione ed il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti ABC e $\mathsf{A'B'C'}$.

   Detta K la circonferenza per i punti A, B, C e P la parabola di equazione $y = -2x^2 + 1$, si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero. Si considerino le figure K' e P' ottenute da K e P mediante la trasformazione T e la figura Q' ottenuta trasformando il quadrato Q, circoscritto a K e con i lati paralleli agli assi coordinati.

   Avvalendosi della trasformazione T si dica la natura di K, P' e C' e si determinino:

   a) le coordinate dei punti in cui Q' è tangente a K';

   b) le coordinate dei punti d'intersezione di K' e P';

   c) l'area delle tre regioni finite di piano delimitate da K' e P'.

3. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ si considerino le linee di equazione:
$$y = x^3 + x^2$$
e
$$y = -2x^2 + 1.$$
Si dimostri che le due linee hanno un punto d'intersezione nel primo quadrante con ascissa x_0 appartenente all'intervallo $]0,4\,;\,0,8[$.

Avvalendosi di un metodo numerico si determini x_0 con un'approssimazione di $1/100$.

Si descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di x_0 con un'approssimazione di 10^{-n} e la si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

4.3.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Sono dati una circonferenza Γ di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 4$ ed il triangolo rettangolo ABC tale che la sua ipotenusa $\overline{\mathsf{AC}}$ incontra Γ in P e tale che la sua misura sia
$$8\sqrt{\frac{2}{5}}.$$
Si conduca una retta perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ che incontra rispettivamente $\overline{\mathsf{AB}}$, Γ ed $\overline{\mathsf{AC}}$ in D, E ed F e siano E' ed F' le proiezioni di E ed F su $\overline{\mathsf{BC}}$.

Si studi al variare di $\overline{\mathsf{AD}}$, la variazione del volume V del solido S generato, in un giro completo attorno ad $\overline{\mathsf{AB}}$, dal rettangolo $\mathsf{EE'F'F}$.

Osservato che V ha due massimi relativi, si calcoli, quando V assume il suo valore massimo assoluto, l'area della superficie totale di S.

2. E' assegnato il triangolo rettangolo ABC, retto in B, tale che $|\overline{\mathsf{AB}}| = 4$ e $|\overline{\mathsf{BC}}| = 3$ e sia D il punto di $\overline{\mathsf{BC}}$ per cui $|\overline{\mathsf{BD}}| = 1$. Si indichi con α il piano per B, perpendicolare alla retta CB, e con β il piano per D, parallelo ad α.

Sia $\overline{\mathsf{P}}$ un punto del piano β, P la proiezione di $\overline{\mathsf{P}}$ da C sul piano α e P' il punto d'intersezione di α con la parallela per P alla retta AC.

Si dimostri che, se $\overline{S}$ è l'area di un triangolo descritto da $\overline{\mathsf{P}}$ su β e S ed S' sono le aree dei triangoli descritti rispettivamente da P e da P' su α, si ha
$$S' = \frac{4}{9}S.$$
Si consideri sul piano α un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico avente l'origine in B, semiasse positivo delle ascisse la semiretta BA di origine B e tale che A abbia ascissa 4, e sul piano

β il sistema di assi cartesiani ortogonali monometrico avente l'origine in D, i semiassi paralleli ed equiversi al sistema di riferimento del piano α e la stessa unità di misura di quest'ultimo.

Si dimostri che dette x, y le coordinate di P e $\overline{x}, \overline{y}$ le coordinate di $\overline{\mathsf{P}}$ risulta:

$$x = \frac{3}{2}\overline{x} \qquad , \qquad y = \frac{3}{2}\overline{y},$$

e dette X, Y le coordinate di P$'$ risulta:

$$Y = \overline{y} \qquad , \qquad X = \overline{x} + \frac{4}{3}$$

Si scrivano le equazioni della trasformazione T che porta P in P$'$, si determinino i suoi elementi uniti e la natura di T, e si deduca che se δ e δ' sono le aree di due qualsiasi parti di piano descritte rispettivamente da P e da P$'$, sussiste la relazione

$$\delta' = \frac{4}{9}\delta.$$

3. Per pianificare i trasporti in un centro cittadino si effettuano delle rilevazioni, in corrispondenza di un punto nevralgico, in due diverse fasce orarie. Vengono rilevati il numero dei veicoli ed il relativo numero di occupanti. I dati sono quelli della seguente tabella:

Ore di punta		Altro orario	
n. occupanti	n. veicoli	n. occupanti	n. veicoli
1	250	1	77
2	135	2	75
3	42	3	28
4	47	4	0
1	250	1	77
		5	34

Si richiede di:

— rappresentare graficamente le distribuzioni statistiche;

— dare una descrizione, mediante indici statistici (media, moda, varianza) della situazione nelle due fasce orarie;

— utilizzare i dati della tabella per valutare la seguente affermazione: *Nelle ore di punta c'è un aumento sia del numero di auto sia del numero di occupanti per ogni auto*.

4.4. Anno scolastico 1994-1995

4.4.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0(1,0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\widehat{A_0}A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_0A_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_1; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse.

   Il candidato:

   a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata, tenendo conto che la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di primo termine a_0 e ragione q è
   $$S_n = a_0\frac{1-q^n}{1-q};$$
   b) determini il limite di l_n al tendere di n all'infinito distinguendo i due casi:
      1) $a < \frac{\pi}{4}$
      2) $a \geq \frac{\pi}{4}$

      e verificando che nel caso 1) detto limite assume valore finito $l(\alpha)$;
   c) studi in detto caso, come varia $l(\alpha)$ al variare di α;
   d) descriva una procedura che, con riferimento alla definizione di progressione geometrica, consenta di calcolare la lunghezza h della spezzata $A_0A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la parabola Γ di equazione
   $$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$
   e sia P il punto di Γ di ascissa λ.

   Il candidato:

   a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine O e avente il vertice nel punto P;
   b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ;
   c) tracci il grafico della curva Σ individuandone in particolare il flesso F;
   d) detta r la retta per F e per il punto A, di ascissa -1, della curva Σ, calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da Σ ed r;
   e) dica l'errore relativo che si commette assumendo come area di detta regione quella del triangolo inscritto OFA.

3. Nella tabella seguente sono riportati i dati di un'indagine campionaria, relativamente ad alcune regioni e al 1990, sulla distribuzione delle abitazioni secondo la superficie abitata (area espressa in metri quadrati):

Regione/Superficie	50-95 mq	96-110 mq	110-130 mq	131-200 mq
Liguria	130	11	6	5
Campania	362	1805	105	122
Sicilia	1068	430	203	149

Il candidato:

a) stimi la superficie media abitata nelle tre regioni e la deviazione standard delle stime, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio;

b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali, rispettivamente per regioni e per superficie;

c) verifichi l'ipotesi:

H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie delle superfici nelle diverse regioni;

d) verifichi l'ipotesi:

H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni relative alle diverse regioni.

4.4.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. É dato in un piano α il triangolo ABC retto in B con i lati $|\overline{\mathsf{AB}}| = a$ ed $|\overline{\mathsf{AC}}| = 2a$. Si conducano in uno dei semispazi individuati dal piano α i segmenti $\overline{\mathsf{AA'}}$, $\overline{\mathsf{BB'}}$, $\overline{\mathsf{CC'}}$ perpendicolari ad α, tali che $|\overline{\mathsf{AA'}}| = |\overline{\mathsf{BB'}}| = 4a$ e l'angolo
$$\mathsf{B}\widehat{\mathsf{B'}}\mathsf{C'} = \frac{\pi}{4}.$$

Il candidato:

a) indicato con P un punto del segmento $\overline{\mathsf{BB'}}$ e posto $|\overline{\mathsf{BP}}| = x$, studi come varia la somma $s = |\overline{\mathsf{AP}}| + |\overline{\mathsf{PC}}|$ al variare di P determinando in particolare, con un metodo analitico o sintetico, il minimo ed il massimo valore assoluto di s, e tracci in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xs$ la curva di equazione $s = s(x)$;

b) dimostri che la faccia $\mathsf{A'B'C'}$ del solido T di vertici $\mathsf{ABCA'B'C'}$ è un triangolo rettangolo;

c) calcoli la superficie totale ed il volume di T.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ è assegnato il punto $\mathsf{A}(a, -a)$.

Il candidato:

a) scriva l'equazione della circonferenza Γ di centro A che stacca sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza $2\sqrt{2}$;

b) intersechi Γ con l'iperbole Σ di equazione $xy-1=0$ e, osservando che l'equazione risolvente del sistema delle due equazioni delle due curve è il quadrato di un trinomio, deduca che al variare di a le curve Γ e Σ sono bitangenti tra loro in due punti distinti B e C;

c) individui le circonferenze Γ_1 e Γ_2 che si ottengono per quei valori di a per cui il segmento $\overline{BC}$ dista dal centro della circonferenza di cui è corda i $3/10$ del segmento stesso;

d) calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle rispettive corde $\overline{BC}$ di Γ_1 e Γ_2 e dalla curva Σ.

3. Nella tabella seguente sono riportate le distribuzioni delle durate in anni (n = numero degli anni) delle pene per i condannati nel 1990 ad almeno un anno di carcerazione (escluso l'ergastolo), suddivise per sesso, secondo una indagine campionaria:

Sesso/Anni	$1 \leq n < 2$	$2 \leq n < 5$	$5 \leq n < 10$	$10 \leq n < 15$	$15 \leq n \leq 30$
Maschi	200	329	168	91	154
Femmine	13	17	11	5	6

Il candidato:

a) stimi la durata media delle pene per maschi e femmine e le rispettive deviazioni standard, assumendo come valore rappresentativo di ogni classe il valore medio;

b) rappresenti mediante diagrammi opportuni le distribuzioni marginali per sesso e per durata;

c) verifichi l'ipotesi:

H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le distribuzioni relative alla durata delle pene per maschi e femmine;

d) verifichi l'ipotesi:

H_0: non c'è differenza significativa (5%) tra le medie della durata delle pene per maschi e femmine.

4.5. Anno scolastico 1995-1996

4.5.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnati i punti $A(2,0)$ e $B(0,4)$. Sia $P(x,y)$ un punto di detto piano con $x>0$ ed $y>0$ e C, D, E, F i punti medi dei lati $\overline{OA}$, $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{BO}$ del quadrilatero OAPB.

Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare P affinche il quadrilatero OAPB degeneri in un triangolo;

b) dimostri che il quadrilatero CDEF e un parallelogrammo;

c) dica quali posizioni deve occupare P affinche il parallelogrammo CDEF sia un rettangolo;

d) dica quali posizioni deve occupare P affinche il parallelogrammo CDEF sia un rombo;

e) dica dove si trova P quando il parallelogrammo CDEF è un quadrato e ne determini le coordinate;

f) dimostri che l'area del parallelogrammo CDEF e metà dell'area del quadrilatero OAPB;

g) esprima in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato $\overline{EF}$ e l'area del parallelogrammo CDEF, quando P, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione $y = 4 - x$;

h) studi la funzione $z(x)$ e ne disegni il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'xz$.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione
$$y = -x^2 + 2x + 3.$$
Sia $P(x, y)$ un punto dell'arco γ, appartenente al primo quadrante, di detta parabola ed H la proiezione di P sull'asse delle ascisse.

Sul piano α passante per il punto P e perpendicolare all'asse delle ascisse, si consideri il triangolo APB, avente i lati $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ uguali, il segmento $\overline{PH}$ come altezza relativa al lato $\overline{AB}$, e tale che la somma delle lunghezze di $\overline{AB}$ e di $\overline{PH}$ sia 4.

Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare P sull'arco considerato affinche il triangolo APB esista;

b) limitatamente alle suddette posizioni di P, esprima l'area S del triangolo APB in funzione dell'ascissa di P e studi come varia al variare di P;

c) calcoli il volume del solido, luogo del triangolo APB al variare di P sull'arco γ;

d) risponda alle domande a) e b) quando P varia sull'arco γ' della parabola considerata, appartenente al semipiano $x \geq 0$, verificando in particolare se esistono estremi relativi ed assoluti di $S(x)$ ed eventualmente determinandoli.

3. Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco. Paolo colpisce il bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole:

— lanceranno una moneta per decidere che tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni;

— tireranno a turno e vincera chi per primo farà centro.

Il candidato:

a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro;

b) calcoli la probabilità che Paolo vinca entro il quarto tiro;

c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo;

d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità che Paolo vinca all'ennesimo lancio se ad iniziare è stato Giovanni, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

4.5.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Si consideri in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il settore circolare T del primo quadrante, appartenente al cerchio delimitato dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=r^2$, tale che i raggi che lo individuano siano sull'asse x e sulla retta di equazione $y=\sqrt{3}x$.

   Il candidato:

   a) calcoli il volume V_1 e V_1' dei solidi ottenuti dalla rotazione completa di T rispettivamente attorno all'asse x e all'asse y;

   b) determini, utilizzando il teorema di Guldino, le coordinate del baricentro del settore;

   c) considerati i punti $A(r,0)$ e $C(1/2,0)$ e detti O', C' le rispettive proiezioni dei punti O, C sulla retta t di equazione $y=1$, esprima in funzione di r il rapporto

   $$s=\frac{V_1+V_2}{V_3}$$

   essendo V_2 il volume del cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo OAO' intorno all'asse y e V_3 il volume del cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo ACC' intorno alla retta CC';

   d) studi come varia il suddetto rapporto al variare del raggio r della circonferenza e rappresenti in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'rs$ il grafico della funzione $s(r)$.

2. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy è assegnata la parabola γ avente per asse di simmetria l'asse x e passante per i punti $A(0,-1)$ e $B(-2,0)$. Siano r una retta parallela all'asse y, H il suo punto di intersezione con l'asse x e Q ed R i suoi punti di intersezione con la parabola γ.

   Il candidato:

   a) esprima in funzione dell'ascissa di H l'area S del triangolo OQR e studi come essa varia al variare di r;

   b) dica quale è l'insieme descritto dall'ascissa di H quando esistono 3 triangoli OQR tra loro equivalenti;

   c) determini con l'approssimazione di $1/10$ gli estremi dell'intervallo descritto dall'ascissa di H quando esiste un solo triangolo OQR la cui area S è minore di 1;

   d) descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di tali estremi con un'approssimazione di 10^{-n} ($n \in \mathbb{N}$) e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

3. Al servizio di soccorso stradale di una certa città, aperto 24 ore su 24, arrivano in media 48 chiamate al giorno, due in media all'ora, secondo una distribuzione di Poisson.

   Il candidato:

   a) calcoli la probabilità che nella prima ora arrivino almeno due chiamate;
   b) calcoli la probabilità che il tempo di attesa fino alla prima chiamata di un certo giorno sia di almeno un'ora;
   c) tenendo presente che il 45% delle chiamate è effettuato da donne che nel 90% dei casi richiedono l'intervento del carro attrezzi, mentre tale intervento è richiesto dagli uomini nel 75% dei casi, determini, se si registra una richiesta di intervento del carro attrezzi, quale è la probabilita che la richiesta sia stata effettuata da un uomo;
   d) calcoli quale è il numero medio di richieste di carro attrezzi per ora.

4.6. Anno scolastico 1996-1997

4.6.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ sia data la parabola γ di equazione $y = x^2$ e sia P un suo punto di ascissa $\lambda \neq 0$ ed r la parallela per P all'asse y.

   Siano γ_1 e γ_2 le parabole con asse la retta r, vertice in P e stessa distanza focale di γ (distanza fuoco-direttrice, pari a
   $$\frac{1}{2|a|}$$
   per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$).

   Il candidato:

   a) scriva in funzione di λ le equazioni di γ_1 e γ_2, essendo γ_1 la parabola che incontra γ solo in P;
   b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano γ in γ_1 e γ in γ_2;
   c) dica la natura di dette trasformazioni, precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi;
   d) fissato $\lambda = 1$ e dette T, T_1, T_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x - h = 0$, studi la funzione
   $$z = \frac{|\overline{\mathsf{TT}_1}| + |\overline{\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2}|}{|\overline{\mathsf{TT}_2}|}$$
   al variare di h, e ne tracci il relativo grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}'hz$.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia r la retta di equazione $x-1=0$ e P un suo punto. Siano A e B i punti d'intersezione della retta OP con la circonferenza di centro P e raggio $2\sqrt{2}$.

   Il candidato:

   a) verifichi che il luogo di A e B, al variare del punto P su r, è dato dalle curve γ_1 e γ_2, rispettivamente di equazione $y=f_1(x)$ e $y=f_2(x)$, essendo:

   $$f_1(x)=+\frac{x}{x-1}\sqrt{7+2x-x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x)=-\frac{x}{x-1}\sqrt{7+2x-x^2};$$

   b) determini l'insieme E di esistenza della funzione $f_1(x)$, gli insiemi in cui essa assume valore positivo, negativo o nullo, gli eventuali asintoti, il valore x_0 in cui ha un massimo relativo, e dimostri che le tangenti a γ_1 nei punti le cui ascisse sono gli estremi di E nei quali $f_1(x)$ è definita, sono parallele all'asse y;

   c) disegni la curva γ_1 e, quindi, la curva γ_2;

   d) detta t la tangente alla curva γ_1, nel suo punto $M(x_0, f(x_0)$, determini l'ulteriore intersezione di t con γ_1;

   e) detta S l'area della regione finita di piano compresa tra γ_1, l'asse x e la parallela all'asse y per il punto M, descriva una procedura che consenta di calcolare, mediante un metodo d'integrazione numerica a sua scelta, i valori approssimati di S e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

3. Si consideri in un piano α un rettangolo ABCD i cui lati $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ misurano rispettivamente a e $2a$. Sia AEF, con $E \in \overline{AB}$ ed $F \in \overline{CD}$, un triangolo isoscele la cui base $\overline{AE}$ misura $2r$.

   Il candidato:

   a) dimostri che una retta s parallela ad AB, a distanza x da essa, interseca i triangoli AEF ed AEC secondo segmenti uguali;

   b) detta C_1 la circonferenza di diametro $\overline{AE}$ e appartenente al piano γ passante per $\overline{AB}$ e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostri che le sezioni C_1' e C_2' di detti coni con il piano γ', passante per la retta s e parallelo al piano γ, sono circonferenze;

   c) determini i volumi dei coni T_1 e T_2;

   d) determini, per via sintetica o analitica, il valore di x per il quale C_1' e C_2' sono tangenti esternamente.

4.6.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di due soli problemi, scelti tra i tre proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali la funzione γ di equazione
$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Calcolare la somma delle aree delle superfici finite racchiuse tra la funzione γ e la funzione $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, \pi]$. Determinare il periodo della funzione
$$y = \sin nx + \frac{1}{3}\sin mx$$
dove n ed m sono due numeri interi maggiori di 0.
2. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente altezza $|\overline{\mathsf{AD}}| = 1$ e basi $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$ e $|\overline{\mathsf{CD}}| = x$, determinare il volume del parallelepipedo retto a base quadrata il cui lato di base sia uguale al lato obliquo $\overline{\mathsf{BC}}$ del trapezio e la cui altezza sia uguale alla base $\overline{\mathsf{CD}}$ del trapezio stesso.
Tracciare in coordinate cartesiane ortogonali il grafico della funzione $y = f(x)$ rappresentante il lato del cubo avente lo stesso volume del precedente parallelepipedo.
Determinare l'equazione della retta $\mathtt{t}$ passante per l'origine del sistema di riferimento delle coordinate cartesiane ortogonali e tangente alla curva $y = f(x)$ in un punto T del primo quadrante.
Verificare che T ha coordinate
$$x = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt[3]{\frac{25}{8}}.$$
Descrivere un procedimento numerico atto a determinare l'area racchiusa tra la funzione $y = f(x)$ e la retta $\mathtt{t}$. Tracciare il diagramma di flusso per la realizzazione di tale procedimento e codificarlo in un linguaggio di programmazione.
Indicare una stima dell'errore da cui è affetta la misura.
3. La distribuzione di Poisson descrive molto bene il conteggio delle disintegrazioni in un campione di nuclidi radioattivi se il campione è sufficientemente numeroso.
Un campione radioattivo contenga $2 \cdot 10^{10}$ nuclidi ciascuno dei quali ha probabilita $p = 10^{-10}$ di decadere in un secondo.
Calcolare:
   a) il numero medio atteso di decadimenti in un secondo,
   b) le probabilità di osservare 0, 1, 2, 3, e 4 decadimenti in un secondo,
   c) la probabilità di osservare più di 4 decadimenti in un secondo.

4.7. Anno scolastico 1997-1998

4.7.1. Sessione ordinaria

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$ sono dati i punti $\mathsf{A}(-1,0)$ e $\mathsf{B}(1,0)$.

   Il candidato:

   a) scriva l'equazione di Γ_1, luogo dei punti per cui è uguale a $2\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e da B, e l'equazione di Γ_2, luogo dei punti per cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B;
   b) verifichi che Γ_1, e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo;
   c) determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ, rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di Γ_1 e di Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti $\overline{\mathsf{VW}}$ e $\overline{\mathsf{V'W'}}$, essendo V, $\mathsf{V'}$ e W, $\mathsf{W'}$ i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1, e con Γ_2 (V e W di ascissa positiva);
   d) considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione $f(x)$ che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto $\mathsf{P}(x,0)$, distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva Λ di equazione $y = f(x)$;
   e) dica cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra Λ e l'asse delle ascisse.

2. Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}.$$

   Il candidato:

   a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;
   b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;
   c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;
   d) in tale condizione, fissato $h = 1$, studi come varia l'area s del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O'}ks$, la curva di equazione $s = s(k)$.

3. Una macchina produce barre di acciaio a sezione circolare la cui lunghezza ottimale dovrebbe essere di 5 metri ed il diametro della sezione di 4 centimetri. Le barre effettivamente prodotte, che si suppongono tra loro indipendenti, hanno una lunghezza aleatoria con distribuzione normale di media $m_1 = 5\,\mathrm{m}$ e scarto standard $\sigma_1 = 4\,\mathrm{cm}$. II diametro della sezione è una variabile aleatoria, indipendente dalla precedente, e con distribuzione normale di media $m_2 = 4\,\mathrm{cm}$ e scarto standard $\sigma_2 = 0,8\,\mathrm{cm}$.

Una generica barra prodotta può essere direttamente venduta senza modifiche se la sua lunghezza è compresa tra $4,95\,\mathrm{m}$ e $5,05\,\mathrm{m}$ e la sua sezione tra $2,8\,\mathrm{cm}$ e $5,2\,\mathrm{cm}$.

La tavola della funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata è, per alcuni valori, la seguente:

Ascissa:x	$F(x)$	Ascissa:x	$F(x)$
$-1,50$	$0,067$	$+0,95$	$0,829$
$-1,45$	$0,074$	$+1,05$	$0,853$
$-1,35$	$0,089$	$+1,15$	$0,875$
$-1,25$	$0,106$	$+1,25$	$0,894$
$-1,15$	$0,125$	$+1,35$	$0,912$
$-1,05$	0.147	$+1,45$	$0,927$
$-0,95$	$0,171$	$+1,50$	$0,933$

Il candidato:

a) verifichi che la probabilità p di poter mettere in vendita senza modifiche una generica barra prodotta è 0,68;

b) indicata con f_n la frequenza relativa alle barre direttamente vendibili su n barre prodotte, esprima, in funzione di p, la numerosità n necessaria perché la probabilità che f_n disti da p più di $0,05$ sia non superiore a $0,05$;

c) dato il valore di p rilevato in a), se su 2000 barre prodotte 1000 risultano non direttamente vendibili, dica se si può sospettare che la macchina non funzioni più secondo lo standard riportato sopra, se, cioè, il risultato ottenuto risulta a priori poco probabile (probabilità inferiore a $0,05$) subordinatamente alle modalità di funzionamento della macchina, come indicato;

d) descriva una procedura che consenta di calcolare la probabilità di ottenere la prima barra direttamente vendibile solo all'n-esima prova, al variare di p e di n, e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

4.7.2. Sessione suppletiva

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathrm{O}xy$, si considerino i punti $\mathrm{A}(2,0)$ e $\mathrm{P}(x,0)$.

   II candidato:

   a) esprima in funzione di x le funzioni $s(x)=|\overline{\mathrm{PO}}|+|\overline{\mathrm{PA}}|$ e $d(x)=||\overline{\mathrm{PO}}|-|\overline{\mathrm{PA}}||$, distinguendo le posizioni occupate dal punto P;

   b) tracci le linee di equazione $y=s(x)$ e $y=d(x)$;

c) tracci, quindi, la linea C di equazione

$$y = \frac{s(x)}{d(x)};$$

d) determini la misura degli angoli formati dalle rette tangenti a C nei suoi punti angolosi;

e) calcoli l'area della regione finita di piano compresa fra C e la retta di equazione $y = 2$.

2. Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ la sua circonferenza massima. Sulla semiretta di origine O, perpendicolare al piano di Γ e che interseca S in A, si consideri il punto B tale che $|\overline{\mathsf{OB}}| = \sqrt{3}$.

   Il candidato:

   a) individui il punto C del segmento $\overline{\mathsf{OA}}$, centro dell'ulteriore cerchio di intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;

   b) detto P un punto del segmento $\overline{\mathsf{OA}}$ la cui distanza da O sia x, scriva in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente i cerchi Γ_1, e Γ_2 ottenuti dall'intersezione del piano per P, perpendicolare ad $\overline{\mathsf{OA}}$, con S e con Σ;

   c) considerata la corona circolare W delimitata da Γ_1, e Γ_2, determini il volume $V(x)$ del solido delimitato da W e dalle superfici laterali dei coni anzidetti;

   d) disegni, in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, la curva di equazione $V = V(x)$.

3. In una successione di prove bernoulliane, con una probabilità p di successo di ogni prova, è possibile fissare il numero N delle prove e studiare la probabilità condizionata del numero di successi K, che indichiamo con $P(K = k|N = n)$. È anche possibile fissare il numero K di successi che si desidera ottenere e studiare la probabilità condizionata del numero N di prove necessarie per ottenerli, che indichiamo con $P(N = n|K = k)$. Il candidato:

   a) fornisca la formula generale per il calcolo di $P(K = k|N = n)$ (distribuzione binomiale);

   b) fornisca la formula generale per il calcolo di $P(N = n|K = k)$;

   c) verifichi che, comunque fissati N e K, risulta sempre $P(N = n|K = k) \leq P(K = k|N = n)$ e fornisca una giustificazione di ciò;

   d) descriva una procedura che consenta di calcolare $P(N = n|K = k)$ in funzione di p, di N e di K e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.

4.8. Anno scolastico 1998-1999

4.8.1. Sessione ordinaria

La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è data la parabola γ di equazione:

$$y = \frac{x^2}{2} - x.$$

Siano A un punto dell'asse x di ascissa λ, con $\lambda > 0$, B il suo simmetrico rispetto ad O, A′ e B′ i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse x sono rispettivamente A e B.

Il candidato:

a) verifichi che le tangenti a e b alla parabola γ, rispettivamente in A′ e B′, s'incontrano in un punto E dell'asse y;

b) detti C e D i rispettivi punti d'intersezione di a e b con l'asse x, esprima in funzione di λ l'area s dei triangolo CED;

c) studi la funzione $s(\lambda)$ e tracci, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $O'\lambda s$, la curva C di equazione $s = s(\lambda)$;

d) detto λ_0 il valore di λ per cui s assume valore minimo relativo, e dette a_0 e b_0 le posizioni di a e di b per detto valore, calcoli l'area della regione finita del semipiano di equazione $y \leq 0$, compresa tra γ, a_0 e b_0;

e) osservato che, nell'ipotesi posta di $\lambda > 0$, esistono due valori λ_1, e λ_2, con $\lambda_1 < \lambda_2$, per cui il triangolo CED è equivalente al quadrato di lato $\overline{OA}$, descriva una procedura che consenta di calcolare i valori approssimati di λ_1 con un'approssimazione di 10^{-n} e la codifichi in un linguaggio programmazione conosciuto.

2. In un piano α è assegnato il triangolo ABC, retto in B, i cui cateti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $\overline{VA} = \overline{AB}$.

Il candidato:

a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce de tetraedro VABC, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\widehat{B}C$;

b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro;

c) detto M il punto medio di $\overline{VA}$ e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V. esprima in funzione di x il volume v del tetraedro MPQR, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ con il piano β parallelo ad α e passante per P;

d) studi come varia v al variare di P sul segmento $\overline{VA}$, determinando in particolare la posizione $\overline{P}$ di P in cui il volume v assume valore massimo assoluto;

e) detto D il punto medio di $\overline{VB}$ ed E il punto di $\overline{AC}$ tale che $\overline{AE} = \overline{AB}$, determini la posizione P^* di P che rende minima la somma $\overline{DP} + \overline{PE}$ (si consiglia di far ruotare il triangolo VAB attorno ad $\overline{AV}$ fino a portarlo nel piano del triangolo VAE, simmetricamente a quest'ultimo, e considerare la somma $\overline{D'P} + \overline{PE}$, essendo D′ il corrispondente di D nella suddetta rotazione).

3. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $P(x,y)$, $A(x',y')$, $B(x'',y'')$, $P'(X,Y)$, legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x''=-y' \\ y''=x' \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} X=x''+2 \\ Y=y''-1 \end{cases}.$$

Il candidato:

a) dica la natura delle trasformazioni T_1, T_2, T_3, rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni;

b) determini la trasformazione T che fa passare da P a P';

c) studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti;

d) considerati i punti $C(3,0)$, $D(0,\sqrt{3})$, $E(0,-\sqrt{3})$, e detti γ la circonferenza per tali punti, a la retta CD, γ' ed a$'$ i trasformati di γ ed a mediante T, determini l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' ed a$'$;

e) determini il perimetro delle stesse regioni.

4.8.2. Sessione suppletiva

Il candidato svolga a sua scelta due dei tre argomenti proposti. Tempo concesso 5 ore.

1. Data la funzione $y=f(x)$ con

$$f(x)=\frac{4}{x+k}$$

e la funzione $y=g(x)$ con

$$g(x)=x^2-hx+4$$

ove h e k sono due numeri reali,

a) determinare per quali valori di k e h è

$$f(1)=g(1) \quad ; \quad f'(1)=g'(1);$$

b) tracciare su uno stesso piano di assi cartesiani i grafici delle due funzioni

$$y_1=\frac{4}{x+1}$$

e

$$y_2=x^2-3x+4;$$

c) calcolare l'area della superficie delimitata delle curve rappresentanti le due funzioni y_1 e y_2.

2. In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $|\overline{AB}| = 2$. Si tracci la semiretta parallela alla base $\overline{AB}$ passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui è $\overline{CD} = \overline{AC}$.
   a) Trovare la funzione $f(x)$ che esprime la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD in funzione dell'angolo $B\widehat{A}C = x$.
   b) Rappresentare il grafico della funzione $y = f(x)$ con
   $$y = \sin 2x(1 - \cos x)$$
   nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Determinare per quale valore dell'angolo $B\widehat{A}C = x$ la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD risulta massima.
   c) Calcolare infine l'area delimitata dalla funzione $f(x)$ e dall'asse delle ascisse nell'intervallo $[0, \pi/2]$.
3. Una ditta dispone di 10 linee telefoniche. La probabilità, in un istante qualsiasi, che una data linea sia occupata è 1/5. Determinato il numero medio di linee telefoniche libere, calcolare per ogni istante, con due cifre significative, la probabilità che:
   a) tutte le linee siano occupate,
   b) almeno una linea sia libera,
   c) almeno una linea sia occupata,
   d) esattamente due linee siano libere.

4.9. Anno scolastico 1999-2000

4.9.1. Sessione ordinaria

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso 5 ore.

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:
   $$f(x_0) > 0 \quad , \quad f'(x_0) > 0 \quad , \quad f''(x_0) = 0$$
   dove x_0 è un particolare valore reale.
   a) Spiegare perché tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0.
   b) Trovare almeno tre funzioni polinomiali $f(x)$, di grado superiore al 1°, aventi andamenti diversi in $x_0 = 0$, tali che:
   $$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 1 \quad , \quad f''(0) = 0.$$
   c) Determinare, se possibile, tutte le rette tangenti ai grafici delle funzioni trovate e parallele alla retta di equazione $y = x + 1$.

d) A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto a x, della funzione x^n, dove n è un intero qualsiasi non nullo.

2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, sono assegnati i punti: $\mathsf{A}(0,2)$, $\mathsf{B}(1,1)$, $\mathsf{C}(1,0)$.

   a) Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.
   b) Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.
   c) Calcolare l'area del triangolo $\mathsf{CAA'}$, dove $\mathsf{A'}$ è il punto trasformato di A nell'affinità α.
   d) Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti oltre ad O e C e trovare le sue rette unite.
   e) Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ.

3. Assegnata la funzione
$$f(x) = a\log^2 x + b\log x$$
dove il logaritmo si intende in base e, il candidato:

   a) determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto
$$\left(\sqrt{\mathrm{e}}, -\frac{1}{4}\right);$$
   b) disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x.

   Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte esca per tre volte lo stesso numero.

4.9.2. Sessione suppletiva

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso 5 ore.

1. È assegnata la curva γ di equazione
$$y = \mathrm{e}^{-(x/a)^2}$$
dove a è una costante positiva.
Il candidato:

   a) studi e disegni il grafico di γ;
   b) verifichi in particolare che essa ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive
$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a;$$
   c) fornisca col metodo dei trapezi una stima dell'area della regione del piano delimitata dal grafico di γ sull'intervallo di estremi x_1 e x_2 e dal segmento $\overline{\mathsf{F}_1\mathsf{F}_2}$;

d) dica se il risultato ottenuto rappresenti una stima per difetto o per eccesso del risultato esatto;

e) illustri la relazione che intercorre tra γ e la curva normale di Gauss utilizzata nella statistica.

2. Il triangolo ABC, rettangolo e non isoscele, è la base di una piramide di altezza $3a\sqrt[3]{2}$. Le misure dei suoi cateti sono date da due delle tre radici dell'equazione

$$4x^3 - 11ax^2 + 10a^2x - 3a^3 = 0.$$

Il candidato:

a) determini la distanza k di un piano α dal vertice della piramide sapendo che α è parallelo al piano del triangolo ABC e taglia la piramide in due parti equivalenti;

b) determini k nel caso in cui il triangolo ABC ha un cateto che misura a e l'altro cateto è una soluzione, approssimata con due cifre significative, dell'equazione:

$$x^3 + 4a^2x - 2a^3 = 0;$$

c) esponga il procedimento utilizzato per il calcolo approssimato della radice dell'equazione proposta.

3. Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi le stesse probabilità di uscita (gioco del Lotto).

a) Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:

— la cinquina di numeri *successivi* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o la cinquina di numeri *non successivi* $\{2, 3, 5, 8, 13\}$;

— una qualunque cinquina di numeri *successivi* o una qualunque cinquina di numeri *non successivi*.

b) Prese in esame le due seguenti proposizioni:

A: La probabilità che il 2° numero estratto sarà il 90 è $1/89$,

B: La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il 90 è $5/90$,

stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:

$$1)\quad A \Rightarrow B \quad , \quad 2)\quad B \Rightarrow A \quad , \quad 3)\quad \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \quad , \quad 4)\quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

c) Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42 sulla Ruota di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (fare un terno al Lotto). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?

d) Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il 90 esca, tra i 5 numeri estratti:

— al più 5 volte;

— per la prima volta proprio all'n-esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10}?

4.10. Anno scolastico 2000-2001

4.10.1. Esempio di prova - 1

Simulazione valida anche per il Corso Scientifico "Brocca" e il corso Scientifico-Tecnologico "Brocca".

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, sono assegnati i punti $\mathsf{A}(0,2)$, $\mathsf{B}(1,1)$, $\mathsf{C}(1,0)$:

1. Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.
2. Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.
3. Calcolare l'area del triangolo $\mathsf{CAA'}$, dove $\mathsf{A'}$ è il punto trasformato di A nell'affinità α.
4.) Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite.
5. Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ.

Problema 2

Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi tutte le stesse possibilità di uscita (*gioco del Lotto*).

1. Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:
   - la cinquina di numeri "successivi" $\{1,2,3,4,5\}$ o la cinquina di numeri "non successivi" $\{2,3,5,8,13\}$;
   - una qualunque cinquina di numeri "successivi" o una qualunque cinquina di numeri "non successivi".
2. Prese in esame le due seguenti proposizioni:

   A: "La probabilità che il 2° numero estratto sarà il 90 è 1/89",

   B: "La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il 90 è 5/90",

   stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:

   $$(1)\quad A \to B, \qquad (2)\quad B \to A, \qquad (3)\quad \bar{A} \to \bar{B}, \qquad (4)\quad \bar{B} \to \bar{A}.$$

3. Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42 sulla "Ruota" di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (*fare un terno al Lotto*). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?
4. Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il 90 esca, tra i 5 numeri estratti:

— al più 5 volte;

— per la prima volta proprio alla n—esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera 10^{-10} ?

Questionario

1. Considerata la successione di termine generale
$$a_n = 3^{\frac{f(n)}{n}},$$
dove
$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n},$$
calcolare
$$\lim_{n\to\infty} a_n$$
e, ricorrendo alla definizione, verificare il limite così trovato.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che:
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 f(x)dx = -5.$$
Di ciascuno dei seguenti integrali:
$$\int_0^1 f(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}dx, \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}dx, \quad \int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$$
dire se le condizioni assegnate sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale tale che valgano le seguenti condizioni:
$$f(x_0) > 0, \quad f'(x_0) > 0, \quad f''(x_0) = 0,$$
dove x_0 è un particolare valore reale.

   Dire se tali condizioni non sono sufficienti a determinare l'andamento di $f(x)$ in un intorno di x_0 e motivare esaurientemente la risposta.

4. Si dimostri che il volume V di un segmento sferico ad una base, di raggio di base r ed altezza h, è dato dalla seguente formula:
$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2).$$

5. Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco. Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara, nella quale tireranno a turno, ma è Giovanni che inizia a tirare.

   Descrivere una procedura che permetta di calcolare la probabilità che Paolo vinca al lancio numero n tra quelli complessivamente effettuati dai due arcieri.

6. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad un semicerchio di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si determinino i lati del trapezio sapendo che il solido generato da esso quando ruota di un giro completo intorno alla base maggiore ha il minimo volume.
7. Stabilire per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.
8. Si calcoli il valore del seguente integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x \, dx.$$

9. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, è assegnata l'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = -x + y + 1 \end{cases}$$

Descrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare l'equazione trasformata di quella di una data retta in base all'affinità considerata e di comunicare il risultato.

10. In un piano cartesiano, l'insieme dei punti verificanti la condizione:

$$xy - 3x + 5y - 15 = 0$$

è costituito:

a) dai punti $(5,0)$ e $(0,-3)$;
b) dai punti $(-5,0)$ e $(0,3)$;
c) dall'intersezione delle rette di equazioni $x = -5$ e $y = 3$;
d) dall'unione delle rette di equazioni $x = -5$ e $y = 3$;
e) da una figura diversa dalle precedenti.

4.10.2. Esempio di prova - 2

Simulazione valida anche per il Corso Scientifico "Brocca" e il corso Scientifico-Tecnologico "Brocca".

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È assegnata la curva γ di equazione

$$y = e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

dove a è una costante positiva.

Il candidato:

1. studi e disegni il grafico di γ;

2. verifichi in particolare che essa ammette due punti di flesso F_1 e F_2 di ascisse rispettive $x_1 = -a\sqrt{2}/2$ e $x_2 = a\sqrt{2}/2$;
3. fornisca col metodo dei trapezi una stima dell'area della regione del piano delimitata dal grafico di γ sull'intervallo di estremi x_1 e x_2 e dal segmento $\overline{\mathsf{F}_1\mathsf{F}_2}$;
4. dica se il risultato ottenuto rappresenti una stima per difetto o per eccesso del risultato esatto;
5. illustri la relazione che intercorre tra γ e la curva normale di Gauss utilizzata nella statistica.

Problema 2

Partendo dalla disuguaglianza

$$\cos t \leq 1$$

valida per qualsiasi valore reale di t, si stabiliscano, per mezzo di successive integrazioni, effettuate sull'intervallo $[0,x]$, le disuguaglianze

$$a)\quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!} \leq \cos t \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

$$b)\quad x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin t \leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

Si diano, quindi, per mezzo della b), una valutazione per difetto e una per eccesso, dell'integrale:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Successivamente si interpreti geometricamente l'integrale (1) e si dimostri che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Questionario

1. Si dimostri, senza risolverla, che l'equazione:

   $$2x^3+3x^2+6x+12=0$$

   ammette una e una sola radice reale.
2. Si valuti la radice dell'equazione sopra proposta con una precisione di due cifre significative mediante un qualsiasi procedimento iterativo e lo si codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto.
3. "*π è la somma, espressa in radianti, degli angoli interni di un triangolo*": si discuta la validità o meno di tale teorema in un contesto di *geometria non euclidea*.
4. Si dia una risposta al seguente quesito:

   "È più probabile che lanciando un dado due volte escano due numeri uguali, oppure che lanciandolo tre volte esca tutte e tre le volte un numero dispari?".

5. Si chiarisca il significato di ‘sistema ipotetico-deduttivo” illustrandone sinteticamente le principali caratteristiche.
6. Si mostri che fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell’altezza del cono.
7. Si esponga il teorema di *L’Hôpital* e lo si applichi per dimostrare che per n finito, $n \in N$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{2^x} = 0.$$

8. Si determini la probabilità che in 6 lanci di un dado non truccato il numero 3 si presenti tre volte.
9. Si esponga il significato di *variabile casuale X* e di *funzione (o distribuzione) di probabilità*.
10. Si applichi la formula d’integrazione per parti per calcolare l’integrale definito:

$$\int_0^1 e^x(x^2+x+1)\,dx.$$

4.10.3. Esempio di prova - 3

Simulazione valida anche per il Corso Scientifico “Brocca” e il corso Scientifico-Tecnologico “Brocca”.

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all’interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È data, in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, l’iperbole χ di equazione $xy - x - 2y = 0$ e siano r ed s i suoi asintoti, rispettivamente verticale ed orizzontale.

Il candidato:

1. tracci il grafico dell’iperbole;
2. scriva l’equazione della circonferenza σ passante per l’origine ed avente il centro nel punto d’incontro di r con l’asse delle ascisse;
3. constatato che, oltre che in O, le curve χ e σ s’incontrano in un ulteriore punto A, la cui ascissa x_A è compresa tra 1 e 2, descriva una procedura che consenta di calcolare il valori approssimati, con un’ approssimazione di 10^{-n}, di x_A e la codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto;
4. detto P un punto del semiasse negativo della ascisse di coordinate $(a, 0)$, determini il volume $V(a)$ del solido, ottenuto dalla rotazione di un giro completo intorno all’asintoto s, della parte finita di piano delimitata da χ, da s e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = a$.

Problema 2

Su un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è data la linea χ di equazione $y = 3x^2 - x^3$.

Il candidato:

1. tracci la curva χ;

2. detto A il punto di χ di ordinata massima relativa, B il punto, diverso da O, in cui χ interseca l'asse delle ascisse, P un punto del segmento $\overline{\mathsf{OB}}$, Q ed R le intersezioni della parallela per P all'asse delle ordinate rispettivamente con χ e con la retta OA, studi la funzione $r(x)$ che esprime il raggio del cerchio Ω di centro Q e passante per R;
3. determini in particolare il punto P_M in cui $r(x)$ raggiunge il valore massimo assoluto r_M (nella ricerca degli estremi relativi si utilizzino i valori approssimati per eccesso a meno di $1/10$ dei valori estremanti) e scriva l'equazione della circonferenza σ, contorno del corrispondente cerchio Ω_M (centro Q_M, raggio r_M);
4. scriva l'equazione della curva σ', trasformata di σ mediante la trasformazione T di equazione

$$x = \frac{1}{2}X + 3, \quad y = \frac{1}{3}Y,$$

   e determini l'area della parte finita di piano da essa delimitata;
5. studi le caratteristiche di T e dica se è possibile determinare l'area della parte finita di piano delimitata da σ' senza scrivere l'equazione di tale curva.

Questionario

1. È data una funzione $f(x)$ la cui funzione derivata prima $f'(x)$ ha per diagramma, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, una semicirconferenza di centro $\mathsf{C}(0,1)$, raggio 2, passante per il punto $\mathsf{A}(0,-1)$.

   Quali osservazioni si possono fare sull'andamento qualitativo del diagramma di $f(x)$?
2. Si considerino le uguaglianze:

$$\log(2-\sin x)^2 = 2\log(2-\sin x)$$

   e

$$\log(2-\tan x)^2 = 2\log(2-\tan x)$$

   Si dica se sono vere per ogni $x \in \mathbb{R}$, giustificando le risposte.
3. Ricordando che la formula di Newton che dà la potenza n-esima di un binomio è:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}a\,b^n$$

   si dica per quali valori di n il numero:

$$k = \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} - 8\binom{n}{3} + 16\binom{n}{4} + \cdots + (-1)^n 2^n \binom{n}{n}$$

   è positivo o negativo.
4. Ai tempi della repubblica di Venezia, l'elezione del doge avveniva tramite un sistema di sorteggi e ripescaggi tra un certo numero di persone, che nel nostro caso supporremo 100. In una prima fase sono sorteggiati 30 candidati tra i 100. In una seconda fase avvengono due ulteriori sorteggi: in

uno 10 candidati sono scelti tra i 30, nell'altro 10 candidati sono ripescati tra i 70 inizialmente eliminati. In una terza fase, infine, un candidato è scelto come doge, sempre in base a sorteggio , tra i 20 candidati che hanno passato la seconda fase. Si dica qual è la probabilità che ognuno dei 100 candidati iniziali ha di divenire doge prima del primo sorteggio. Si determini, inoltre, qual è la probabilità di divenire doge per un candidato che abbia passato il primo turno, ossia tra i 30 selezionati, e la corrispondente probabilità per un candidato che non abbia passato tale sorteggio. Si confrontino le probabilità dei candidati prima e dopo il primo sorteggio.

5. È data la semisfera σ di centro O e sia γ la sua circonferenza massima. Si conducano due piani α e β, passanti per il raggio $\overline{\mathsf{OP}}$ perpendicolare al piano di γ. Sia PQR il triangolo sferico, interno all'angolo acuto dei piani α e β, i cui vertici Q e R sono le intersezioni della circonferenza γ con α e β. Si deduca, da quanto si può dire sulla somma degli angoli interni del triangolo PQR, che detto triangolo si può intendere come una figura di un modello di geometria non euclidea.
6. Avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere dell'incremento della variabile indipendente a zero, si dimostri che la derivata della funzione $f(x)=x^2$ è $f'(x)=2x$.
7. Si dia un esempio di funzione $f(x)$ a cui in un intervallo $[a,b]$, non si applichi il teorema di Rolle, e si giustifichi la risposta.
8. Su un piano α è tracciata una circonferenza γ di raggio r. Per un punto A di γ si conduca una semiretta perpendicolare a γ e su di essa si consideri il punto V tale che $|\overline{\mathsf{VA}}| = h$. Dopo aver dimostrato che la sezione γ' del cono ω, di base la circonferenza γ e vertice V, con un piano α', parallelo ad α è una circonferenza, si calcoli, avvalendosi di un integrale definito, il volume di ω.
9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, si disegni il grafico di una funzione avente come asintoti verticali le rette di equazione $x=1$ e $x=-1$ e come asintoto orizzontale la retta di equazione $y=1/2$. Si determini, inoltre, una funzione il cui grafico soddisfi le condizioni predette.
10. Si consideri la famiglia di curve di equazione $y=f(x)$ essendo $f(x)=x^3-3x^2+a$. Dopo aver osservato che dette linee hanno un massimo ed un minimo relativi, si dica per quali valori di a la funzione $f(x)$ ha tre punti di zero distinti tra loro.

4.10.4. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia $\overline{\mathsf{AB}}$ un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.

Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche $\mathsf{O}xy$:

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che

$$\frac{|\overline{\mathsf{PA}}|}{|\overline{\mathsf{PB}}|}=k \quad (k \text{ costante positiva assegnata})$$

è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono $\overline{\mathsf{AC}}$ sotto un angolo di 45°;

c) posto X, appartenente a γ, in uno dei semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $\mathsf{X\hat{A}C}$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con

$$f(x) = \left(\frac{|\overline{\mathsf{XB}}|}{|\overline{\mathsf{XA}}|}\right)^2$$

e $x = \tan\alpha$.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy, è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a\ln(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ, grafico della funzione, passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = \left|x^2 + a\ln(x + b)\right|.$$

Questionario

1. Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.
2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione
$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0.$$
3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.
4. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x.$$
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?
5. Calcolare l'integrale
$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: quale è la probabilità che essi siano tutti maschi?

9. Spiegare il significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del *valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: "se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 Km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 Km/h".

4.10.5. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 9 quesiti in cui si articola il questionario Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo;

b) si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;

c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;

d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

Problema 2

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto. Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

b) nel caso di cui al punto a);

c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia la sezione aurea dell'altezza.

Questionario

1. Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

2. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

3. Dire quale è il dominio della funzione
$$f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$$
e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

4. Calcolare, integrando per parti:
$$\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{d}x.$$

5. Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di *concetto primitivo* e di *assioma*.

6. Nell'insieme delle cifre $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7. Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9. Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

   ...se del mezzo cerchio far si puote
   triangol sì ch'un retto non avesse. (Paradiso, XIII, 101-102).

4.11. Anno scolastico 2001-2002

4.11.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale a non nullo. Riferito il piano ad un sistema S di coordinate ortogonali e monometriche $\mathsf{O}xy$:

a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;

b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $\mathsf{P}(x,y)$ che soddisfano al problema;

c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;

d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e γ' e se ne dia un'approssimazione con uno dei metodi numerici studiati;

e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

Problema 2

I raggi $|\overline{\mathsf{OA}}| = |\overline{\mathsf{OB}}| = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale col cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';

b) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

Questionario

1. Se a e b sono numeri positivi assegnati, quale é la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610 — 1685), amico di *Blaise Pascal*: *giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta* 1 *con* 4 *lanci di un solo dado oppure almeno un doppio* 1 *con* 24 *lanci di due dadi?*

3. Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4. Calcolare:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

5. Cosa si intende per *funzione periodica*? Quale è il *periodo* di
$$f(x) = -\sin\frac{\pi x}{3}.$$
Quale quello di $\sin 2x$?

6. Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7. Data la funzione
$$f(x) = \mathrm{e}^x - \sin x - 3x$$
calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.
8. Verificare che la funzione $3x + \ln x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.
9. Trovare $f(4)$ sapendo che
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x).$$
10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

4.11.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy è assegnata la funzione
$$y = \frac{a + b\log x}{x}$$
dove $\log x$ denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico G della funzione passa peri punti $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$ e $(\mathrm{e}^2, 3\mathrm{e}^{-2})$;
b) si studi e si disegni G;
c) si determini l'equazione della curva G', simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;
d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area limitata, per $1 \le x \le 2$, da G e da G';
e) si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:
$$y = \frac{a + b\log|x|}{|x|} \qquad \text{e} \qquad y = \left|\frac{a + b\log x}{x}\right|.$$

Problema 2

È data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;
b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto $r = 1$ metro;
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

Questionario

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna $(7, 47, 67, 87)$.
2. Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.
3. Calcolare la derivata rispetto a x della funzione
$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
dove $f(x)$ è una funzione continua.
4. Calcolare:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin\left(t^3\right)\mathrm{d}t}{x^4}.$$
5. Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $\mathrm{e}^x \sin x = 1$ c'è almeno una radice reale di $\mathrm{e}^x \cos x = -1$.
6. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che
$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$
e dare del risultato un'interpretazione grafica.
7. Verificare che la funzione:
$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{1-x}}{1 + \mathrm{e}^{1-x}}$$
è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.
8. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito
$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
con un errore inferiore a 10^{-4}.
9. Verificato che l'equazione $\cos x - \ln x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
10. Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra *"concetto primitivo"* e *"assioma"*.

4.11.3. Sessione Straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$(1) \qquad \begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b \end{cases} ,$$

stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:

a) determinato;

b) indeterminato;

c) impossibile.

Posto che la terna (x, y, z) sia una soluzione del sistema (1), studiare la curva di equazione:

$$y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale Oab.

Problema 2

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy:

a) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} \qquad , \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento $\overline{OA}$ un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento $\overline{RS}$, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Questionario

1. In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse ed indicate con M′ ed N′ rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N nella sua retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN′M′, fornendo una esauriente dimostrazione.

2. Si consideri un cono ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

3. In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata l'iperbole di equazione
$$y = \frac{1}{x}.$$
Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $1/a$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

4. Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:
$$\lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = -1 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = 1.$$

5. Considera la funzione
$$f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-2},$$
stabilire se è continua e derivabile nel punto $x = 2$ e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

6. Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

7. Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:
   a) divisibile per 10 o per 8,
   b) divisibile per 10 e per 8,
   c) non divisibile per 10 né per 8.

8. Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro $(1,2)$ e caratteristica $1/4$ trasforma il triangolo di vertici $(4,0)$, $(-4,4)$, $(0,8)$.

9. Tra le affinità di equazioni:
$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$
assegnate in un piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare quella che trasforma i punti di coordinate
$$(3, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$
ordinatamente nei punti di coordinate
$$\left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 2 \right).$$

10. Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con approssimazione voluta.

4.12. Anno scolastico 2002-2003

4.12.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $|\overline{\mathsf{OA}}| = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione, di r con t.

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t si intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di *versiera di Agnesi* (da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, 1718 — 1799).

a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$\overline{\mathsf{OD}} : \mathsf{DB} = \overline{\mathsf{OA}} : \overline{\mathsf{DP}}$$
$$\overline{\mathsf{OC}} : \overline{\mathsf{DP}} = \overline{\mathsf{DP}} : \overline{\mathsf{BC}}$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA.

b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $\mathsf{O}xy$ l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto é quattro volte quella del cerchio γ.

Problema 2

Sia

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c$$

con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che

— la funzione f sia pari;

— $f(0) = 2$;

— $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\ln 2}$.

a) Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

b) Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

c) Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

d) Si calcoli
$$\int \frac{1}{g(x)}\, dx.$$

e) Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

   Si sceglie a caso una scatola e si estrarre a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?
3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
4. Dare un esempio di un polinomio $P(x)$ che tagli la retta $y = 2$ quattro volte.
5. Dimostrare, usando il Teorema di Rolle [da Michel Rolle, matematico francese, (1652 — 1719)], che se l'equazione
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
   ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$n \cdot x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + a - 1 = 0.$$
6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?
7. Verificare l'uguaglianza
$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
   e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando uno dei metodi di integrazione numerica.
8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da
$$\int_0^1 \pi x^3\, dx.$$
9. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)?$$
10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

4.12.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$, sono assegnate le parabole di equazione

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = 2$.

Problema 2

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, $\overline{\mathsf{AB}}$ è la base maggiore, $\overline{\mathsf{CD}}$ la minore e $\overline{\mathsf{BC}}$ il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani $\mathsf{O}xy$, scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

c) Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

d) Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

Questionario

1. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

   (Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II secolo d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno).

2. Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β.

   Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Il dominio della funzione
$$f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-2x}}$$
   è l'insieme degli x reali tali che:

   a) $x \leq 0$ e/o $x > 2$;
   b) $x \leq 0$ e/o $x \geq 2$;
   c) $x = 0$ e/o $x > 2$;
   d) $x = 0$ e/o $x \geq 2$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esaurtiente spiegazione della scelta operata.

4. Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5. Stabilire se esistono i limiti della funzione
$$f(x)=(1+x)^{(1/x)}$$
   per
$$\text{a) } x \to +\infty \quad ; \quad \text{b) } x \to -\infty \quad ; \quad \text{c) } x \to 0.$$

6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:
$$\begin{cases} kx+y+z=0 \\ x+ky+z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases},$$
   dove k è un parametro reale.

   Dire se l'affermazione *il sistema ammette la sola soluzione* $x=0$, $y=0$, $z=0$ *per ogni valore di k diverso da* 1 è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni
$$\begin{cases} x'=(a+1)x-by+a \\ y'=(a-1)x+2by-1 \end{cases}$$
   dove a, b sono parametri reali.

   Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta, e di questa trovare il punto unito.

9. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere.

   Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima:

   a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
   b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
   c) è messa da parte senza guardarne il colore?

10. Considerata l'equazione in x:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
    dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

4.12.3. Sessione Straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1
È assegnata la seguente equazione in x:
$$x^3 + 2x - 50 = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\overline{x}$.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.
c) Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di $\overline{x}$ a meno di 10^{-4}.
d) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq 1$) per cui la curva C_k di equazione:
$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$
   ammette un massimo e un minimo relativi.
e) Stabilire se esiste un valore $\overline{k}$ di k per cui la curva $C_{\overline{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

Problema 2
Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.

a) Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.
b) Calcolare la probabilità che:
   1. nessun uomo balli con la propria moglie,
   2. un solo uomo balli con la propria moglie,

3. tutti e tre gli uomini ballino con le rispettivi mogli.

c) Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:

1. per $n = 24$, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;
2. per $n = 4$, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;
3. per $n = 60$, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;
4. per $n = 15$, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

Nota. Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad , \qquad y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mathrm{e} \approx 2.7182,\ \pi \approx 3.1415).$$

Questionario

1. Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: *due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti in comune*. Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

   $$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

   dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

   (1) un punto; (2) due punti; (3) infiniti punti; (4) nessun punto.
3. In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:

   a) nessuna;
   b) una sola;
   c) due soltanto;
   d) infinite.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.
4. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata l'affinità A di equazioni:

   $$x = -2X + 3Y \quad , \quad y = X - 2Y.$$

   Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità A.

5. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

scriverla in forma ricorsiva.

6. Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1, \\ \dfrac{1}{3} a_{n-1}, & \text{se } n > 1, \end{cases}$$

calcolare :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

8. Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\ \mathrm{d}t, \qquad \text{con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9. Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t}{\sin^2 x},$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

4.13. Anno scolastico 2003-2004

4.13.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia γ la curva di equazione $y = k\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, ove k e λ sono parametri positivi.

a) Si studi e si disegni γ.

b) Si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ.

c) Sapendo che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$
e assumendo $\lambda = 1/2$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1.

d) Per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da Carl Friedrich Gauss, 1777-1855). Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

Problema 2

Sia f la funzione così definita:
$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x,$$
con a e b numeri reali diversi da 0.

a) Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che
$$f(x) = \frac{a+b}{2}.$$

b) Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.

c) Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Questionario

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Dare un esempio di una funzione g, non costante, tale che:
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad g(2) = 4.$$

6. Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1,3)$ e un minimo relativo in $(-1,2)$.
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x \to x\sqrt{3} - y \\ y \to x + y\sqrt{3} \end{cases}.$$

Di quale trasformazione si tratta?

4.13.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva K di equazione

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \tag{1}$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

Problema 2

Nel Liceo Scientifico *Torricelli* vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione/sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.

b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.

c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5^aA, questa sia formata da alunni di sesso:

   a) maschile

   b) femminile

   c) differente

   Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?

d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.

e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5^aD.

Questionario

1. La funzione

$$f(x) = \frac{3x - 2\sin x}{2x - 3\sin x}$$

è per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione per $x \to +\infty$

   a) non esiste;

   b) è $\dfrac{3}{2}$;

   c) è $\dfrac{2}{3}$;

   d) è un valore diverso da $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{2}{3}$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2. Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica

$$\sum_{k=5}^{n} k$$

non supera 10000.

3. Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.
4. Risolvere la seguente disequazione in x:
$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$
5. Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:
   a) sempre maggiore di h;
   b) sempre minore di h;
   c) sempre uguale ad h;
   d) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.
6. Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'equazione
$$xy + px + qy + r = 0.$$
   Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.
7. Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.
8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le affinità di equazioni
$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \dfrac{1}{2}bx - 2 \end{cases}.$$
   Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(1, -1)$ e stabilire se ammette rette unite.
9. Due giocatori, A e B, giocano a *Testa o Croce* con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola:

   "Il giocatore A lancia la moneta; se esce *Testa* vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene *Croce*; in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene *Testa*. In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene *Croce*. Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato".

   Il gioco è equo?
10. Dopo avere spiegato perché la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$$
   è positiva nell'intervallo $[1, 2]$, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

4.13.3. Sessione Straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

In un piano è assegnata la parabola p e di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento $\overline{\mathsf{VF}}$ sia lungo $1/2$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy:

a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

b) Chiamato P un punto generico della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

c) Indicati con R e S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel primo quadrante su una retta perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento $\overline{\mathsf{RS}}$, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a

$$\frac{8}{9}(3-\sqrt{3}).$$

d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

Problema 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{i,k=1}^{n} ik \quad , \quad b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 \quad , \quad c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ k\geq i}}^{n} ik .$$

a) Dimostrare che risulta:

$$a_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad , \quad b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad , \quad c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

b) Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera 100000.

c) Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.

d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

Questionario

1. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo.
2. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o contenuta in esso. Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
3. Determinare il dominio della funzione
$$f(x) = \ln(1-2x+\sqrt{x}).$$
4. Il limite di $\tan x$ per x tendente a $+\infty$:
   a) è $+\infty$;
   b) é $\frac{\pi}{2}$;
   c) non esiste;
   d) esiste ma non si riesce a calcolare.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
5. Si consideri la seguente implicazione: *Se la funzione reale di variabile $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a*. Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.
6. Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:
$$\int_0^m \frac{2x-3m}{x-2m}\,\mathrm{d}x$$
   non superi 24.
7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato in triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.
8. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da 1 a 6, aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un 5. Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99 per cento di ottenere almeno un successo.
9. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:
   a) sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;

b) almeno uno dei due finisca sul podio;

c) nessuno dei due finisca sul podio.

10. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$$

dove m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

4.14. Anno scolastico 2004-2005

4.14.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r di equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{r} : 4y = x + 6.$$

a) Si provi che λ e r non hanno punti comuni.

b) Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.

c) Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.

d) Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del primo quadrante compresa tra λ e l'asse x.

e) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Problema 2

Si consideri la funzione definita sull'intervallo $[0, +\infty[$ da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

a) Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.

b) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0, +\infty[$, un'unica radice reale, e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

c) Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

d) Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette $x = 1/n$ e $x = 1$.

e) Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°$, $\sin 36°$.
2. Si dia una definizione di *retta tangente* ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \sin x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione
$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}.$$
Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso, $\varphi \circ \sigma$.
4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se la lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e quale è l'importanza del numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550 — 1617)]. Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette r ed s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Determinare σ.
7. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate $(3, 4)$.
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti, quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere *almeno* due 10 in sei lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

4.14.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

a) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;

b) supposto che gli spigoli $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;

c) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;

d) dopo avere spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;

e) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

Problema 2

É assegnata la funzione

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2},$$

dove a è un parametro reale non nullo.

a) Dopo avere fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.

b) Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro $\overline{OA}$.

c) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

d) Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

e) Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

Questionario

1. É dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.

   Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

2. Siano $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

3. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}.$$

Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \text{ intero qualsiasi});$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ intero qualsiasi}).$$

É vero o falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4. Si consideri la seguente equazione in x:

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0,$$

dove k è una parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5. Il limite della funzione

$$(1-x)^{(1/x)}$$

per $x \to 0$:

   a) è uguale ad 1;
   b) è uguale a $+\infty$;
   c) non esiste;
   d) è uguale ad e;
   e) è uguale ad 1/e,

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6. Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.

7. Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.

8. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

9. Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. Il sistema è:

a) determinato per ogni valore di a;
b) indeterminato per un valore di a ed impossibile per un valore di a;
c) indeterminato per nessun valore di a, ma impossibile per un valore di a;
d) impossibile per nessun valore di a, ma indeterminato per un valore di a.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

10. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1 \qquad , \qquad y' = mx - 2y - 2,$$

dove m è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

4.14.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Considerato un triangolo ABC acutangolo e isoscele sulla base $\overline{BC}$, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:

1. EC è perpendicolare a CB;
2. i triangoli EFC ed AFD - dove F è il punto comune ai segmenti $\overline{ED}$ ed $\overline{AC}$ - sono simili e, di conseguenza anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\widehat{E}F$ e $F\widehat{C}D$ sono congruenti;
3. EA è parallela a CB;
4. il quadrilatero AECD è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 6 e 24/5, dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

1. il seno e il coseno dell'angolo $B\widehat{C}D$;
2. le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo ADC.

Problema 2

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c. \tag{1}$$

1. Dimostrare che nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.
2. Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché (1) volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
3. Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva (1) abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2,2)$.
4. Indicata con K la curva trovata, stabilire come è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.
5. Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.
6. Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con la tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

Questionario

1. Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.
2. Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.
3. Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

   $$\log_2 27 + \log_2 12 \qquad , \qquad 2 + \log_2 81.$$

   Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire risposta esaurientemente motivata.
4. Dimostrare che ogni funzione del tipo

   $$y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$$

   dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?
5. Enunciare il *principio d'induzione matematica* e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come *Teorema di Nicomaco* (da *Nicomaco di Gerasa*, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

6. Il limite della funzione
$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$$
per $x \to +\infty$, è:
$$[A]\mathrm{e}; \quad [B]\frac{1}{\mathrm{e}}; \quad [C]\sqrt{\mathrm{e}}; \quad [D]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$
dove e è la base dei logaritmi naturali. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.
7. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione:
$$\int_{-x}^{2x} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$
8. Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.
9. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 sono di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?
10. Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il 47 sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neanche nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

4.15. Anno scolastico 2005-2006

4.15.1. Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata ed un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di un parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

Problema 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

a) Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log(x) = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

b) Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano delimitata dalle rette di equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

c) Si studi la funzione $h(x) = \log(x) - ax^2$ scegliendo per a un valore maggiore di $1/(2e)$ e se ne disegni il grafico.

Questionario

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2. I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

4. Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una ed una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6. L'equazione risolvente di un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale ed x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7. *Bruno De Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: *"che cos'è la probabilità"* era solito rispondere: *"la probabilità non esiste!"*. Quale significato puoi attribuire a tale risposta? É possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di $0,3$ per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0,99$ di colpirlo almeno una volta?

9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10. Tenuto conto che

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

4.15.2. Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2 \qquad , \qquad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $\overline{V'P}$.

c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

d) Le due parabole p' e p'' sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno una isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.

e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

Problema 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.

b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

c) Disegnare l'andamento di γ, dopo avere trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ.

d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro $\overline{AB}$.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall'asse x.

Questionario

1. Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato $\overline{AB}$ e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro attorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

2. Il numero della soluzioni dell'equazione $\sin(2x)\cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è
   a) 0;
   b) 2;
   c) 3;
   d) 5.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione
$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
   per $x \to 0$:
   a) non esiste;
   b) è 0;
   c) è un valore finito diverso da 0;
   d) è $+\infty$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5. Il seguente Teorema esprime la condizione di integrabilità di Mengoli-Cauchy:

   Se una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.

   Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6. Dire se è corretto o no affermare che
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c,$$
   dove c è una costante arbitraria, e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al *primo*.

8. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilita che, estratta a caso una pallina, non sia di plastica nera.

10. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

4.15.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei problemi e 5 dei quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

É dato il triangolo ABC in cui:

$$|\overline{AB}| = \frac{25}{2}, \quad |\overline{AC}| = 5\sqrt{5}, \quad \tan\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativo al lato $\overline{AB}$ e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato $\overline{AB}$. Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta $\overline{AB}$:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento $\overline{BC}$;

c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k ed alla parabola p.

Problema 2

Si considerino i polinomi di quinto grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy, sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto

$$\left(-2, \frac{64}{15}\right).$$

a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

b) Dimostrare che tali grafici hanno 3 punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v $(u < v)$ le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,\mathrm{d}x.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse in cui la retta dei flessi interseca γ.

Questionario

1. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (*Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti*).
2. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.
3. Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambi tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano le condizioni previste del teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
quando $x \to a$. É vero o falso? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
4. Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to \infty$:
a) è 0; b) è un valore finito diverso da 0; c) è$+\infty$; d) è $-\infty$.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
5. Il limite della funzione
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$
per $x \to 0$, è uguale a 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di de l'Hôpital.
6. Si ricorda la seguente definizione: *Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, ogni funzione $F(x)$, derivabile in I e tale che $F'(x) = f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in I*. Stabilire se la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 \le x \le 2, \\ 2, & \text{se } 2 < x \le 3, \end{cases}$$
ammette primitiva nell'intervallo $[1,3]$.
7. Giustificare con considerazione analitica o mediante considerazione grafica, che la seguente equazione:
$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$
ammette una ed una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z, z+1]$ al quale appartiene tale soluzione essendo z un numero intero.
8. Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3}, della soluzione reale della precedente equazione.
9. Si considerino le seguenti equazioni:
$$x' = ax - (a-1)y + 1, \qquad y' = 2ax + (a-1)y + 2,$$
dove a è un parametro reale.
Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano:

a) un'affinità;

b) un'affinità equivalente (si ricorda che un' affinità si dice equivalente se conserva le aree).

10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola "Maria" fra i maschi c'è un solo "Antonio". Si deve formare una delegazione formata da 2 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti "Maria" e "Antonio"?

4.16. Anno scolastico 2006-2007

4.16.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

a) Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.

b) Posto $a = \mathrm{e}$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione

$$\frac{1}{f(x)}.$$

c) Si calcoli

$$\int_0^t \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x;$$

successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.

d) Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\pi/4$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

Problema 2

Si considerino i triangoli la cui base è $|\overline{AB}| = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

a) Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

b) Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.

c) Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

d) Si provi che se $A\widehat{B}C = 360°$ allora è

$$|\overline{AC}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Questionario

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \le x \le \mathrm{e}$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.
4. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$
Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.
5. Si consideri il teorema: "*La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*" e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1, 2)$.
8. A *Leonardo Eulero* (1707 — 1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: "Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 Luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare".
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

4.16.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x \left(e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t\right) dt.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa $\log 2$.

c) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = \log 3$.

d) Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

si calcoli un valore approssimato di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Problema 2

Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri il punto $A(2, 0)$.

a) Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$|\overline{PO}|^2 + 2 \cdot |\overline{PA}|^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.

b) Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.

c) Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento $\overline{OB}$ e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Questionario

1. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva

$$y = \frac{2}{x}$$

e dalla retta di equazione $y = -x + 3$.

2. Si calcoli il valore medio della funzione $y = \sin^3 x$, nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.

3. Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso $[1, 2]$, si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

4. Si consideri la seguente proposizione: *In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante*. Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

5. Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

7. Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b é $S = \pi a b$.

8. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)},$$
quando x tende a 0.

9. Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

10. Si risolva la disequazione
$$5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}.$$

4.16.3. Sessione Straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione
$$y = \frac{2x^2 + ax + 3}{(x+1)^2}$$
dove a è un parametro reale.

a) Posto $a = 4$, si studi la C_4 in assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Mediante una traslazione si assumano come nuovi assi di riferimento OXY gli asintoti della C_4 e si scriva la nuova equazione $Y = f(X)$ della C_4.

c) Si calcoli quindi l'area della porzione di piano compresa tra la curva, l'asse X, la retta $X = 1$ e la retta $X = h$, essendo h un numero reale maggiore di 1. Si calcoli il limite di tale area per $h \to +\infty$.

d) Si tracci C_5 in corrispondenza ad $a = 5$, rispetto al sistema Oxy. Le curve C_4 e C_5 hanno un punto comune A, appartenente ad un asse; si trovino le equazioni delle tangenti alle curve in A.

Problema 2

Data una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$, si prenda sul prolungamento di $\overline{AB}$, dalla parte di B, un punto C tale che sia $\overline{BC} = \overline{AB}$.

Essendo P un punto della semicirconferenza:

a) Si esprima per mezzo di r e dell'angolo $x = A\widehat{P}B$ il rapporto

$$y = \frac{|\overline{CP}|^2}{|\overline{AP}| \cdot |\overline{PB}|}.$$

b) Si studi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, la funzione $y = f(x)$ espressa per mezzo di $\tan x$.

c) Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo $0 < x < \pi/2$, per cui il rapporto y assume il valore minimo.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $y = f(x)$, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/3$.

Questionario

1. Si calcoli il limite della funzione

$$y = \frac{\log(x+3) - \log(2x+1)}{x^2 + x - 6},$$

quando x tende a 2.

2. Si calcoli il valore medio della funzione

$$y = |1 - x^2|$$

nell'intervallo $-2 \leq x \leq 3$.

3. Data la funzione

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

si stabilisca se sono verificate le condizioni di validità del teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema.

4. Si consideri la seguente proposizione: "Una piramide è retta se la verticale calata dal vertice cade entro il poligono di base". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

5. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$ è la base di un solido S le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

6. Si verifichi che la curva di equazione

$$y = \frac{x-1}{x-2}$$

è simmetrica rispetto all'intersezione dei suoi asintoti.

7. Si inscriva in una sfera di raggio r il cilindro di volume massimo.

8. È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado o ottenere un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi?
9. Si enunci il quinto postulato di Euclide e si descriva qualche modello di planimetria non euclidea.
10. Si trovi per quali valori di k ammette soluzione l'equazione trigonometrica

$$\sin x + \cos x = k.$$

4.17. Anno scolastico 2007-2008

4.17.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1
Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $\mathsf{A}(1,0)$, $\mathsf{B}(3,0)$ e C variabile sulla retta d'equazione $y=2x$.

a) Si provi che i punti $(1,2)$ e $(3/5,6/5)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B} = \pi/4$.
b) Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
c) Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
d) Verificato che è

$$\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1),$$

si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

Problema 2
Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da

$$f(x) = 2^x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2.$$

a) Si traccino i grafici di f e di g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
b) Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
c) Quanti e quali sono gli zeri della funzione

$$h(x) = 2^x - x^2\,?$$

Si tracci il grafico di h.
d) Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo $[2,4]$.

Questionario

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che
$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 — 1704) e la si applichi per dimostrare che è:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0.$$
5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x,y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta:
$$y^2-x^3>0.$$
6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.
7. Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.
8. Sia f la funzione definita da
$$f(x)=\pi^x-x^\pi.$$
Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?
10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di
$$y=e^{-2x}\ ?$$
Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

4.17.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda $\overline{AB}$ uguale al lato del quadrato in esso inscritto.

a) Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:
$$\frac{|\overline{PA}|^2+|\overline{PB}|^2}{|\overline{AB}|^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x=\tan P\hat{A}B$.

b) Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

c) Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione $x=k$, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

Problema 2

Si consideri la funzione:
$$y=a\sin^2 x+b\sin x+c.$$

a) Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per $A(0,2)$, per $B(\pi/6,0)$ ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x+2y-5=0$.

b) Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$.

c) Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta $y=2$ e la curva stessa.

d) Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per $P(0,6)$ e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

Questionario

1. Si determinino le costanti a e b in modo tale che la funzione:
$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{se } x\le 0,\\ \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{se } x>0,\end{cases}$$
risulti continua e derivabile nel punto $x=0$.

2. Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda=23^\circ\ 27'$ nord)?

3. Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione
$$g(x)=e^{-\lambda x}$$
divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione
$$f(x)=e^{\lambda x},$$
dall'asse x e dalle rette $x=0$ e $x=1$.

4. Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.
5. Si dimostri che l'equazione
$$(3-x)e^x - 3 = 0$$
per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.
7. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$$
nell'intervallo $0 \le x \le 1$.
8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti $A(0,1)$, $B(0,4)$. Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento $\overline{AB}$ è visto con un angolo di massima ampiezza.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\log x}} \frac{e^t}{t}\,dt$$
nel punto P di ascissa $x = e$.
10. Tenuto conto che:
$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

4.17.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si trattino le seguenti questioni.

a) Si costruisca il grafico della funzione
$$f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}.$$

b) Si determini il volume del solido generato, in una rotazione completa attorno all'asse x, dalla superficie piana, finita, delimitata da γ e dall'asse x.

c) La retta $x = 2$ seca l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nei punti A e B. Si inscriva nel segmento iperbolico di base $\overline{\mathsf{AB}}$ il rettangolo di area massima. A tal fine, si indichi con x l'ascissa dei vertici del generico rettangolo, inscritto nel segmento iperbolico, appartenenti all'iperbole e si utilizzi la curva γ.

d) Si calcoli il volume del solido che ha per base il segmento iperbolico prima considerato e tale che, tagliato con piani paralleli ad AB, dia tutte sezioni esagonali regolari.

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & \text{se } |x| < 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

a) Si dica se questa funzione è continua nei punti in cui $|x| = 1$.

b) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

c) Si scriva l'equazione della normale a γ nel punto di ascissa $x = 1/\sqrt{2}$.

d) Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dall'asse delle x.

Questionario

1. Fra le piramidi quadrangolari regolari di data area laterale s, si determini quella di volume massimo.
2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{\log \sin x}{\log \tan x},$$
quando x tende a 0.
3. Si provi se per la funzione
$$f(x) = |x+1| - 2x,$$
nell'intervallo $[-2, 3]$, sono verificate le condizioni previste per la validità del teorema di Lagrange e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione
$$y = (x^2 + 3x)^{\sqrt{-2-x}}.$$
5. Siano dati un triangolo equilatero, il cerchio in esso inscritto e il triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo maggiore: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo minore.
6. Alla prova orale di un concorso sono stati ammessi 9 maschi e 7 femmine. Sappiamo che saranno assunte 5 persone. Qual è la probabilità che siano assunti 2 maschi e 3 femmine?
7. Si dimostri che l'equazione
$$\log x + x = 0$$
ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

8. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \int_1^x t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

9. Il toro è il solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio r di un giro completo attorno ad un asse, che abbia dal cerchio generatore una distanza $a > r$. Si calcolino l'area e il volume del toro.

10. Un segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ di lunghezza costante a scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse x, y. Si dimostri che un punto P qualsiasi del segmento descrive una ellisse avente gli assi sopra x, y. Che cosa succede se P è il punto medio di $\overline{\mathsf{AB}}$?

4.18. Anno scolastico 2008-2009

4.18.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

a) Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

b) Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \le 1$ per ogni x reale.

c) Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

d) Si calcoli

$$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$$

e se ne dia l'interpretazione geometrica.

Problema 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

a) Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).

b) Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di $0,1$ con un metodo iterativo di calcolo.

c) Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.

d) La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

Questionario

1. Siano $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che
$$\int_{-b}^{b} |x - a|\, dx = a^2 + b^2.$$

2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è $25,75\,\mathrm{mm}$) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato $10\,\mathrm{cm}$. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati dei quadrati)?

4. "*Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni*". Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0.$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

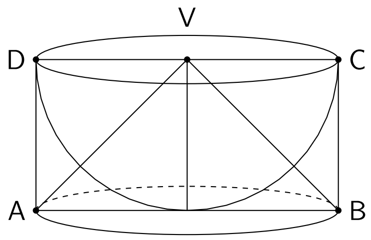
6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

7. Si dimostri l'identità
$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$
con n e k naturali e $n > k$.

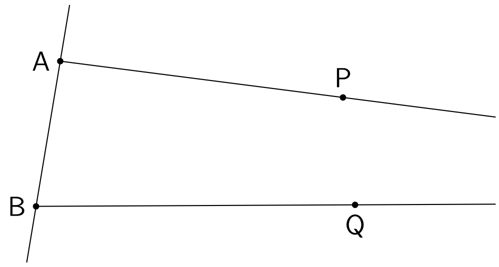
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9. Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.

   Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. "*Se due punti* P *e* Q *del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta* AB *e gli angoli* $P\widehat{A}B$ *e* $Q\widehat{B}A$ *hanno somma minore di* 180°, *allora le semirette* AP *e* BQ, *prolungate adeguatamente al di là dei punti* P *e* Q, *si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



4.18.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^2+1}, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ \arctan(\sin x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

b) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

c) Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -1$.

d) Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}.$$

a) Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:

$$\int_0^{2/3} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{10}{3}-6\ln\frac{5}{3}.$$

b) Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.

c) Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa $x=0$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.

d) La retta $y=k$ incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità

$$S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$$

è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

Questionario

1. Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità $p=1/2$ assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

2. Sul diametro $\overline{MN}$ di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{NP}$, $\overline{NQ}$ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (pelecoide) così ottenuto, ha la stessa lunghezza della circonferenza data.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\int_{\sqrt{2}/2}^{\sin(x/2)}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{|t|+1}\,\mathrm{d}t$$

nel punto P di ascissa $x=\pi/2$.

4. Siano dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

5. Nell'omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k=-4$, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla

$$x^2+y^2-2x+4y=0.$$

Si confrontino fra di loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

6. Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 1 cm^2.
7. Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ (\lambda-1)x+\lambda y+4z=0 \\ \lambda x+5y+(2\lambda+1)z=0 \end{cases} .$$

8. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.
9. Si consideri un cerchio di centro O e raggio r e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre $\overline{OB}$ un raggio mobile che forma l'angolo $2x$ con $\overline{OA}$. Facendo ruotare la figura attorno ad $\overline{OA}$, il segmento $\overline{AB}$ genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?
10. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

4.18.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, di cateti 3 e 4, si consideri una retta passante per C, non secante il triangolo e formante un angolo x con il cateto $\overline{AC}$.

a) Dette A′ e B′ le proiezioni ortogonali di A e B su tale retta, si esprima mediante $t=\tan(x/2)$ il perimetro y del quadrilatero AA′B′B, controllando che risulta:

$$y=\frac{-2t^2+14t+12}{t^2+1}.$$

b) Si studi e si rappresenti graficamente tale funzione.

c) Si esprima in funzione di $\sin(2x)$ il rapporto tra l'area del quadrilatero AA′B′B e quella del triangolo dato e se ne tracci il grafico nell'intervallo di variabilità di x imposto dai limiti geometrici del problema.

d) Si calcoli l'area sottesa da quest'ultima curva nel suddetto intervallo.

Problema 2

Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Si studi f e se ne tracci il grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si considerino la retta r tangente a γ nel punto di flesso e la retta s, perpendicolare a r, condotta dal punto di γ di ascissa $1/2$. Si calcoli l'area del triangolo formato da r, da s e dall'asse y.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1/2$.
4. Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica $x = g(y)$ della funzione g inversa di f.

Questionario

1. Lanciando due dadi, qual è il numero che ha maggiore probabilità di uscita? Qual 'è la probabilità che esca un numero primo?
2. Si dimostri che l'equazione $\cos x - x = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$$
sull'intervallo $0 \leq x \leq 1$.
4. Sia dato un triangolo avente i lati lunghi rispettivamente 13 cm, 14 cm e 15 cm e il cerchio in esso inscritto. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al cerchio.
5. Si calcoli il limite.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2-t}\, dt}{x^3}.$$
6. Un serbatoio della capacità di $400\,\mathrm{m}^3$ deve avere la forma di un cilindro circolare retto senza coperchio. Il materiale da costruzione per il fondo costa per m^2 il doppio di quello che serve per le pareti laterali. Si calcoli il rapporto fra il raggio r e l'altezza h in modo che la costruzione risulti la più economica.
7. Una statua alta 70 metri viene sistemata su una collina di altezza h. Da un certo punto A, situato a livello del suolo, gli angoli di elevazione per la base B e la cima C della statua misurano rispettivamente $20,75°$ e $28,30°$. Si determini l'altezza h.
8. In un piano cartesiano Oxy una retta verticale divide il triangolo con i vertici nei punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(9,1)$ in due regioni di ugual area. Si trovi l'equazione di tale retta.

9. Un tronco di cono è circoscritto ad una sfera di raggio r. Si stabilisca la relazione che esiste fra i raggi di base del tronco e il raggio della sfera.
10. Due punti A e B, il primo sull'asse x e l'altro sull'asse y, distano dall'origine rispettivamente 35 cm e 15 cm. Ambedue si muovono con moto rettilineo ed uniforme verso l'origine: A con velocità $v_1 = 3\,\mathrm{cm/s}$, B con velocità $v_2 = 1\,\mathrm{cm/s}$. In quale istante è minima la distanza tra i due punti e quanto vale questo minimo?

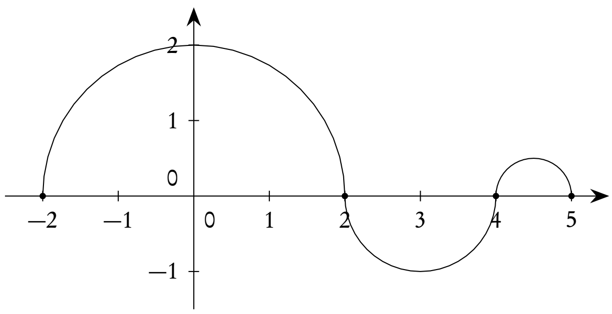
4.19. Anno scolastico 2009-2010

4.19.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \le x \le 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0,0)$, $(3,0)$, $(9/2,0)$ e raggi rispettivi 2, 1, 1/2.



a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?

b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se
$$f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$
si determini $f(4)$ e $f(1)$.

d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

Problema 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su D il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido W ottenuto dalla rotazione di D intorno all'asse x. Se si taglia W con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di W.

Questionario

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3. Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1.$$
Come si può essere certi che esiste un unico zero?

5. Sia G il grafico di una funzione $x \mapsto f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate
$$(3\cos t, 2\sin t)$$
al variare di t, $0 \le t \le 2\pi$.

7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

8. Se $n > 3$ e
$$\binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n-2}, \quad \binom{n}{n-3}$$
sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AC}| = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AC}| = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. L'integrale

$$\int_0^4 2\pi x\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

fornisce il volume del solido:

A) generato da R nella rotazione intorno all'asse x;

B) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;

C) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$;

D) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

4.19.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È data una circonferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$. Sul prolungamento del diametro $\overline{\mathsf{AB}}$, dalla parte di B, si prenda un punto P e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

a) Detti T il punto di tangenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in A alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{|\overline{\mathsf{TQ}}|^2 + |\overline{\mathsf{TP}}|^2}{|\overline{\mathsf{AP}}|^2},$$

espresso in funzione di $x = |\overline{\mathsf{BP}}|$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si calcolino i numeri a, b, c in modo che risulti:

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}. \tag{1}$$

d) Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.

Problema 2

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x - a)e^{2-x/a}$$

dove a è un numero reale positivo ed e è il numero di Nepero.

a) Si dimostri che, al variare di a, le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.

b) Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di a, un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.

c) Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1.

d) Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1 , dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?

Questionario

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2. Considerata la funzione
$$f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x},$$
dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2.$$

3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione
$$f'(x_1) + f'(x_2) = 0$$
e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

6. Si determini il punto della parabola $4y = x^2$ più vicino al punto di coordinate $(6, -3)$.

7. Si consideri l'equazione
$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0.$$
Si dimostri che essa ammette una soluzione reale x_0 tale che $1 < x_0 < 2$. Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini x_0 a meno di $1/100$.

8. Nel piano cartesiano $\mathsf{O}xy$ è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $\mathsf{P}(0,3)$ e $\mathsf{Q}(2,5)$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo PORQ (con R proiezione di Q sull'asse x).

9. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo ℓ e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

10. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è 27/38?

4.19.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sono dati: una semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$ e la tangente t parallela al diametro. Si prolungano i raggi $\overline{\mathsf{OA}}$ ed $\overline{\mathsf{OB}}$ di due segmenti uguali $\overline{\mathsf{AP}}$ e $\overline{\mathsf{BQ}}$ e dai punti P e Q si conducono le tangenti alla semicirconferenza, che intersecano la retta t rispettivamente nei punti M ed N.

a) Si provi che l'area $S(x)$ della superficie del solido generato in una rotazione completa del trapezio PQNM attorno alla retta PQ, è data da:
$$S(x) = 2\pi \cdot \frac{3 - 2\cos x}{\sin x}.$$

b) Si studi la funzione $f(x) = S(x)/(2\pi)$ e se ne tracci il grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

c) Si verifichi che
$$G(x) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$
è una funzione primitiva di
$$g(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \pi/3$ e $x = \pi/2$.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e l'equazione della perpendicolare alla suddetta tangente, che determina con essa e con la direzione positiva dell'asse x un triangolo avente area 4.

c) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta di equazione $x = \sqrt{3}$.

d) Dopo aver verificato che sono soddisfatte le condizioni di invertibilità, si ricavi l'espressione analitica della funzione inversa $x = g(y)$ della funzione data.

Questionario

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori?

2. Si calcoli il limite della funzione
$$(1+\tan x)^{\cot x}$$
quando x tende a 0.

3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?

4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.

5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici $A(2,2)$, $B(6,4)$, $C(6,6)$.

6. I vertici di un triangolo sono: $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(1,1)$. Si trovi l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB e quella della circonferenza γ' ad esso circoscritta.

7. Si verifichi che la cubica di equazione $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

8. Si dimostri che l'equazione
$$\frac{1}{x} - e^x = 0$$
ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

9. Una rappresentanza di cinque persone deve essere scelta a caso tra dieci uomini e tre donne. Qual è la probabilità che il comitato sia costituito da tre uomini e due donne?

10. Sia data l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e il rombo in essa inscritto, con i vertici coincidenti con quelli dell'ellisse. Si scelga a caso un punto all'interno dell'ellisse: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al rombo.

4.20. Anno scolastico 2010-2011

4.20.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}$$

e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

a) Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x)+f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0,1+\ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.

b) Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x)=m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x)=3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x)=m$?

c) Si provi che, per tutti gli x reali, è:

$$f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

Si provi altresì che la retta r di equazione $y=x+\ln 4$ e la retta s di equazione $y=x+2+\ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.

d) Posto

$$I(\beta)=\int_0^\beta [f(x)-x-\ln 4]\,dx,$$

si calcoli:

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta).$$

Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

Problema 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

a) Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10, 10]$ e se ne indichino le coordinate.

b) L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0, 4]$. Si calcoli l'area di R.

c) Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).

d) In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Questionario

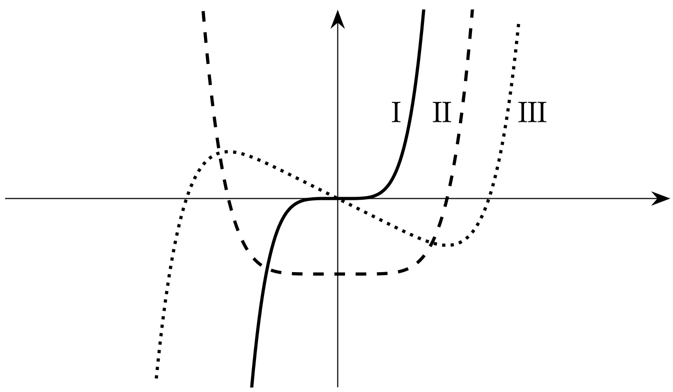
1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4, 0)$.
3. Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.
4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: "…se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?". Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sottostante, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.

    Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

    Si motivi la risposta.



4.20.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È dato un quadrato ABCD di lato $|\overline{AB}| = a$. Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato $\overline{BC}$ in E e il prolungamento del lato $\overline{DC}$ in F.

a) Si calcoli il rapporto:

$$\frac{|\overline{BE}| + |\overline{BF}|}{|\overline{AB}|},$$

espresso in funzione di $x = B\widehat{A}E$, controllando che risulta:

$$f(x) = \tan x + \cot x.$$

b) Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le \pi$.

c) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dalla retta di equazione

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

d) La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nell'intervallo

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{x + 3}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente t alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.

c) Si calcoli il volume del cono S generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli assi cartesiani.

d) Si scelga a caso un punto all'interno del cono S. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido S'.

Questionario

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{1/x} - 1\right)^2},$$

non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3. La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base $\overline{AB}$ si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

4. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = \left(3\cos x + \sin^2 x - 3\right)^{\cos x}.$$

Che cosa succederebbe se l'esponente fosse $\sin x$?

5. Si calcoli il valore medio della funzione

$$f(x) = e^x(x^2 + x + 1),$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

6. Si determini un numero positivo N tale che, per $x > N$, la funzione $f(x) = 2^{0,3x}$ è sempre maggiore della funzione $g(x) = x^{30}$.

7. Tenuto conto che:
$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx\,,$$
si calcoli un'approssimazione di $\pi/2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$
e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.

9. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità 1/2 di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?

10. Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B, l'angolo $\widehat{APB}$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

4.20.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È dato il segmento $|\overline{AB}| = 2$. Dal punto A si tracci una semiretta s formante un angolo acuto α con la direzione AB e si denoti con C la proiezione ortogonale del punto B sulla semiretta s. Si costruisca su $\overline{AC}$, esternamente al triangolo ABC, un triangolo equilatero ACM.

a) Detto O il punto medio di $\overline{AB}$, si calcoli il valore di $|\overline{OM}|^2$ e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{\left(x+\sqrt{3}\right)^2}{x^2+1}\,.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico Γ.

c) Si dica per quale valore di α si ha il massimo di $\overline{OM}$.

d) Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dagli assi cartesiani e dall'arco di Γ i cui estremi hanno ascisse $-\sqrt{3}$ e 0.

Problema 2

Si consideri, nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$, la funzione:

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico Λ.

b) Si scriva l'equazione della tangente a Λ nel punto di flesso e si calcoli l'area del triangolo T_1 che essa forma con gli assi cartesiani e quella del triangolo T_2 che forma con l'asse x e l'asintoto verticale.

c) Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva Λ e dagli assi cartesiani nell'intervallo chiuso $[0, \pi/2]$.

d) Si scelga a caso un punto all'interno della superficie piana Σ. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo T_1.

Questionario

1. Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di 14° e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 metri. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di 20°. A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$$
quando x tende a 0^+.

3. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \log_{\sin x} x^4$$
nel punto P di ascissa $x = 1$.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva
$$y = \sqrt{\frac{x}{1+x}},$$
dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = 3$.

6. Si dimostri che l'area di una sfera di raggio r, l'area della superficie totale del cilindro circoscritto, e l'area della superficie totale del cono equilatero circoscritto, sono proporzionali ai numeri 4, 6, 9.

7. Con l'aiuto di una calcolatrice si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $e^x - 2 = 0$, con punto iniziale $x_0 = 1$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

8. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della regione piana, delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{\sin x}$ e dall'asse delle x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

9. La squadra A ha probabilità $2/5$ di vincere ogniqualvolta gioca. Quante partite deve giocare perché la probabilità che ne vinca almeno una sia maggiore del 90%?
10. Si inscriva in una sfera di raggio r il cilindro di volume massimo. Si scelga poi a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cilindro di volume massimo.

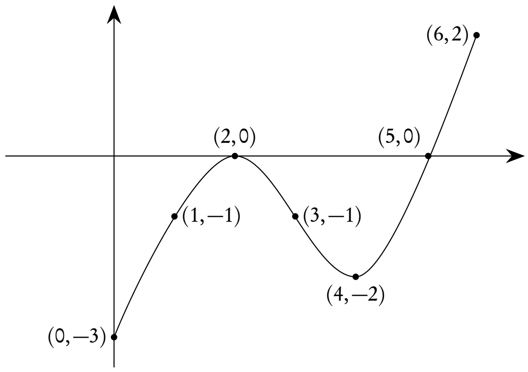
4.21. Anno scolastico 2011-2012

4.21.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Della funzione f, definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato di seguito, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che

$$\int_0^6 f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

Problema 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

a) Fissato un riferimento cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = 1/2$ e $x = 1$.

b) La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

c) Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.

d) Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $1/2 \le x \le 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Questionario

1. Si calcoli
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}.$$

2. Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

3. Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

4. L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

5. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

7. È dato un tetraedro regolare di spigolo ℓ e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da ℓ e da h.

8. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad un retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

4.21.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

a) Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:
$$S(x) = \frac{2-\cos x}{\sin x}.$$

b) Si studi la funzione $S(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$ mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.

c) Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità $p(x)$ che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto. Si studi la funzione $p(x)$ e si tracci il suo grafico ω nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.

d) Si calcoli il valore medio della funzione $p(x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.

Problema 2

Si consideri la funzione
$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si verifichi che i tre punti di flesso di γ sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.

c) Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$.

Questionario

1. Si divida il segmento $|\overline{AB}| = a$ in due parti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, in modo che, costruito su $\overline{AC}$ il quadrato ACDE e su $\overline{CB}$ il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono ABFDE.

2. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \log\bigl(\sin 2x\bigr), & \text{se } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0,2)$.

4. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1+\tan x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi/4$ è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

5. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^2+4}{bx+2}$$

perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione $y = x+2$.

7. Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx\,,$$

si calcoli un'approssimazione di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Sia C la curva d'equazione $y = x^2 - 2x + 4$, e sia G la curva simmetrica di C rispetto all'asse y. Qual è l'equazione di G?

9. Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

10. Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente 8 m e 6 m e gli angoli acuti di 30°. Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 2 m.

4.21.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

La sezione trasversale di un canale di irrigazione ha la forma di un trapezio isoscele con la base maggiore in alto. Sia la base minore che i due lati obliqui misurano 2 metri.

a) Se x è l'angolo acuto del trapezio, si dimostri che l'area della sezione trasversale del canale è:

$$A(x) = 4\sin x(1+\cos x).$$

b) Si studi la funzione $A(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

c) Si calcoli l'area della regione di piano σ limitata dalla curva γ e dall'asse delle x.

d) Si scelga a caso un punto all'interno del rettangolo determinato dagli assi cartesiani, dalla retta $x = \pi$ e dalla tangente alla curva γ nel suo punto di massimo relativo. Si determini la probabilità che il punto scelto a caso risulti esterno a σ.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di flesso e si calcoli l'area del trapezio che esse formano con gli assi cartesiani.

c) Si calcoli il volume del solido generato dal suddetto trapezio in una rotazione completa attorno all'asse x.

d) Si calcoli l'area della regione di piano, limitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalle rette $x = 1$, $x = \mathrm{e}$.

Questionario

1. Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze $|\overline{CA}| = 837$ metri, $|\overline{CB}| = 1164$ metri e l'angolo $A\widehat{C}B$ la cui ampiezza è $44{,}5°$. Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2},$$
quando x tende a 0.

3. Una finestra ha la forma di un rettangolo sormontato da un semicerchio avente per diametro un lato del rettangolo; il contorno della finestra misura ℓ. Si determinino le dimensioni del rettangolo affinché l'area totale della finestra sia massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \log_x(x^2+4)$$
nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione
$$y = x^2\sqrt{x+1}$$
e dall'asse x nell'intervallo $-1 \le x \le 0$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Σ.

6. Si dimostri che
$$\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

7. Tenuto conto che:
$$\log 2 = \int_0^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x,$$
si calcoli un'approssimazione di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Si determini per quale valore di x si ha
$$\mathrm{e}^{10^x} = 10^{\mathrm{e}^x}.$$

9. Si determini la probabilità che in otto lanci di una moneta si presenti croce un numero dispari di volte.

10. In una figliata di quattro gattini, è più probabile che due siano maschi e due siano femmine, oppure che tre siano di un sesso e uno dell'altro?

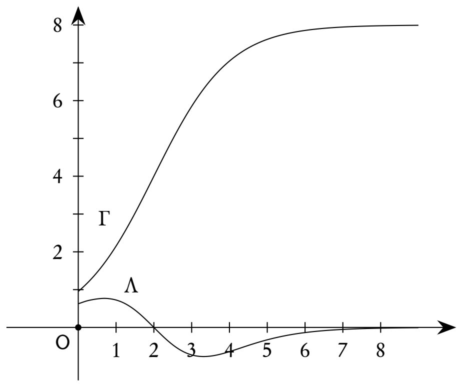
4.22. Anno scolastico 2012-2013

4.22.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2,4)$, passa per $(0,0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.



a) Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è: $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?

b) Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?

c) Se Γ è il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{a}{1+e^{b-x}},$$
si provi che $a = 8$ e $b = 2$.

d) Nell'ipotesi del punto c), si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0,2]$.

Problema 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

a) Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.

b) Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.

c) Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0,1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.

d) Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.

Questionario

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?
3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $\mathsf{A}(2,-1)$ e $\mathsf{B}(-6,-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.
4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.
5. In un libro si legge: "*se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es.* 0,38%*), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'*1,14%*), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di* 0,76%*)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?
7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?
8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin \pi}}{x - \pi} = -1.$$

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

4.22.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

È dato un angolo retto $\mathsf{X\widehat{O}Y}$ e sulla sua bisettrice un punto P, tale che $\mathsf{P\widehat{A}O} = 2 \cdot \mathsf{P\widehat{B}O}$, essendo A e B punti, rispettivamente, di OX e di OY.

a) Posto $\mathsf{P\widehat{B}O} = \alpha$, si calcoli il rapporto:

$$\frac{|\overline{\mathsf{OA}}|}{|\overline{\mathsf{OB}}|}$$

e lo si esprima in funzione di $x = \tan\alpha$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{2(x+1)}.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si considerino i punti C e D in cui l'asintoto obliquo di γ incontra rispettivamente l'asse y e l'asse x . Se E è il punto medio del segmento $\overline{\mathsf{CO}}$, si mostri che la retta DE è tangente a γ nel punto di ascissa 1.

d) Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo COD. La probabilità che tale punto risulti interno alla regione σ delimitata, nel primo quadrante, da γ e dagli assi medesimi è maggiore o minore del 50%? Si illustri il ragionamento seguito.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = x - 2\arctan x.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathsf{O}xy$.

b) La curva γ incontra l'asse x, oltre che nell'origine, in altri due punti aventi ascisse opposte. Detta ξ l'ascissa positiva, si dimostri che $1 < \xi < \pi$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

c) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel suo punto di flesso, si verifichi che essa risulta perpendicolare ad entrambi gli asintoti e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con uno degli asintoti e l'asse x.

d) Si calcoli l'area della regione di piano, delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo chiuso $[-1, 0]$.

Questionario

1. È dato il settore circolare AOB, di centro O, raggio r e ampiezza $\pi/3$. Si inscriva in esso il rettangolo PQMN, con M ed N sul raggio $\overline{\mathsf{OB}}$, Q sull'arco e P su $\overline{\mathsf{OA}}$. Si determini l'angolo $\mathsf{Q\hat{O}B} = x$, affinché il perimetro del rettangolo sia massimo.

2. Quali sono i poliedri regolari? Perché sono detti anche solidi platonici?

3. Si scriva l'equazione della tangente al grafico della funzione:

$$x = \log\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

nel punto P di ordinata $y = 2$.

4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \log x$ e dall'asse x sull'intervallo $[1, \mathrm{e}]$. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura dell'altezza del solido è data da $h(x) = x$. Quale sarà il volume del solido?

5. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?
6. Un cono di nichel (densità $\varrho_1 = 8,91\,\mathrm{g/cm^3}$) ha il raggio di base di 15 cm e l'altezza di 20 cm. Da questo cono se ne taglia via un altro, avente l'altezza di 5 cm, che viene sostituito da un cilindro di alluminio (densità $\varrho_2 = 2,70\,\mathrm{g/cm^3}$), che ha la stessa altezza del cono piccolo e la base uguale alla base minore del tronco di cono residuo. Si dica se la massa m_2 del solido così ottenuto è maggiore o minore di quella m_1 del cono di partenza.
7. Tenuto conto che:
$$\ln 3 = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$
si calcoli un'approssimazione di $\ln 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.
8. Si consideri l'equazione:
$$4x^3 - 14x^2 + 20x - 5 = 0.$$
Si dimostri che essa per $0 < x < 1$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
9. Lanciando due dadi, qual è la probabilità che esca per somma un numero primo? Quante volte occorre lanciarli perché si possa aspettare, con una probabilità $p = 80\%$ assegnata, di veder apparire almeno una volta un numero primo?
10. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$, si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti $\mathrm{A}(2\sqrt{3}, 2)$ e $\mathrm{B}(2, 2\sqrt{3})$. Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco $\widehat{AB}$.

4.22.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Data la semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathrm{AB}}| = 2r$, si prenda su di essa un punto P e si tracci il raggio $\overline{\mathrm{OQ}}$ parallelo ad $\overline{\mathrm{AP}}$.

a) Posto $\mathrm{P\widehat{A}B} = \alpha$, si calcoli il rapporto:
$$\frac{|\overline{\mathrm{AP}}| + |\overline{\mathrm{PQ}}|}{|\overline{\mathrm{QB}}| + |\overline{\mathrm{BA}}|}$$
e lo si esprima in funzione di $x = \sin(\alpha/2)$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x+1}\,.$$

b) Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si verifichi che essa passa per il punto d'intersezione degli asintoti. Si calcoli inoltre, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che s forma con l'asintoto obliquo.

d) Si calcoli l'area della regione di piano σ, delimitata dall'asse x, da γ e dai suoi asintoti.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}\,.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto P di ascissa $x=\mathrm{e}$, e si determini l'ascissa del punto C in cui essa incontra l'asse x. Si calcoli inoltre l'area del semicerchio Γ, situato nel I quadrante, avente il centro in C e raggio uguale alla distanza di C dall'origine O.

c) Si calcoli l'area della superficie piana Σ, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette $x=\mathrm{e}$, $x=\mathrm{e}^2$.

d) Si scelga a caso un punto all'interno del semicerchio γ. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla superficie piana Σ.

Questionario

1. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di $34,6°$; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino $=1853,182\,\mathrm{m}$).

2. Si calcoli il limite della funzione

$$f(x)=(1+x^2)^{1/\sin^2 x}\,,$$

quando x tende a 0.

3. Nel triangolo ABC l'angolo in B misura $\pi/6$ e quello in C misura x. Si determini l'angolo x in modo che, detta H la proiezione ortogonale di A sulla retta BC, la quantità:

$$\frac{|\overline{BC}|+|\overline{HC}|}{|\overline{AC}|}$$

risulti massima.

4. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \log_x 2$$
nel punto P di ascissa $x = 2$.

5. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = \ln x$ e dall'asse x nell'intervallo $1 \le x \le \mathrm{e}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza quadrupla della base. Si calcoli il volume di Σ.

6. Si disegni la curva di equazione
$$y = |x^2 - 1|.$$
Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte nei punti A e B di ordinata nulla. Si verifichi che le due coppie di rette trovate individuano un rombo, del quale si chiedono le misure del perimetro e dell'area.

7. Tenuto conto che:
$$\ln 3 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\, \mathrm{d}x\,,$$
si calcoli un'approssimazione di $\ln 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Si risolva l'equazione:
$$\log_2\left(\log_3 x\right) = 3.$$

9. Un cono equilatero di piombo (densità $\varrho = 11{,}34\,\mathrm{g/cm^3}$), avente il raggio $r = 5\,\mathrm{cm}$, presenta all'interno una cavità di forma irregolare ed ha la massa $m = 2\,\mathrm{kg}$. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità.

10. Un missile ha la probabilità $3/10$ di colpire un bersaglio. Quanti missili si debbono lanciare perché la probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta sia maggiore dell'80%?

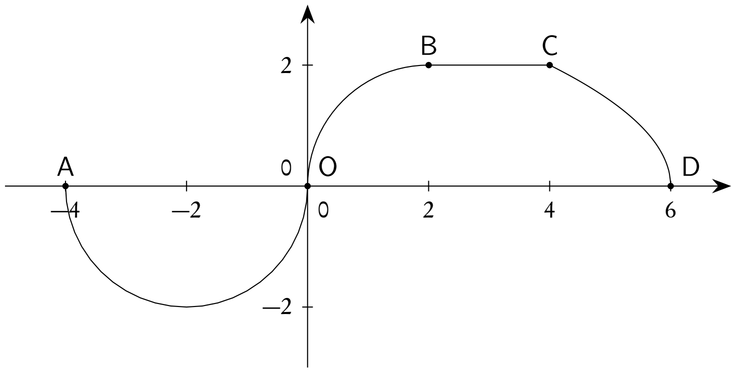
4.23. Anno scolastico 2013-2014

4.23.1. Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4,6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato di seguito, passa per i punti A$(-4,0)$, O$(0,0)$, B$(2,2)$, C$(4,2)$, D$(6,0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro $\overline{\mathrm{AO}}$, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento $\overline{\mathrm{BC}}$ e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.



a) Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.

b) Posto

$$f(x) = \int_{-4}^{0} g(t)\,dt\,,$$

si calcolino $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.

c) Per quali valori di $x \in [-4, 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?

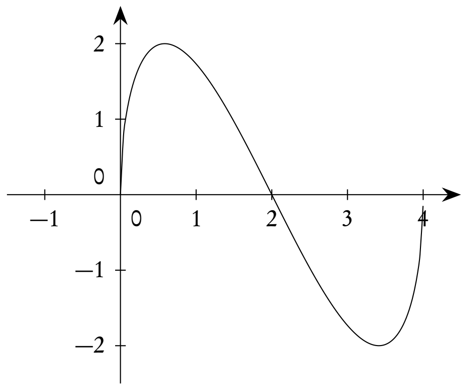
d) La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

Problema 2

Sia

$$f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}.$$

a) Di seguito è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2, 0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.



b) Si dimostri che, qualunque sia t, $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?

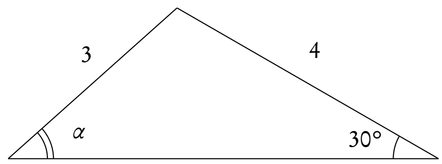
c) Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.

d) Sia $h(x) = \sin\big(f(x)\big)$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di

$$\int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x\ ?$$

Questionario

1. Nel triangolo disegnato di seguito, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:
   — esattamente una pallina è rossa;
   — le tre palline sono di colori differenti.
4. Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2, -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = 1/x^2$. Si calcoli il volume del solido.
5. In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180°.
6. Si calcolino l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.
7. Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x f ha un minimo relativo?
   a) $5,146$;
   b) $3,146$;
   c) $1,000$;
   d) $0,159$;
   e) 0.
8. La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale -ne parla anche Dante nella Divina Commedia- e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

9. Le lettere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di $\mathbb{N}$. Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.
10. Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x}=1.$$

4.23.2. Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

La curva γ è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x=\frac{t+1}{t},\quad y=\frac{t^2+1}{t}.$$

a) Se ne ricavi l'equazione cartesiana $y=f(x)$ e se ne costruisca il grafico.

b) Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che tale retta forma con l'asintoto obliquo.

c) Si calcoli l'area della regione di piano Σ, delimitata da γ, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x=2$ e $x=4$.

d) Verificato che è $A(\Sigma)=\log 3$, si calcoli un'approssimazione di $\log 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si dimostri che l'equazione

$$x^3-3x^2+6x-6=0$$

ha, sull'intervallo $1<x<2$, un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ, si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.

c) Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse y.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=2$.

Questionario

1. Si determini il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}.$$
2. La funzione:
$$f(x) = \sin \sqrt[3]{x}\,,$$
è evidentemente continua nel punto $x = 0$. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.
3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + \sin^2 \frac{1}{x}\right)$$
nel punto P di ascissa $x = 1/\pi$.
4. Data la parte finita di piano compresa tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $x - 1 = 0$ ed il grafico della funzione $y = e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.
5. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di $42,4°$ e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di $46,5°$. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.
6. Si disegni il grafico γ della funzione:
$$f(x) = \text{ distanza di } x \text{ dal più prossimo intero.}$$
Si dica se $f(x)$ è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalla retta $x = 9/10$ nell'intervallo $[0, 9/10]$.
7. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$
e dall'asse delle x nell'intervallo $-1 \le x \le 1$.
8. Si consideri l'equazione
$$\log|x| - e^x = 0.$$
Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo $-2 \le x \le -1$ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
9. Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?
10. Nel poscritto al suo racconto "*Il Mistero di Marie Rogêt*", Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

4.23.3. Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario. Tempo concesso 6 ore.

Problema 1

Siano ABC e ABD due triangoli, il secondo rettangolo. Nel triangolo ABC il lato $\overline{BC}$ è il doppio di $|\overline{CA}| = 1$ mentre nel triangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad $\overline{AB}$, il cateto $\overline{AB}$ è il doppio di $\overline{BD}$.

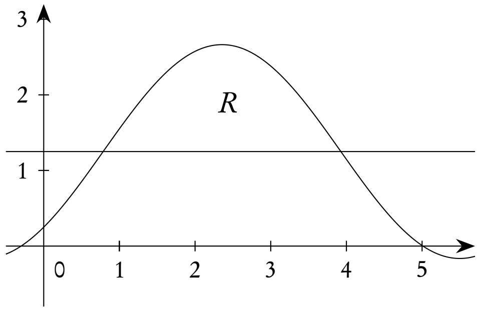
a) Si mostri che l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo $A\widehat{C}B = \gamma$ è espressa da:

$$f(\gamma) = \sin\gamma - \cos\gamma + \frac{5}{4}.$$

b) Si studi $f(\gamma)$ e se ne tracci il grafico anche prescindendo dai limiti geometrici del problema.

c) Si determini, in gradi e primi sessagesimali, il valore di γ cui corrisponde il quadrilatero di area massima e si determinino area e perimetro di tale quadrilatero.

d) Sia R le regione, indicata in figura, delimitata dal grafico di $f(\gamma)$ e dalla retta $y = 5/4$. Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno all'asse x.

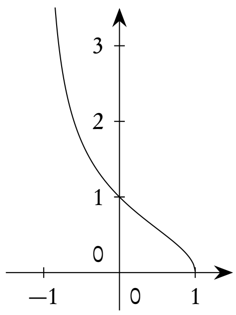


Problema 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

a) Si studi f e si verifichi che il suo grafico γ ha l'andamento riportato in figura. La funzione f è invertibile? Se sì, quale è l'espressione della sua inversa?



b) Si mostri che l'area della regione Σ, delimitata da γ e dagli assi cartesiani sull'intervallo chiuso $[0,1]$ è uguale a $\pi/2-1$.

c) Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si sfrutti l'uguaglianza precedente per calcolare un'approssimazione di $\pi/2$.

d) La regione Σ è la base di un solido Ω, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Ω.

Questionario

1. Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2°; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5°. Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.

2. Si calcoli il limite della funzione
$$f(x)=\frac{(e^x-1)^2}{3x^2+4x^3},$$
quando x tende a 0.

3. Sia $|\mathsf{AB}|=2{,}5\,\mathrm{m}$ l'altezza di una statua e $|\mathsf{BP}|=2\,\mathrm{m}$ l'altezza del piedistallo su cui essa poggia. Si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo il luogo dei punti tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo.

4. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale al diagramma della funzione:
$$f(x)=\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}\right)\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{3}{2}x$$
nel punto P di ascissa 0.

5. La regione del I quadrante delimitata dall'iperbole di equazione $9x^2-4y^2=36$ e dall'asse x nell'intervallo $2\leq x\leq 4$, è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

6. Si determini in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo Ψ sotto il quale la curva di equazione
$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x+3}$$
taglia l'asse delle y.

7. Tenuto conto che:
$$\frac{\pi}{4}=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2+4x+5}\,dx,$$
si calcoli un'approssimazione di $\pi/4$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8. Si dica se è possibile che sia:
$$\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

9. Un solido Ω è formato da un cilindro equilatero di raggio r e da due coni equilateri, aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro ed esterni al cilindro. Se si sceglie a caso un punto all'interno di Ω, qual è la probabilità che tale punto risulti interno al cilindro?
10. Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando l'ambo $\{3, 25\}$?

5. Altre sperimentazioni

In molte sessioni d'esame delle sperimentazioni di Liceo Scientifico diverse dal Piano Nazionale Informatica (Scientifico o Scientifico-tecnologico Brocca, Sperimentazioni autonome delle varie tipologie, Liceo della comunicazione) le tracce delle prove assegnate sono comuni a quelle del Corso di ordinamento o a quelle del PNI, oppure sono costruite prendendo parti delle prove assegnate per questi corsi.

In questo capitolo proponiamo una selezione delle prove assegnate in questi corsi sperimentali, o quando contengono problemi e quesiti diversi da quelli assegnati nel corso di ordinamento o nella sperimentazione PNI, o quando, pur non presentando novità, la scelta delle prove proposte ci è parsa significativa per qualificare il tipo di sperimentazione. Come negli altri casi, abbiamo sempre preferito riportare l'intero testo della prova d'esame, anche in presenza di molte coincidenze con altre prove.

5.1. Anno scolastico 1996-1997

5.1.1. Sessione suppletiva - Progetto Brocca

Argomenti di matematica proposti all'interno della prova d'esame (comprendente anche domande relative ad altre discipline). È richiesta la risoluzione di uno dei problemi. La durata complessiva della prova è di 5 ore.

Problema 1

La formula

$$e^{i\pi}+1=0$$

è generalmente ritenuta tra le più belle che si incontrano in matematica e lega tra di loro quelli che da taluno sono stati definiti i cinque personaggi fondamentali della matematica: 0, 1, e, i, π.

Il candidato

a) illustri sinteticamente il significato di e, i, π evidenziandone anche qualche aspetto più rilevante sotto il profilo storico;

b) illustri un algoritmo di calcolo per π e lo codifichi in un linguaggio di programmazione conosciuto;

c) spieghi significato e importanza della legge di Gauss:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

dove μ è il *valor medio* e σ lo *scarto quadratico medio*, ponendola altresì a confronto con le altre leggi di distribuzione

Problema 2

Il candidato rappresenti graficamente la curva d'equazione

$$x^2y = a^2(a-y) \tag{1}$$

essendo a una costante positiva.

La curva assegnata figura nelle *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (1748) di Maria Gaetana Agnesi (1718 — 1799) - donde il nome di *versiera di Agnesi* - come soluzione del seguente problema:

"Dato il semicircolo ADC del diametro $\overline{AC}$, si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MB normale al diametro $\overline{AC}$, che taglierà il circolo in D, sia $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BM}$ e perché infiniti sono i punti M, che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo."

Il candidato

a) verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di riferimento cartesiano, la (1) è l'equazione del luogo geometrico richiesto nell'enunciato del problema [si ponga $|\overline{AC}| = a$, $B \in \overline{AC}$];

b) dette P_1 e P_2, rispettivamente, le intersezioni con l'asse x delle tangenti alla curva nei punti di flesso F_1 e F_2, calcoli l'area della regione di piano delimitata dall'arco di curva di estremi F_1 e F_2 e dai segmenti P_1F_1, P_2F_2; .

c) verifichi che l'area compresa fra la curva e l'asse delle x è quattro volte quella del cerchio di diametro $\overline{AC}$;

d) enunci i metodi numerici, che conosce, per approssimare un integrale definito illustrando altresì come si può migliorare generalmente un'approssimazione per ottenere una maggiore precisione.

5.2. Anno scolastico 1997-1998

5.2.1. Sessione ordinaria - Progetto Brocca (Scientifico)

La prova richiede lo svolgimento di *due* soli argomenti, scelti tra quelli proposti, dei quali uno di matematica ed uno di fisica.

Quesiti di matematica

1. Data una circonferenza di centro O e diametro $|\overline{AB}| = 2$, tracciare due semirette uscenti da O e intersecanti la circonferenza in C e D tali che $A\widehat{O}D = 3A\widehat{O}C$.

   Indicata con x l'ampiezza di $A\widehat{O}C$, determinare in funzione di x la distanza y tra le due rette perpendicolari ad $\overline{AB}$ e passanti rispettivamente per C e D.

   Rappresentare la funzione in tutto il suo campo di esistenza (anche al di fuori dei limiti imposti dal problema geometrico) e determinare il valore massimo assunto da y.

   Individuare tutte le traslazioni e le simmetrie assiali che riportano la funzione $y = f(x)$ in se stessa.

   Calcolare infine le aree delle parti di piano delimitate dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse.

2. Data la curva γ di equazione:
$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$
tracciarne il grafico in coordinate cartesiane e determinare le coordinate del punto M di minimo.

   Trovare per quali valori del coefficiente angolare la retta generica passante per il punto M è tangente alla curva γ e determinare le coordinate dei punti di tangenza.

   Data l'equazione $y = m(x+1)$ della generica retta r passante per il punto A$(-1, 0)$, determinare - al variare del parametro m - il luogo μ dei punti medi P del segmento $\overline{\mathsf{BC}}$ (con B e C diversi da A) che la curva γ stacca sulla retta r.

   Tracciare il grafico della funzione rappresentante il luogo μ.

   Calcolare il volume generato dalla rotazione attorno all'asse x della superficie appartenente al I° quadrante e delimitata, oltre che dalla curva μ, dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

Quesiti di fisica

1. Un pennello di luce monocromatica emessa da un laser illumina perpendicolarmente una doppia fenditura praticata in uno schermo A. La distanza tra le due fenditure sia $0.1\,\mathrm{mm}$.
   Al di là della doppia fenditura e a una distanza di $2\,\mathrm{m}$ da A è disposto, parallelamente ad A, uno schermo B su cui si raccoglie la luce proveniente dalle due fenditure.
   Calcolare la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser se la distanza su B della frangia centrale luminosa dalla prima frangia laterale luminosa è di $10\,\mathrm{mm}$.

   Se il laser illumina una placca di cesio (frequenza di soglia per effetto fotoelettrico $\nu_0 = 4.34 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$), si ha emissione di elettroni?

   [massa dell'elettrone $m = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, carica dell'elettrone $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, costante di Planck $h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, velocità della luce $c = 3.00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$]

2. Il nucleo di un atomo di uranio di massa 232.03714 a.m.u (1 a.m.u. $= 1.6606 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) decade in un nucleo di plutonio di massa 220.02873 a.m.u ed in una particella α di massa 4.00260 a.m.u..
   Determinare la massa che si trasforma in energia cinetica e - supposto in prima approssimazione che tutta l'energia cinetica sia acquisita dalla particella α - la velocità v con cui la particella α esce dalla disintegrazione.

   Tale particella α può considerarsi relativistica?

   Quale deve essere l'intensità di un campo magnetico ortogonale alla velocità v perché la particella descriva una circonferenza di diametro $1\,\mathrm{m}$ supposto che la particella si muova nel vuoto?

   [carica dell'elettrone $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, velocità della luce $c = 3.00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$]

5.2.2. Sessione ordinaria - Progetto Brocca (Scientifico-Tecnologico)

Il candidato risolva due argomenti, uno di matematica e uno di informatica, scelti a suo piacimento tra quelli proposti.

Quesiti di matematica

1. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = ax^3 + 3x + b,$$
dove a, b sono parametri reali con $a \neq 0$.

   a) Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo ed uno di minimo relativi e quelli per i quali non ammettono tali punti.

   b) Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.

   c) Controllato che la curva γ si ottiene per $a = -1/2$, disegnarne l'andamento.

   d) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dall'asse x.

2. L' insieme degli impiegati di una ditta è composto da 12 uomini e 18 donne. Fra gli uomini ve ne sono 3 di nome Mario e fra le donne ve ne sono 3 di nome Lucia. Deve essere costituita una delegazione di 3 componenti in modo del tutto casuale ma, dovendo essere soddisfatta la condizione che siano rappresentati entrambi i sessi, si segue questa procedura: si estrae a caso un uomo dal gruppo degli uomini, una donna dal gruppo delle donne e il terzo componente la delegazione fra gli impiegati che sono rimasti dopo le prime due estrazioni.

   a) Calcolare quante sono le possibili delegazioni.

   b) Calcolare la probabilità che la delegazione:

      i. comprenda esattamente un Mario e due Lucia;

      ii. non contenga alcun Mario né alcuna Lucia,

      iii. contenga uno e un solo Mario e una e una sola Lucia.

   c) Posto che complessivamente per n volte debba essere costituita una delegazione alle stesse condizioni suddette, calcolare:

      i. per $n = 30$, il numero medio di volte in cui la delegazione contiene uno e un solo Mario e una e una sola Lucia,

      ii. per $n = 5$, la probabilità che al più in un caso la delegazione sia composta da un Mario e due Lucia,

      iii. per $n = 70$, la probabilità che esattamente in 35 casi la delegazione non comprenda alcun Mario né alcuna Lucia.

   N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule delle probabilità binomiale e di Poisson:
$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad p_k = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

e la formula della distribuzione normale:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (e \approx 2.71, \quad \pi \approx 3.14).$$

Quesiti di informatica

1. Si desidera simulare, per un periodo di 10 anni, la crescita di un albero che all'inizio è costituito da un semplice fusto di 1 metro senza rami.

   Ogni anno si verificano i seguenti eventi:

   — sulla cima del fusto nascono 4 nuovi rami laterali che, nel corso della stagione, crescono di 40 cm,

   — la posizione angolare dei rami sul tronco è casuale, ma essi sono disposti a 90° fra di loro,

   — il fusto e ciascuno dei rami già esistenti si allungano del 20% della lunghezza raggiunta nella stagione precedente.

   Il candidato, fatte le ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie:

   a) proponga e illustri la struttura generale di una procedura capace di simulare la crescita dell'albero,

   b) illustri in particolare quale struttura dei dati intende adottare,

   c) codifichi un segmento significativo della procedura in un linguaggio di sua conoscenza.

2. Si vuole istallare una centralina di controllo delle condizioni atmosferiche costituita da un computer che acquisisce, istante per istante:

   — il valore della velocità del vento in m/s variabile da 0 a 50,

   — la direzione del vento approssimata e ricondotta a uno degli otto punti (N, NE, E, SE, S, SO, O, NO),

   — la temperatura in °C variabile da −10 a +50,

   — la pressione in millibar variabile da 950 a 1050.

   Il computer deve mostrare ogni giorno sullo schermo le curve che rappresentano l'andamento delle quattro grandezze istante per istante per 24 ore a partire dalle ore 0 e, alla fine della giornata, stamparle.

   Il candidato, fatte le ipotesi aggiuntive che ritiene necessarie:

   a) illustri uno schema a blocchi generale del sistema illustrando la funzione dei singoli blocchi,

   b) indichi con quale struttura di dati possono essere rappresentate le curve che rappresentano le quattro grandezze,

   c) analizzi il modulo software capace di rappresentare sullo schermo le quattro curve, ne illustri la struttura generale e ne codifichi un segmento a sua scelta in un linguaggio di sua conoscenza.

5.2.3. Sessione suppletiva - Progetto Brocca

Argomenti di matematica proposti all'interno della prova d'esame (comprendente anche domande relative ad altre discipline). È richiesta la risoluzione di uno dei problemi. La durata complessiva della prova è di 5 ore.

Problema 1

Vincenzo Viviani (1622 — 1703) nell'opera *De Maximis et Minimis*, data alle stampe nel 1659, avvertì la necessità di inserire un problema a cui aveva dato soluzione e che era stato oggetto di studio anche da parte di altri più noti e valenti matematici del tempo.

Il problema è il seguente:

"Dato un triangolo ABC, i cui angoli misurano ciascuno meno di 120°, trovare un punto X tale che la somma $\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}$ sia minima".

La soluzione di Viviani, trovata, egli dice, non senza iterati sforzi, è questa: X è il punto, interno al triangolo, che "vede" o proietta i lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, sotto angoli di 120°.

Il problema conserva inalterata la sua importanza in quanto se i vertici A, B e C rappresentano, ad esempio, tre villaggi o città che si vogliono collegare tra loro, ragioni di convenienza potrebbero consigliare di realizzare la rete stradale minima.

Il candidato localizzi il punto X nell'ipotesi semplificatrice che la retta passante per C e per il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ sia perpendicolare a tale segmento:

a) dimostri che il punto X che realizza il minimo appartiene al segmento $\overline{CM}$;

b) introdotto un sistema di coordinate tale che C sia l'origine e CM coincida con l'asse x positivo e indicate con (a,b) e $(x,0)$ rispettivamente le coordinate di A e di X, dimostri che $s(x)=|\overline{XA}|+|\overline{XB}|+|\overline{XC}|$ è data dalla formula:
$$s(x)=x+2\sqrt{(a-x)^2+b^2};$$

c) dimostri che se $a\le b\sqrt{3}$, $s(x)$ assume il minimo in $x=0$, mentre se $a>b\sqrt{3}$, $s(x)$ assume il minimo in $x=a-b\sqrt{3}$;

d) interpreti geometricamente il risultato confrontandolo con l'enunciato e la soluzione, più generale, di Viviani.

Problema 2

Nel piano riferito ad assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la circonferenza con centro nel punto $(0,1/2)$ e raggio $1/2$; la retta variabile OA passante per l'origine O interseca la retta $y=1$ nel punto A e la circonferenza nel punto B. Determinare il luogo dei punti P intersezioni delle rette passanti per A e per B e parallele agli assi y e x, rispettivamente.

a) Determinata l'equazione del luogo se ne tracci il grafico e, parimenti, si tracci il grafico di
$$y=-\frac{1}{1+x^2}.$$

b) Si calcolino le aree:

1. della superficie compresa fra le due curve;
2. della superficie compresa fra le due curve per $-1 \leq x \leq 1$.

c) Si usi un metodo di integrazione numerica per approssimare l'area di cui al punto 2. fornendo altresì una stima dell'errore commesso.

d) "π è la somma, espressa in radianti, degli angoli interni di un triangolo": il candidato discuta la validità o meno di tale teorema in un contesto di *geometria non euclidea*.

e) Illustri il candidato il problema classico della *quadratura del cerchio*, la cui "impossibilità" Dante Alighieri così evoca poeticamente:

Qual'è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

(Paradiso, c.XXXIII, vv.133 — 135).

5.3. Anno scolastico 1999-2000

5.3.1. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome

Tema di matematica e informatica. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Il candidato dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

dica cosa c'è di sbagliato nel ragionamento seguente:

Sia da calcolare

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

applicando la (1) con $f(x) = 1/x$ e $g'(x) = 1$, otteniamo:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\cdot 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\cdot x - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

da cui, eliminando

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

da ambo i membri, segue: $0 = 1$.

Successivamente applichi la (1) per calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x(x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 2

Il candidato affronti le seguenti questioni:

a) fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono;

b) dopo averlo esposto applicare il teorema di *de L'Hôpital* per dimostrare che, per n finito, $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{2^x} = 0;$$

c) esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di log2.

Problema 3

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy si consideri la curva g di equazione:

$$y = a \sin^2 x + b \sin x - \frac{5}{2}.$$

a) Si determinino i coefficienti a e b affinché g abbia un flesso nel punto $(\pi/6, 0)$;

b) si disegni il grafico della curva, per i valori di a e di b così trovati, nell'intervallo $[0, 2\pi]$;

c) si determini l'area della regione limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \frac{5}{6}\pi.$$

Infine, si esponga un algoritmo per il calcolo approssimato di π.

5.4. Anno scolastico 2000-2001

5.4.1. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m| - m},$$

ed m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.

b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.

d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

Problema 2

È dato il rettangolo ABCD i cui lati $\overline{\mathsf{AB}}$ e $\overline{\mathsf{AD}}$ sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

b) Stabilire che la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{DF}}$ è $5a/4$.

c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

Questionario

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: "Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$".

2. Il limite della funzione
$$\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x},$$
quando x tende a $+\infty$:

   A) è uguale a 0;

   B) è uguale a 1;

   C) è uguale a $+\infty$;

   D) non esiste.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

4. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare
$$\int_0^{\pi/2} f\left(\frac{x}{3}\right) dx .$$
Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;

B) due punti;

C) una retta;

D) due rette;

E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Nello spazio ordinario sono date tre rette a, b, c, delle quali si sa soltanto che c è perpendicolare sia alla retta a che alla retta b. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a, b.

7. Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A) "è escluso che l'affinità sia una rotazione",

B) "l'affinità può essere una similitudine",

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

8. Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = 2x + 3y\,, \quad Y = -3x + 2y\,,$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

9. Da un sacchetto contenente i 90 numeri della "Tombola" si estraggono 4 numeri a caso. Considerata la proposizione: "La probabilità che fra di essi ci siano i numeri 1 e 90 è 2/90", dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. Due giocatori A e B giocano a TESTA-CROCE (le due facce della moneta hanno le stesse probabilità di uscita) con la seguente regola: "Uno dei due giocatori lancia e vince se viene TESTA altrimenti il gioco passa all'altro giocatore; il quale lancia a sua volta e vince se viene TESTA altrimenti il gioco ritorna al primo; e così via". Calcolare quali probabilità ha il giocatore A di vincere sia nel caso in cui egli inizia a lanciare sia nel caso in cui a lanciare per primo sia B.

5.4.2. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m|-m},$$

ed m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.

b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.

d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa -1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

Problema 2

È dato il rettangolo ABCD i cui lati $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

b) Stabilire che la lunghezza del segmento $\overline{DF}$ è $5a/4$.

c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

Questionario

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: "Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$".
2. Il limite della funzione
$$\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x},$$
quando x tende a $+\infty$:
   A) è uguale a 0;
   B) è uguale a 1;
   C) è uguale a $+\infty$;
   D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.
4. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare
$$\int_0^{\pi/2} f\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x\,.$$
Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.
5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:
$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$
Tale luogo è costituito da:
   A) un punto;
   B) due punti;
   C) una retta;
   D) due rette;
   E) una figura diversa dalle precedenti.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
6. Calcolare la derivata della funzione $\cos 2x$ ricorrendo alla definizione di derivata.
7. Il teorema di Lagrange afferma che: "Se $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a,b) allora esiste almeno un punto c dell'intervallo (a,b) tale che:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\text{''}. \tag{1}$$
Fornire un'interpretazione geometrica del teorema e, sempre con ricorso all'interpretazione geometrica, far vedere che, se viene meno la condizione della derivabilità di $f(x)$ nell'intervallo (a,b) allora può non esistere alcun punto c dell'intervallo (a,b) per il quale sussista la (1).
8. Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e, risulta
$$\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = \ln x + 1$$
per tutti e soli gli x reali tali che:
   A) $x \geq 0$;
   B) $x \geq 1$;

C) $x \geq \mathrm{e}$;
D) $x \geq 1/\mathrm{e}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. La base maggiore, la base minore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine: 10 cm, 8 cm, 30 cm. Dire se il trapezio è circoscrittibile ad un cerchio o se è inscrittibile in un cerchio e giustificare le risposte.
10. In un piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali, sono assegnate una retta a di coefficiente angolare 2 ed una retta b di coefficiente angolare −2. Calcolare il seno dell'angolo orientato (a, b).

5.4.3. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x),$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x+m}{|x+m|-m},$$

ed m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m.
b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.
c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad $m = 2$.
d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa −1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

Problema 2

È dato il rettangolo ABCD i cui lati $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.
b) Stabilire che la lunghezza del segmento $\overline{DF}$ è $5a/4$.
c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.
d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.
e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

Questionario

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$, dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: "Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$".
2. Il limite della funzione
$$\frac{x^2 - \sin x}{x^2 - \cos x},$$
quando x tende a $+\infty$:
   A) è uguale a 0;
   B) è uguale a 1;
   C) è uguale a $+\infty$;
   D) non esiste.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
3. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f(x)$ sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.
4. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $\sin 2x$. Se è possibile, calcolare
$$\int_0^{\pi/2} f\left(\frac{x}{3}\right) dx.$$
Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.
5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:
$$x^2 + y^2 - 4xy = 0.$$
Tale luogo è costituito da:
   A) un punto;
   B) due punti;
   C) una retta;
   D) due rette;
   E) una figura diversa dalle precedenti.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
6. Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:
   A) "è escluso che l'affinità sia una rotazione",
   B) "l'affinità può essere una similitudine",

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

7. Considerata l'affinità di equazioni:
$$X = 2x + 3y\,, \quad Y = -3x + 2y\,,$$
determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

8. Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e, risulta
$$\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = \ln x + 1$$
per tutti e soli gli x reali tali che:

   A) $x \geq 0$;
   B) $x \geq 1$;
   C) $x \geq \mathrm{e}$;
   D) $x \geq 1/\mathrm{e}$.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:
$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1; \\ a_{n-1} + 2n, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$
Calcolare a_{70} e descrivere un algoritmo che generi i primi 70 numeri della successione e li comunichi sotto forma di matrice di 7 righe e 10 colonne.

10. Considerata l'equazione in x:
$$x^3 + x - 3 = 0,$$
spiegare perché ammette una soluzione reale ed una soltanto e scrivere un algoritmo che permetta di calcolarne un valore approssimato a meno di $1/100$.

5.4.4. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy, si consideri il luogo geometrico g dei punti P che vedono il segmento di estremi $A(0,1)$ e $B(2,l)$ sotto un angolo $A\widehat{P}B$ di ampiezza $\pi/4$ e se ne disegni il grafico.

Nel semipiano delle ordinate $y > l$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con g e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su $\overline{AB}$. Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

a) il lato obliquo del trapezio isoscele ABOC;
b) la diagonale del rettangolo $CDD'C'$;
c) il volume del cilindro generato dalla rotazione di $CDD'C'$ attorno all'asse del segmento $\overline{AB}$.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche $\mathsf{O}xy$, si consideri la funzione:

$$y=\frac{x^3+a}{(x+b)^2}.$$

a) si determinino a e b in modo che il grafico della curva g che ne risulta passi per il punto $\mathsf{P}(2,0)$ e abbia per asintoto la retta $x=-1$;

b) si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t;

c) si determini l'angolo α che t forma con la tangente a g nel punto di intersezione tra g e t;

d) si tracci il grafico di:

$$y=\frac{|x^3+a|}{(x+b)^2},$$

per i valori di a e b prima trovati.

Questionario

1. Si provi che il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.
2. Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

3. Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\sin b-\sin a|\leq|b-a|.$$

4. Di una funzione $f(x)$ si sa che: $f(0)=(1/\log 2)^2$, $f'(0)=0$ e che ha derivata seconda uguale a $2x$. Si può dire quanto vale $f(x)$?
5. Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x)=2\arcsin x-\arccos(1-2x^2).$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

6. Dimostrare che:

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

7. Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione:

$$x-\log(2-x)=0.$$

8. Tenuto conto che è:
$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
calcolare π con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.
9. Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che
   a) nessuno dei tre sia difettoso;
   b) almeno uno dei tre non sia difettoso.
10. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

5.5. Anno scolastico 2001-2002

5.5.1. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1
È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa $\overline{AB}$ e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\widehat{C}P$.

a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.
b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.
c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di $\overline{DC}$.
d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.
e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.
f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

Problema 2
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y=kx^3-(2-k)x^2-(3-2k)x+2,$$
dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.
b) Indicata con g quella, fra tali curve, che si ottiene per $k=1$, dimostrare che g ha un centro di simmetria.

c) Dimostrare che la curva g interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}\,.$$

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva g, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1. Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A′ e B′. Stabilire se le rette AB e A′B′ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.
3. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0\,,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui tale luogo è costituito da:

A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto.

4. Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.
5. Si considerino i numeri:

$$2^{1/2},\quad 3^{1/3},\quad 5^{1/5}.$$

Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + (2 \times 2^{n-1}) + (2 \times 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2^{2n}}\,.$$

8. I numeri reali a, b sono tali che:

$$4.3 < a < 5.2 \quad \text{e} \quad -1.7 < b < -1.5.$$

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua e positiva nell'intervallo $a \le x \le b$, descrivere un algoritmo che calcoli un valore approssimato a meno di 10^{-3} dell'area del trapezoide:

$$T = \{\, (x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x) \,\}.$$

10. Si consideri la seguente equazione in x:

$$2x + \ln x = 0.$$

Dimostrare, col metodo preferito, che ammette una soluzione reale ed una soltanto e descrivere un algoritmo che ne calcoli un valore approssimato a meno di $1/10$.

5.5.2. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa $\overline{AB}$ e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\widehat{C}P$.

a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di $\overline{DC}$.

d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

Problema 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2-k)x^2 - (3-2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

b) Indicata con g quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che g ha un centro di simmetria.

c) Dimostrare che la curva g interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_A.

d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva g, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1. Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A′ e B′. Stabilire se le rette AB e A′B′ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.
3. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

   $$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0,$$

   dove k è un parametro reale.

   Determinare, se esistono, i valori di k per cui tale luogo è costituito da:

   A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto.
4. Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.
5. Si considerino i numeri:

   $$2^{1/2}, \quad 3^{1/3}, \quad 5^{1/5}.$$

   Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x) = \int_x^{x+2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + (2 \times 2^{n-1}) + (2 \times 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{2^{2n}}\,.$$

8. I numeri reali a, b sono tali che:

$$4.3 < a < 5.2 \quad \text{e} \quad -1.7 < b < -1.5.$$

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8 < a - b < 6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate la parabola e la retta di equazioni rispettivamente: $x = y^2$ e $x = 1$. La regione finita R di piano delimitata dalla parabola e dalla retta è trasformata nella regione R' dall'affinità di equazioni:

$$x = 2X - Y + 1, \quad y = -3X + 2Y - 1.$$

L'area di R' è:

A) $\dfrac{4}{3}$; B) 4; C) $\dfrac{28}{3}$; D) un valore diverso dai precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione.

10. Da un mazzo di carte da gioco "napoletane" (formato da 40 carte distribuite in 4 semi: "coppe", "spade", "bastoni", "denari") se ne estraggono due a caso. Calcolare la probabilità che fra esse vi sia almeno un "RE".

5.5.3. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e $3a$, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa $\overline{AB}$ e z la misura, in radianti, dell'angolo $\mathrm{H\widehat{C}P}$.

a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

b) Determinare la posizione di P per cui è minima tale somma.

c) Indicata con D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcolare la lunghezza di $\overline{DC}$.

d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k.

e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la retta BC divide il cerchio delimitato da k.

f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta DB.

Problema 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = kx^3 - (2-k)x^2 - (3-2k)x + 2,$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

b) Indicata con g quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che g ha un centro di simmetria.

c) Dimostrare che la curva g interseca l'asse x in uno ed un solo punto A di ascissa x_{A}.

d) Determinare il numero intero z tale che:

$$\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}.$$

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva g, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1. Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A′ e B′. Stabilire se le rette AB e A′B′ sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

3. In un piano riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2+3y^2-6kx+y+2=0,$$

dove k è un parametro reale.

Determinare, se esistono, i valori di k per cui tale luogo è costituito da:

A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto.

4. Dimostrare che il numero $\sqrt{5}$ non è razionale.
5. Si considerino i numeri:

$$2^{1/2},\quad 3^{1/3},\quad 5^{1/5}.$$

Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$f(x)=\int_x^{x+2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n=1+2+4+\cdots+(2\times 2^{n-1})+(2\times 2^n),$$

calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2^{2n}}.$$

8. I numeri reali a, b sono tali che:

$$4.3<a<5.2 \quad \text{e} \quad -1.7<b<-1.5.$$

Dire se è vero o falso che risulta:

$$5.8<a-b<6.9$$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Dimostrare che una primitiva della funzione $1/x$ della variabile reale x è la funzione $\ln|x|$.
10. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo J e derivabile almeno due volte nell'interno di J. Dimostrare che la condizione:

$$f'(a)=0 \quad \wedge \quad f''(a)<0$$

è sufficiente ma non necessaria per concludere che $f(x)$ ha un massimo relativo in a.

5.5.4. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy è assegnata la curva Γ di equazione:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione $y = m$, $m > 0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x = 1$;

b) si verifichi che il valore m trovato è il *valore medio* (o *media integrale*) di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;

c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di 90° in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y = 1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

Problema 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto. Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $|\overline{OA}| = 1$ e $|\overline{OB}| = \sqrt{3}$, mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

1. l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $\overline{A'B'}$;
2. la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima.

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

Questionario

1. Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.
2. Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?
3. Studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due rette perpendicolari fissate nel piano non superi 1.
4. Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$, mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = \pi$, specificando altresì il significato e il valore di π.

5. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t.$$
6. Posto
$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^2-2x+1,$$
trovare $f(x)$.
7. Trovare i massimi e minimi relativi di
$$f(x)=x^x, \quad x>0.$$
8. La curva $(y+1)^3=x^2$ passa per i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$. Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1\leq x\leq 1$?
9. Verificare che la funzione:
$$y=\mathrm{e}^{-x}+x^{-1}$$
è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcolare
$$g'(1+\mathrm{e}^{-1}).$$
10. Dimostrare che l'equazione
$$\sin x=\frac{1}{2}x$$
ha un'unica soluzione nell'intervallo $[\pi/2,\pi]$ e calcolarne un valore approssimato.

5.5.5. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (II tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy è assegnata la curva Γ di equazione:
$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione $y=m$, $m>0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x=1$;
b) si verifichi che il valore m trovato è il *valore medio* (o *media integrale*) di $f(x)$ nell'intervallo $[0,1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;
c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di 90° in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;
d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y=1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

Problema 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto. Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $|\overline{OA}| = 1$ e $|\overline{OB}| = \sqrt{3}$, mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

1. l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $\overline{A'B'}$;
2. la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima.

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

Questionario

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono sei senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la sestina $(17, 27, 37, 47, 67, 87)$.
2. Nell'esperimento del lancio di una moneta non truccata, calcolare la probabilità di avere almeno 5 teste in 6 lanci.
3. Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$, mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = \pi$, specificando altresì il significato e il valore di π.
4. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\, dt.$$
5. Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.
6. Determinare il numero delle radici dell'equazione
$$x + \arctan x - 1 = 0$$
e, applicando uno dei metodi numerici studiati, trovare di esse un valore approssimato.
7. Posto
$$\int_1^x f(t)\, dt = x^2 - 2x + 1,$$
trovare $f(x)$.
8. Trovare i massimi e minimi relativi di
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$
9. Tenuto conto che è
$$\log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx,$$
si calcoli un'approssimazione di $\log 3$ applicando una delle formule di quadratura studiate.

10. Verificare che la funzione:
$$y = \mathrm{e}^{-x} + x^{-1}$$
è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcolare
$$g'(1 + \mathrm{e}^{-1}).$$

5.5.6. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (III tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy è assegnata la curva Γ di equazione:
$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

a) Si disegni Γ e si consideri la retta r d'equazione $y = m$, $m > 0$, indicando con A il punto di intersezione di Γ con r di ascissa più piccola. Si determini m in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto A e delimitate una, dall'asse y, da Γ e da r; l'altra da Γ, da r e dalla retta $x = 1$;

b) si verifichi che il valore m trovato è il *valore medio* (o *media integrale*) di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ e se ne dia una giustificazione geometrica;

c) si trovi l'equazione della curva Γ_1 corrispondente di Γ nella rotazione di 90° in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra Γ, Γ_1 e la retta di equazione $y = 1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

Problema 2

Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto. Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $|\overline{OA}| = 1$ e $|\overline{OB}| = \sqrt{3}$, mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s:

1. l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di $\overline{A'B'}$;
2. la posizione di s per cui il triangolo BOP ha area massima.

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

Questionario

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono sei senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la sestina $(17, 27, 37, 47, 67, 87)$.

2. Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$, mostrare che esiste un valore a tale che $f(a) = \pi$, specificando altresì il significato e il valore di π.

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\, \mathrm{d}t.$$

4. Esprimere in funzione dello spigolo s l'altezza di un tetraedro regolare.

5. Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

6. Studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due rette perpendicolari fissate nel piano non superi 1.

7. Posto
$$\int_1^x f(t)\, \mathrm{d}t = x^2 - 2x + 1,$$
trovare $f(x)$.

8. Trovare i massimi e minimi relativi di
$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

9. La curva $(y+1)^3 = x^2$ passa per i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

10. Verificare che la funzione:
$$y = \mathrm{e}^{-x} + x^{-1}$$
è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcolare
$$g'(1 + \mathrm{e}^{-1}).$$

5.6. Anno scolastico 2002-2003

5.6.1. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $|\overline{\mathsf{OA}}| = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di *versiera di Agnesi* (da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, $(1718-1799)$).

Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$\overline{\mathsf{OD}}:\overline{\mathsf{DB}} = \overline{\mathsf{OA}}:\overline{\mathsf{DP}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathsf{OC}}:\overline{\mathsf{DP}} = \overline{\mathsf{DP}}:\overline{\mathsf{BC}},$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su $\overline{\mathsf{OA}}$.

Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $\mathsf{O}xy$, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici $\mathsf{O}xy$, è dato il rettangolo OABC con i vertici A e C di coordinate rispettive $(2,0)$ e $(0,1)$. Sia P un punto sul lato $\overline{\mathsf{OA}}$. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $\mathsf{C\widehat{P}B}$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici F e G dei punti del piano che vedono il lato $\overline{\mathsf{CB}}$ sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\delta/2$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra F e G.

Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema $2\,\mathrm{dm}$?
3. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.
4. Dimostrare, usando il teorema di *Rolle* [da Michel Rolle, matematico francese, $(1652-1719)$], che se l'equazione:
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$
ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$
5. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?
6. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da
$$\int_0^1 \pi x^3\,\mathrm{d}x.$$

7. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)?$$

8. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

9. Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $2\pi/3$.

10. Perché "geometria non euclidea"? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

5.6.2. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (II tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $|\overline{\mathsf{OA}}| = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di *versiera di Agnesi* (da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, $(1718 - 1799)$).

Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$\overline{\mathsf{OD}} : \overline{\mathsf{DB}} = \overline{\mathsf{OA}} : \overline{\mathsf{DP}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathsf{OC}} : \overline{\mathsf{DP}} = \overline{\mathsf{DP}} : \overline{\mathsf{BC}},$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su $\overline{\mathsf{OA}}$.

Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo OABC con i vertici A e C di coordinate rispettive $(2, 0)$ e $(0, 1)$. Sia P un punto sul lato $\overline{\mathsf{OA}}$. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $\widehat{\mathsf{CPB}}$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici F e G dei punti del piano che vedono il lato $\overline{\mathsf{CB}}$ sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\delta/2$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra F e G.

Questionario

1. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
2. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.
3. Dimostrare, usando il teorema di *Rolle* [da Michel Rolle, matematico francese, $(1652 - 1719)$], che se l'equazione:
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$
4. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da
$$\int_0^1 \pi x^3 \, dx.$$
5. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
6. Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $2\pi/3$.
7. Nell'esperimento del lancio di una moneta non truccata, calcolare la probabilità di avere almeno 6 teste in 9 lanci.
8. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

   Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?
9. Perché "geometria non euclidea"? Che cosa viene negato della geometria euclidea?
10. Esporre una strategia numerica per il calcolo approssimato di
$$\log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx.$$

5.6.3. Sessione ordinaria - Sperimentazioni autonome (III tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $|\overline{OA}| = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di *versiera di Agnesi* (da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718 — 1799)).

Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$\overline{OD} : \overline{DB} = \overline{OA} : \overline{DP} \quad \text{e} \quad \overline{OC} : \overline{DP} = \overline{DP} : \overline{BC},$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su $\overline{OA}$.

Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo OABC con i vertici A e C di coordinate rispettive $(2,0)$ e $(0,1)$. Sia P un punto sul lato $\overline{OA}$. Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $C\widehat{P}B$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.

Si descrivano i luoghi geometrici F e G dei punti del piano che vedono il lato $\overline{CB}$ sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\delta/2$.

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra F e G.

Questionario

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

   Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?
3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
4. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.
5. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?
6. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da

$$\int_0^1 \pi x^3 \, dx.$$

7. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)?$$
8. Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $2\pi/3$.
9. Perché "geometria non euclidea"? Che cosa viene negato della geometria euclidea?
10. Dimostrare, usando il teorema di *Rolle* [da Michel Rolle, matematico francese, $(1652 - 1719)$], che se l'equazione:
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$

5.6.4. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (I tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le parabole di equazione:
$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$
dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione
$$y = \frac{2}{3}.$$

Problema 2

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, $\overline{AB}$ è la base maggiore, $\overline{CD}$ la minore e $\overline{BC}$ il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.

d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.

e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

Questionario

1. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

   [Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2. Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 - 2x}}$$
   è l'insieme degli x reali tali che:

   a) $x \leq 0$ e/o $x > 2$;
   b) $x \leq 0$ e/o $x \geq 2$;
   c) $x = 0$ e/o $x > 2$;
   d) $x = 0$ e/o $x \geq 2$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esaurtiente spiegazione della scelta operata.

4. Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5. Stabilire se esistono i limiti della funzione
$$f(x) = (1+x)^{(1/x)}$$
   per
$$\text{a) } x \to +\infty \quad ; \quad \text{b) } x \to -\infty \quad ; \quad \text{c) } x \to 0.$$

6. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione:
$$f(x) = \arcsin x$$
   è la funzione
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.
8. Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:
$$10^{e^x} = e^{10^x}$$
dove e è la base dei logaritmi naturali.
9. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $-1 \le x \le 0$; inoltre $f(0) = 0$ e $-1 \le f'(x) \le 0$ in ogni x dell'intervallo $-1 < x < 0$. Stabilire in modo esauriente se è vero o falso che risulta $0 \le f(-1) \le 1$.
10. Considerata l'equazione in x:
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

5.6.5. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (II tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le parabole di equazione:
$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$
dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.
b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.
c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione
$$y = \frac{2}{3}.$$

Problema 2

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, $\overline{AB}$ è la base maggiore, $\overline{CD}$ la minore e $\overline{BC}$ il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.
b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.
c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.
d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.
e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

Questionario

1. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

   [Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2. Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Il dominio della funzione
$$f(x)=\sqrt{x^2-\sqrt{x^2-2x}}$$
   è l'insieme degli x reali tali che:

   a) $x\leq 0$ e/o $x>2$;
   b) $x\leq 0$ e/o $x\geq 2$;
   c) $x=0$ e/o $x>2$;
   d) $x=0$ e/o $x\geq 2$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esaurtiente spiegazione della scelta operata.

4. Si consideri un polinomio di grado $n\geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x=\alpha$.

5. Stabilire se esistono i limiti della funzione
$$f(x)=(1+x)^{(1/x)}$$
   per
$$\text{a) } x\to+\infty \qquad ; \qquad \text{b) } x\to-\infty \qquad ; \qquad \text{c) } x\to 0.$$

6. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva di equazione:
$$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+2.$$
   Stabilire se esiste una traslazione che la trasformi nella forma:
$$y=k\sin x.$$

7. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.
8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni:

$$x' = (a+1)x - by + a, \quad y' = (a-1)x + 2by - 1,$$

dove a, b sono parametri reali.

Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.
9. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
   a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
   b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
   c) è messa da parte senza guardarne il colore?
10. Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

5.6.6. Sessione suppletiva - Sperimentazioni autonome (III tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.
b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.
c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione

$$y = \frac{2}{3}.$$

Problema 2

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto ad un cerchio, $\overline{AB}$ è la base maggiore, $\overline{CD}$ la minore e $\overline{BC}$ il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

c) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio.

d) Trovare le coordinate dei punti in cui questa circonferenza tocca i lati del trapezio.

e) Calcolare le tangenti degli angoli interni del quadrilatero avente per vertici i suddetti punti di contatto.

Questionario

1. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

   [Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2. Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Il dominio della funzione
   $$f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 - 2x}}$$
   è l'insieme degli x reali tali che:

   a) $x \leq 0$ e/o $x > 2$;

   b) $x \leq 0$ e/o $x \geq 2$;

   c) $x = 0$ e/o $x > 2$;

   d) $x = 0$ e/o $x \geq 2$.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esaurtiente spiegazione della scelta operata.

4. Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5. Stabilire se esistono i limiti della funzione
   $$f(x) = (1+x)^{(1/x)}$$
   per
   $$\text{a) } x \to +\infty \quad ; \quad \text{b) } x \to -\infty \quad ; \quad \text{c) } x \to 0.$$

6. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$f(x) = \arcsin x$$

è la funzione

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le rette a, b di equazioni rispettivamente: $y = x + 1/7$, $y = x/7 - 1$. Calcolare il coseno dell'angolo orientato (a, b).
8. Servendosi della calcolatrice (o eventualmente di tavole logaritmiche) calcolare un valore approssimato della soluzione della seguente equazione in x:

$$10^{(e^x)} = e^{(10^x)}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

9. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $-1 \leq x \leq 0$; inoltre $f(0) = 0$ e $-1 \leq f'(x) \leq 0$ in ogni x dell'intervallo $-1 < x < 0$. Stabilire in modo esauriente se è vero o falso che risulta $0 \leq f(-1) \leq 1$.
10. Per $x \to 0$ la funzione

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}:$$

   a) ha limite 0;
   b) ha limite ∞;
   c) è una forma indeterminata del tipo $0 \times \infty$ che non si può eliminare;
   d) non ammette limite.

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5.7. Anno scolastico 2009-2010

5.7.1. Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sia λ la parabola d'equazione $f(x) = 1 + x^2$.

a) Sia F il fuoco di λ e r la sua retta direttrice. Si determinino le coordinate di F e l'equazione di r
b) Siano A e B i punti di λ di ordinata 5 e S il segmento parabolico di base $\overline{AB}$. Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di S.

c) Si determini il volume del solido generato dalla rotazione di S intorno all'asse x.

d) Si calcoli
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$$
e lo si interpreti geometricamente.

Problema 2

Nel piano $\mathsf{O}xy$ sono dati i punti $\mathsf{A}(2,0)$ e $\mathsf{B}(4,k)$, con $k \in \mathbb{R}$. Sia P il punto ottenuto dalla intersezione della retta $x = k$ con la perpendicolare per B alla retta AB.

a) Si provi che il luogo geometrico γ descritto da P al variare di k ha equazione:
$$y = \frac{x^2 - 2x + 8}{x}.$$

b) Si disegni γ.

c) Si scriva l'equazione della retta r tangente a γ nel punto di ascissa 1.

d) Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da r, da γ e dalla retta $x = 2$.

Questionario

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di
$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} + 1.$$
Per quale valore di x la retta tangente a γ in $\big(x, f(x)\big)$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli:
$$\lim_{x\to\infty} 4x \sin\frac{1}{x}.$$
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{\cos x}.$$
7. Per quale o quali valori di k la funzione
$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & \text{se } x \le 4, \\ kx^2 - 2x - 1, & \text{se } x > 4, \end{cases}$$
è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e
$$\binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n-2}, \quad \binom{n}{n-3}$$
sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $|\overline{\mathrm{AB}}| = 3$, $|\overline{\mathrm{AC}}| = 2$ e $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{C} = 45°$. Si provi altresì che se $|\overline{\mathrm{AB}}| = 3$, $|\overline{\mathrm{AC}}| = 2$ e $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{C} = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

5.7.2. Sessione suppletiva - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali $\mathrm{O}xy$ una curva γ ha per equazione
$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c}.$$

a) Si calcolino i valori delle costanti reali a, b, c, sapendo che γ ha per asintoti le rette di equazioni $y = 3$ e $x = -2$, e passa per il punto $(3, 12/5)$.

b) Si studi la funzione così ottenuta e si disegni il relativo grafico.

c) L'equazione di γ può porsi sotto la forma:
$$y = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$
Si determinino le costanti α e β.

d) Si calcoli l'area della superficie piana, finita, delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette $x = 4$ e $x = k$, essendo k l'ascissa del punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale.

Problema 2

Sia data la funzione
$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

a) Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

b) Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.

d) La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

Questionario

1. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{2\sin(2x) - \sqrt{3}}}{\log\cos x}, \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

2. Si calcoli il limite della funzione

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

quando x tende a 1^+.

3. Si provi che le due funzioni $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = -\sin^2 x$ hanno le derivate uguali e se ne dia una giustificazione.

4. Un rettangolo ABCD è tale che risulta $|\overline{AB}| = 4$ e $|\overline{BC}| = 1$. Si determini il triangolo isoscele di area minima circoscritto al rettangolo e tale che la base contenga il segmento $\overline{AB}$.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ e dall'asse delle x.

6. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

7. Considerata la funzione

$$f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x},$$

dove a è una costante positiva, si determini tale costante, sapendo che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2.$$

8. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

9. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

vale la relazione

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 0$$

e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

10. Si calcoli il valore medio della funzione
$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$
nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

5.8. Anno scolastico 2010-2011

5.8.1. Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel sistema di riferimento Oxy, sia Γ il grafico della funzione definita su $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = (1-x^2)e^{-x}.$$

a) Si verifichi che Γ taglia l'asse delle ordinate nel punto A e l'asse delle ascisse nei punti B e C. Si calcolino le coordinate di A, B e C.

b) Si studi la funzione f e si disegni Γ.

c) Si consideri la funzione g definita su $\mathbb{R}$ da
$$g(x) = (1+2x+x^2)e^{-x}.$$
Si mostri che la funzione g è una primitiva della funzione f su $\mathbb{R}$.

d) Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x sull'intervallo $[-1,2]$. Si calcoli altresì
$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^\alpha (1-x^2)e^{-x}\,dx$$
e si interpreti geometricamente il risultato.

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani Oxy, sono dati i punti: $A(2,1)$, $B(-2,1)$, $C(2,3)$, $D(2,5)$, $E(6,5)$.

a) Si verifichi che il quadrilatero convesso ABDE è un parallelogramma del quale C è il punto d'incontro delle diagonali. Si calcoli l'area del quadrilatero.

b) Si consideri il fascio di curve di equazione
$$y = \frac{x^2+2x+a}{2x-4}$$
dove a è un parametro reale. Si verifichi che, qualunque sia a, la curva corrispondente ammette il punto C come centro di simmetria e le rette AD e BE come asintoti.

c) Si determini la curva λ del fascio passante per il punto $P(0,1)$ e si verifichi che le rette AB e DE sono tangenti a λ. Si tracci il grafico di λ.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da λ, dalla retta BE, dalla retta di equazione $x = 2$ e dall'asse y.

Questionario

1. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x, da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.

2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4, 0)$.

3. Si calcoli
$$\lim_{x \to a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}.$$

4. Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: "…se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?". Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

8. In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?

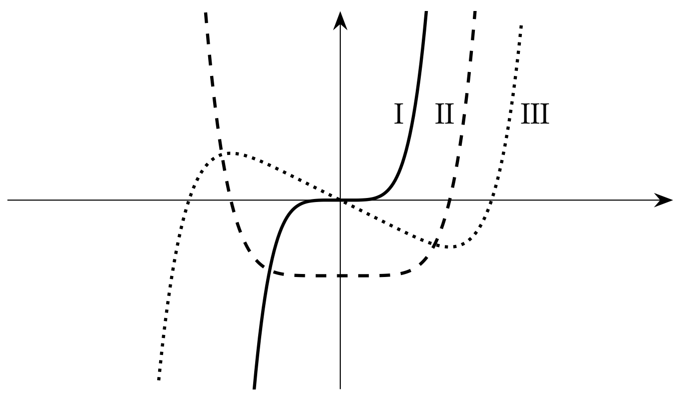
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10. Nella figura sottostante, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.

    Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

    Si motivi la risposta.



5.9. Anno scolastico 2011-2012

5.9.1. Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Siano

$$f(x)=\sqrt{\ln^2(-x)-\ln x^2+1} \quad \text{e} \quad g(x)=\sqrt{\ln^2(x)-\ln x^2+1}.$$

a) Si determinino i domini di f e di g.

b) Si disegnino, nel medesimo sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, i grafici di f e di g.

c) Si determinino, se esistono, le coordinate degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità di f e di g rispettivamente.

d) Si calcoli l'area compresa tra $g(x)$ e l'asse x per $e \le x \le 2e$.

Problema 2

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x)=\left|8x^3\right| \quad \text{e} \quad g(x)=\sin(\pi x).$$

a) Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.

b) Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x=1/2$. Qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto individuato da r e da s?

c) Si calcoli l'area della regione R racchiusa, tra G_f e G_g.

d) Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi dei solidi K e W ottenuti dalle rotazioni di R, attorno alle rette $y=0$ e $y=-1$, rispettivamente.

Questionario

1. Cosa rappresenta il seguente limite e qual è il suo valore?

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

2. Si calcoli la derivata diciassettesima di $f(x)=\cos x$.
3. Si lancino due dadi. Qual è la probabilità che uno e soltanto uno dei due numeri sia 5?
4. Si scriva l'equazione della retta normale al grafico di $y=\sin^2 x$ nel punto di ascissa $x=\pi/4$.
5. Si mostri che, nello sviluppo di $(a+b)^n$, il coefficiente del termine $a^k b^{n-k}$ è uguale a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

6. È noto che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio. Si utilizzi il risultato per calcolare $\sin(\pi/10)$.
7. È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.
8. Fra le piramidi rette a base quadrata di assegnata superficie laterale S, si determini quella di volume massimo.
9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.
10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

    a) $\cos\left(\sin(x^2+1)\right)$.
    b) $\sin\left(\cos(x^2+1)\right)$.
    c) $\sin\left(\ln(x^2+1)\right)$.
    d) $\cos\left(\ln(x^2+1)\right)$.

    Si giustifichi la risposta.

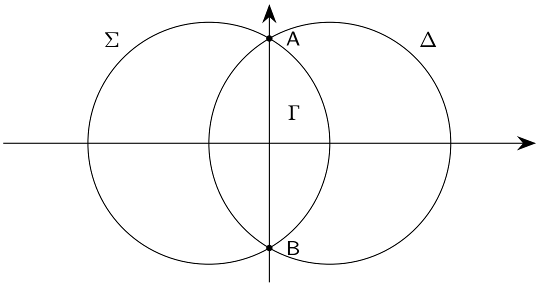
5.10. Anno scolastico 2012-2013

5.10.1. Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

I due cerchi Σ e Δ, in figura, hanno uguale raggio 4 e i rispettivi centri nei punti $(-2,0)$ e $(2,0)$. Con Γ è denotata la loro parte comune e con A e B le intersezioni delle loro circonferenze.



a) Si calcoli l'area di Γ.

b) Fra tutti i rettangoli inscritti in Γ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, si determini quello di perimetro massimo.

c) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di 180° di Γ attorno all'asse x.

d) Preso un punto P sulla circonferenza Σ, si indichi con Q l'ulteriore intersezione della retta PA con la circonferenza Δ. Si provi che il triangolo PQB è equilatero e si determini la posizione di P affinché il triangolo abbia lato massimo.

Problema 2

Sia Γ la curva d'equazione $y = 2\ln(x-1)$.

a) Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy, si disegni Γ. Si scriva l'equazione della curva che è simmetrica di Γ rispetto all'asse y e si scrivano altresì le equazioni delle curve simmetriche di Γ rispetto alle rette $x = 2$ e $y = x$.

b) Si trovi l'equazione della normale a Γ nel suo punto di ascissa $e^2 + 1$ dove e è il numero di *Nepero*.

c) Si calcoli l'area della regione R del piano delimitata da Γ, dall'asse x e dalla retta $x = e^2 + 1$.

d) La regione R ruotando attorno all'asse y genera il solido Ω. Si calcoli il volume di Ω.

Questionario

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Si calcoli, giustificando la risposta, il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}.$$

3. La retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ in $x = 1$ è $y = 3x + 2$. Quali sono i valori di $f(1)$ e di $f'(1)$? Se in $x = 2$ la retta tangente è $y = -x + 5$, quali sono i valori di $f(2)$ e $f'(2)$?

4. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

5. In un libro si legge: “Due valigie della stessa forma sembrano “quasi uguali”, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio)”. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.
6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima
7. Una ellisse ha semiasse maggiore 2 e semiasse minore 1. Qual è la distanza tra i due fuochi?
8. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al prodotto dell'ascissa x di P per la radice cubica di x. Si determini $f(x)$ sapendo che passa per il punto $A(1,1)$.
9. Si calcoli:
$$\lim_{x\to 0} 4\,\frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2}.$$
10. Sia $f(x) = \ln\big(\ln(1-x)\big)$; si calcoli la derivata $f'(x)$.

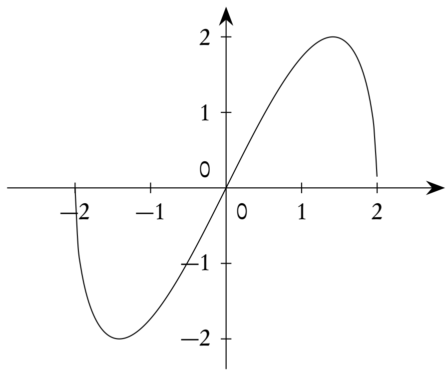
5.11. Anno scolastico 2013-2014

5.11.1. Sessione ordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Di seguito è disegnato il grafico Γ della funzione
$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}.$$



a) Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.

b) Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.

c) Si disegni la curva d'equazione
$$y^2 = x^2(4 - x^2)$$
e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

d) Si consideri il solido W che la regione delimitata da Γ e dall'asse x genera nella rotazione attorno all'asse x. Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Sia $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 12$.

a) Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola radice α tale che $1 < \alpha < 2$.

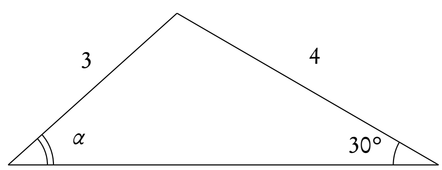
b) Si verifichi che l'espressione
$$x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$$
equivale a $f(x) = 0$. Posto $x_0 = 1,3$ si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice,
$$x_1, x_2, x_3, \ldots \quad \text{ove} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}.$$
Cosa si può osservare? Si può congetturare che x_n, al crescere di n, approssimi sempre meglio il valore di α? In che modo? Con quali considerazioni?

c) Sia R la regione del quarto quadrante compresa fra il grafico K di $f(x)$ e gli assi del sistema di coordinate Oxy. Si calcoli l'area di R.

d) Si introduca un nuovo sistema di riferimento ottenuto da Oxy traslando gli assi e portando O nel punto di flesso di K. Qual è l'equazione di K nel nuovo sistema di riferimento?

Questionario

1. Nel triangolo disegnato di seguito, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?



2. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce siano esagoni.
3. Quanti sono i numeri di 5 cifre con almeno una cifra dispari? Quanti quelli con almeno una cifra pari?
4. La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale -ne parla anche Dante nella Divina Commedia- e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

5. Si determini l'equazione della tangente alla curva
$$y = \log_{(1/2)}(x)$$
condotta dal punto $(0, 1)$.

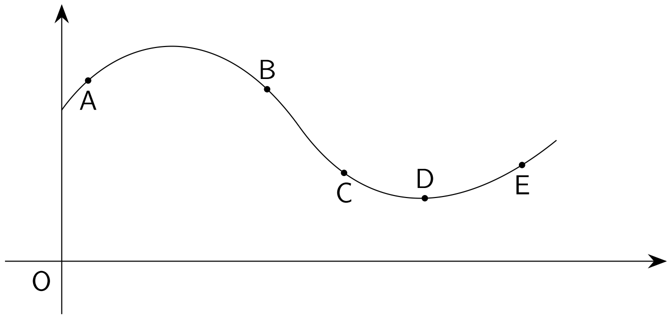
6. Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

7. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0, k]$ è 9. Si determini k.

8. Si provi che:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2014}}{2^x} = 0.$$

9. Si determini il dominio della funzione:
$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}.$$

10. Nella figura di seguito è riportato il grafico della funzione $y = f(x)$. In quale o quali dei cinque punti A, B, C, D, E la derivata prima e la derivata seconda della funzione sono entrambe negative?



5.11.2. Sessione straordinaria - Liceo della comunicazione

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da:
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

a) Si studi f e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Si scriva l'equazione della retta t tangente a γ nel punto di flesso. Detti A e B i due punti della curva (distinti dal punto di flesso), nei quali la tangente è parallela a t , si scriva l'equazione della retta AB e si determini in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto α da essa formato con t.

c) Si verifichi che per la funzione $f(x)$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ vale il teorema di Lagrange, mentre nell'intervallo $-1 \leq x \leq 4$ non vale il teorema di Rolle e se ne spieghino le ragioni.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, l'asse x e le rette di equazione $x = 3$ e $x = 4$.

Problema 2

Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x.$$

a) Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si verifichi che sono parallele.

c) Si calcoli l'area del triangolo che la prima di tali tangenti forma con l'asse x e con la retta $x = \pi/2$, e il volume del cono generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo.

d) Si calcoli l'area, nell'intervallo $[0, \pi/4]$, della regione di piano σ limitata dalla curva γ, dall'asse delle x e dalla retta $x = \pi/4$.

Questionario

1. Due osservatori A e B, posti in un campo orizzontale, alla distanza di 500 m, seguono con il cannocchiale di un teodolite, alto 1,50 m, un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune di A e B, gli angoli di elevazione sono, rispettivamente, in A di $80,33°$ e in B di $70°$. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?

2. Si calcoli il limite della funzione
$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2},$$
quando x tende a 0.

3. I cateti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ del triangolo rettangolo BAC hanno per misura rispettivamente 1 e 2. Si conduca per il vertice A una retta r non secante il triangolo e sia $\overline{B'C'}$ il segmento che si ottiene proiettando ortogonalmente su di essa l'ipotenusa $\overline{BC}$. Indicando con x la misura dell'angolo $C\widehat{A}C'$, si determini il valore di x che corrisponde al massimo dell'area del trapezio $BCC'B'$.

4. La somma dei quadrati delle due cifre che compongono un certo numero è 61. Il prodotto di questo numero per quello che si ottiene invertendo le cifre è 3640. Qual è il numero?

5. Si consideri la regione R, finita, delimitata nel primo quadrante dagli assi coordinati e dalla parabola γ d'equazione $y = 3 - x^2$. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 3$.

6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$y = \log_{\sin x}(x^2 - 5x + 6), \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

8. Il kilogrammo campione è un cilindro di platino-iridio, che ha un diametro di 39 mm ed è alto 39 mm. Qual è la densità in g/cm^3 della lega che è stata usata per costruirlo?
9. Si calcoli il valore medio della funzione:
$$y = x^2\sqrt{x^3 - 1}$$
nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.
10. Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre nell'ordine iniziale, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?

5.12. Anno scolastico 2014-2015

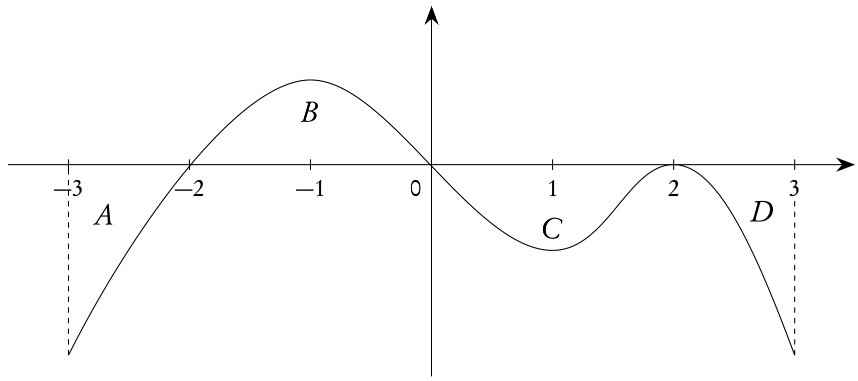
5.12.1. Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



a) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
b) Individua i valori di $g(x) \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
c) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + g(x)}{2x}.$$

d) Sia $h(x)=3f(2x+1)$, determina il valore di

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 2

Assegnate le funzioni reali $f(x)=\ln(x)$ e $g(x)=\mathrm{e}^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$:

a) stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x)=f\big(g(x)\big)$ e $b(x)=g\big(f(x)\big)$;

b) determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;

c) determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;

d) detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y=x-1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

Questionario

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y=f(x)$ sapendo che la retta $y=-2x+5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x)=-2x^2+6$.
2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

   $$V=\frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot(R^2+r^2+Rr),$$

   dove R e r sono i raggi e h l'altezza.
3. Risolvere l'equazione:

   $$5\binom{n+1}{5}=21\binom{n-1}{4}.$$

4. Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione

   $$y=\frac{1}{x^2+1}$$

   e l'asse delle x nell'intervallo $[0,3]$. Per ogni punto P di R, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $3x$. Calcolare il volume del solido.
5. Calcolare

   $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right).$$

6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

   $$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2,$$

   determinare il minimo di f.

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che
$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$
e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.
8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?
9. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ x^2 - kx + k, & \text{se } 1 < x \le 2, \end{cases}$$
determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.
10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbb{R},\ x \ge 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici A(1, 0), B(4, 0), C(4, 2) e D(1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

5.13. Anno scolastico 2015-2016

5.13.1. Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{per} \quad x \neq 0; \\ 1, & \text{per} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Prova che f è una funzione pari e che essa è derivabile in $x = 0$. Dimostra inoltre che la funzione f ha un massimo assoluto in $x = 0$.
2. Traccia, in uno stesso diagramma, i grafici indicativi delle funzioni
$$y = f(x) \quad y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{x}$$
e mostra che il grafico di f è tangente agli altri due in infiniti punti. È vero che tali punti di tangenza sono anche massimi o minimi relativi della funzione f?

3. Detta R_0 la regione piana di area finita delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dall'asse y, si indica con V_0 il volume del solido generato ruotando R_0 intorno all'asse y. Si indica inoltre con R_n la regione piana delimitata dal grafico di f e dal tratto dell'asse x compreso tra $n\pi$ e $(n+1)\pi$, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, e con V_n il volume del rispettivo solido di rotazione. Dimostra che risulta:
$$V_0 = V_n = 4\pi.$$
4. Sia definita la funzione
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Tenuto conto del fatto che
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2},$$
traccia un grafico indicativo dell'andamento della funzione F, individuandone, in particolare, le ascisse dei punti di massimo e di minimo[1].

Problema 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni punti.

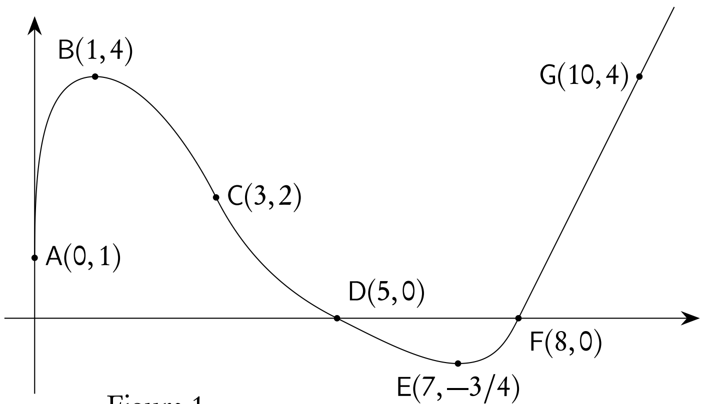


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco ABCD, dall'asse delle x e dall'asse delle y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni
$$y = f'(x),$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

[1]Nota: la primitiva della funzione f non è esprimibile tramite le usuali funzioni analitiche.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$
$$y = |f(x)|'$$
$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0, 8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1, 7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9, 10]$.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Questionario

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Stabilire se il numero reale u, tale che

$$\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\, dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

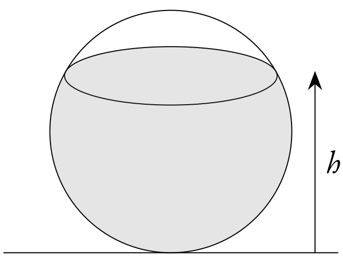
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}\, dx, \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\, dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\, dx.$$

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con} \quad a > 0,$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

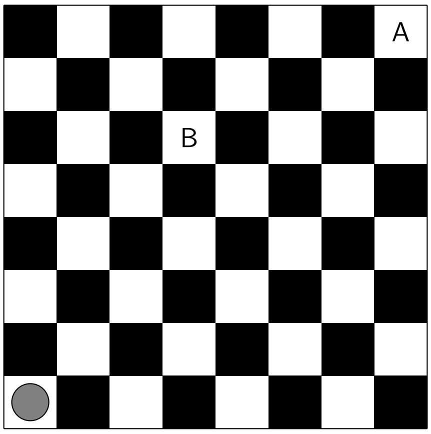
3. Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h.



Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da

$$V = \pi \cdot \left(r h^2 - \frac{h^3}{3} \right).$$

4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una sola è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?
5. Quali punti del grafico della funzione
$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$
hanno distanza minima dall'origine?
6. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:
"Esiste un polinomio $P(x)$ tale che $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$".
7. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura.



Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?
8. Calcolare il valore del limite:
$$\lim_{x \to 6} \frac{6 - \sqrt{5x + 6}}{x^2 - 8x + 12}$$
senza adoperare la regola de l'Hôpital.
9. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2\mathrm{e})$.
10. Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty[$:
$$f(x) = \int_{\mathrm{e}}^{x^2} \frac{t}{\ln t} \, \mathrm{d}t.$$
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{\mathrm{e}}$.

5.14. Anno scolastico 2016-2017

5.14.1. Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy.

1. Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5}, Γ_0, Γ_3, Γ_4, Γ_9,.
2. Stabilisci, al variare di λ in $\mathbb{R}$, se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ, qual è l'andamento della funzione g_λ, tracciandone un diagramma indicativo.
3. Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.
4. Detti A e B i punti di intersezione traΓ_9 e gli assi cartesiani, sia $\mathcal{G}$ la regione piana delimitata dai segmenti $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B. Determina l'area di $\mathcal{G}$ e il volume del solido generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$, il cui grafico, nell'intervallo $[0, 4]$, è il seguente:

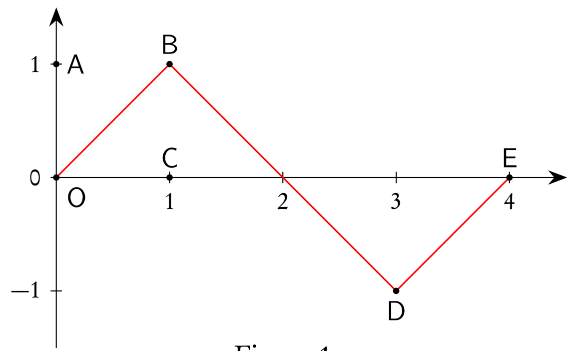


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti $\overline{OB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x};$$

   qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0,4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. Considera la funzione

$$s(x) = \sin(bx)$$

   con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano OABC in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina la probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni[2]

$$f^2(x) \quad \text{e} \quad s^2(x)$$

   discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0,3]$ e l'asse delle x.

Questionario

1. Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 x e^x\,dx,$$

   dimostrare che risulta

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e - 2E,$$

   ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x\,dx$$

   in termini di e ed E.

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

[2] Il testo ministeriale usa le notazioni $f(x)^2$ e $s(x)^2$ per i quadrati delle due funzioni, notazione abbastanza inusuale, seppure utilizzata in alcuni software.

3. Sapendo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$
determinare i valori di a e b.

4. Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0,2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:
$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3.$$
Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Quale la probabilità che il primo estratto sia 4/3?

Quale la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

5. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:
$$f(x)=\sin(x)+\cos(x)$$
nel suo punto di ascissa $x_0=\pi$.

6. Determinare il numero reale a in modo che il valore di
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^a}$$
sia un numero reale non nullo.

7. Stabilire se la funzione:
$$f(x)=\frac{x+2\sqrt{2}}{x^2-8}$$
è continua nell'intervallo $[-3,-1]$ e se, nello stesso intervallo, è dotata di minimo e massimo assoluto.

8. Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

9. Dimostrare che l'equazione:
$$\arctan(x)+x^3+e^x=0$$
ha una e una sola soluzione reale.

10. Data la funzione:
$$f(x)=|4-x^2|$$
verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3,3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3,3]$ in cui la derivata di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

5.15. Anno scolastico 2017-2018

5.15.1. Sessione ordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

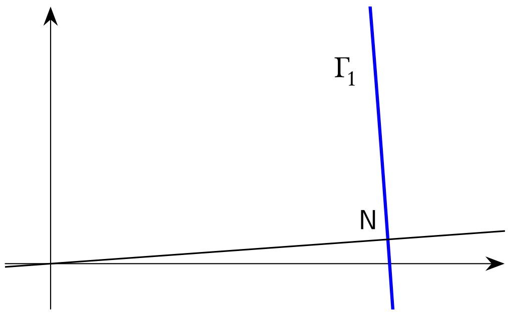
Problema 1

Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $2/3$.
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.
3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $\mathsf{P}(x_\mathsf{P}, y_\mathsf{P})$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_\mathsf{P} > f_1(x)$ per tale punto P).
4. Nella figura è evidenziato un punto $\mathsf{N} \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Problema 2

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rispettivamente le funzioni *parte intera* e *parte frazionaria* (o *mantissa*) di un numero $x \in \mathbb{R}$. Tali funzioni sono così definite:

$$f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\} \quad \text{e} \quad g(x) = x - f(x).$$

Pertanto, ad esempio, $f(\pi) = 3$, $g(4.79) = 0.79$.

1. A partire dalle definizioni delle funzioni f e g, mostra che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq g(x) < 1$. Disegna i grafici delle funzioni f e g determinando esplicitamente i loro punti di discontinuità e, eventualmente, i relativi salti.
2. Dopo aver verificato che la funzione g è periodica di periodo 1, calcola la media di g nell'intervallo $[0, n]$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Calcola inoltre la media di g nell'intervallo $[0, n + 1/2]$, e determina il limite a cui tale media tende per $n \to \infty$.
3. Calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $\pi/6$ radianti intorno all'asse x della regione di piano delimitata dai grafici di f e g nell'intervallo $[1/2, 3/2]$
4. Stabilisci per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ edfinita dalla legge

   $$h(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$$

   verifica le seguenti condizioni[3]

   $$\min g)\min h \quad , \quad \sup g = \max h \quad , \quad 2h'' + 2h - 1 = 0.$$

   Quante sono le funzioni siffatte?

Questionario

1. Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.
2. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?
3. Determinare i valori di k tali che la retta $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.
4. Considerata la funzione

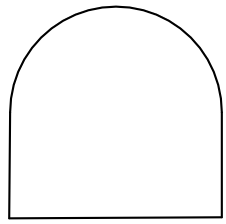
   $$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x},$$

   determinare, se esistono, i valori di

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

   giustificando adeguatamente le risposte fornite.
5. Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la vente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

[3] $\min g$ = minimo della funzione g, $\sup g$ = estremo superiore della funzione g, $\max h$ = massimo della funzione h.



Determinare le dimensioni del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

6. Determinare a in modo che
$$\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,\mathrm{d}x$$
sia uguale a 10.

7. In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

8. Determinare quali sono i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la funzione
$$y(x) = 2\mathrm{e}^{kx+2}$$
è soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' - 2y' - 3y = 0\,.$$

9. Trovare l'area R della regione di spazio[(4)] racchiusa dalla curva
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{per} \quad 4 \le x \le 9.$$
Sapendo inoltre che la retta di equazione $x = k$ divide R in due figure di egual area, determinare il valore di k.

10. Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k, la funzione
$$y = k\,\mathrm{e}^{-x}\sin(x+\varphi)$$
è soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo[(5)] di coordinate $(0,1)$.

[4] La formulazione è leggermente ambigua, in quanto la curva data non racchiude una regione di *spazio* (forse era meglio dire di *piano*!) di area finita. Tuttavia tutti avranno interpretato nel modo standard di regione racchiusa tra la curva e l'asse x, nell'intervallo indicato. Ad essere pignoli al massimo, dal testo si evince che R non è l'area della regione, ma la regione stessa, che viene divisa come successivamente indicato in due parti.

[5] Formulazione leggermente imprecisa: di solito si intende con *punto di massimo* l'ascissa di un punto dove la funzione raggiunge un massimo.

5.15.2. Sessione suppletiva - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Sia dato un sistema di assi cartesiani Oxy in cui l'unità corrisponde a 1 metro. Una particella puntiforme si muove lungo l'asse delle ascisse, nel verso positivo, partendo dall'origine, con una velocità di 2 metri al secondo. Quando la particella si trova in un generico punto $x = a$, costruisci un triangolo prendendo le tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a.

1. Determina l'area del triangolo in funzione di a; quanto vale l'area del triangolo dopo 5 secondi?
2. Dopo quanti secondi il triangolo diventa equilatero?
3. Esprimi in funzione di a l'angolo ϑ formato dalle due tangenti alla curva di equazione $y = ax - x^2$ nei punti di ascissa 0 e a; utilizzando l'espressione di ϑ in funzione di a, verifica la correttezza della risposta che hai fornito al punto precedente.
4. Quando la particella si trova nel generico punto $x = a$, determina l'area della superficie limitata superiormente dalle due rette tangenti e inferiormente dalla curva di equazione $y = ax - x^2$.

Problema 2

Fissato un numero reale $k > 0$, si definiscono le funzioni:

$$f_k(x) = k \cdot \ln(x) \quad \text{e} \quad g_k(x) = e^{x/k}$$

i cui grafici sono indicati, rispettivamente, con F_k e G_k.

1. Verifica che, qualunque sia $k > 0$, l due funzioni f_k e g_k sono tra loro inverse; definite inoltre le funzioni
$$a(x) = f_k\big(g_k(x)\big) \quad \text{e} \quad b(x) = g_k\big(f_k(x)\big),$$
stabilisce se si verifica
$$a(x) = b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
2. Indicata con r la retta di equazione $y = x$, determina l'equazione della retta s_2, parallela a r e tangente al grafico F_2 della funzione $f_2(x) = 2\ln(x)$. Determina inoltre l'equazione della retta t_2, parallela a r e tangente al grafico G_2 della funzione $g_2(x) = e^{x/2}$.

   Rappresenta i grafici F_2 e G_2 assieme alle rette s_2 e t_2 e stabilisci qual è la distanza minima tra un punto di F_2 e un punto di G_2.
3. Verifica che l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ possiede due soluzioni sapendo che, qualunque sia $k > 0$, gli eventuali punti d'intersezione tra il grafico F_k e il grafico G_k coincidono con i punti di intersezione tra uno qualsiasi di tali grafici e la retta di equazione y=x. Stabilisci inoltre per quali valori $k > 0$ i grafici F_k e G_k sono secanti, per quali valori sono disgiunti e per quale valore essi sono tangenti.
4. Sia A la regione limitata compresa tra i grafici F_e e G_e e gli assi cartesiani. Determina l'area di A ed il volume del solido generato ruotando A attorno a uno degli assi cartesiani.

Questionario

1. Considerati nel piano cartesiano i punti $A(0,0)$ e $B(\pi,0)$, sia R la regione piana delimitata dal segmento $\overline{AB}$ e dall'arco di curva avente equazione $y = 4\sin(x)$, con$0 \le x \le \pi$. Calcolare il massimo perimetro che può avere un rettangolo inscritto in R avente un lato contenuto nel segmento $\overline{AB}$.
2. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
nell'intervallo $[p,2p]$ e, detto Γ il suo grafico, sia t la retta tangente a Γ nel suo punto di ascissa p. Determinare, al variare di p, le aree delle due parti in cui la retta t divide la regione finita di piano compresa fra Γ e l'asse delle ascisse.
3. Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1,-1,2)$ tangente al piano di equazione $x-y+z=10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.
4. Verificare che
$$\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(x)\,dx \quad \text{per} \quad n>1$$
e usare questo risultato per calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx.$$
5. Si lancia n volte un dado regolare a sei facce. Qual è il più piccolo valore di n tale che la probabilità che non esca mai il numero 3 sia minore dello 0.01%?
6. Data la funzione $y = x\,|ax^2+b| - 3$, determinare il valore dei coefficienti a e b per i quali il grafico della funzione è tangente nel punto di ascissa $x=1$ alla retta di equazione $y = 7x - 9$.
7. Date le curve γ_1 e γ_2 di equazioni rispettivamente $y = x^2+1$ e $y = x^2-8x+9$, sia t la retta che è tangente a entrambe. Stabilire l'area della regione piana di area finita che è delimitata da γ_1, γ_2 e t.
8. Una variabile casuale, a valori nell'intervallo $[0,10]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data dalla funzione
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x^2, & \text{se } 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{1}{10}, & \text{se } 1 < x \le 10. \end{cases}$$
Stabilire il valore medio e il valore mediano di questa variabile casuale.
9. Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x,y,z)$ equidistanti dai punti $A(0,1,2)$ e $B(-3,2,0)$.
10. Verificare che la funzione
$$y = e^{-x}\sin x$$
è soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

5.15.3. Sessione straordinaria - Liceo della Comunicazione opzione sportiva

I problemi e quesiti proposti in questa traccia sono stati proposti anche nelle sezioni di liceo scientifico internazionale, delle varie opzioni linguistiche.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Due archi illimitati di due parabole (con assi paralleli all'asse y di un sistema di riferimento), ciascuno dei quali contenente il vertice della parabola, sono disposti in modo da passare per tutti e quattro i quadranti del piano e raccordarsi nell'origine, formando il grafico Γ di una funzione:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{se } x<0,\\ f_2(x), & \text{se } x\geq 0,\end{cases}$$

che è derivabile in $\mathbb{R}$. La figura 1 sottostante ne fornisce un possibile esempio.

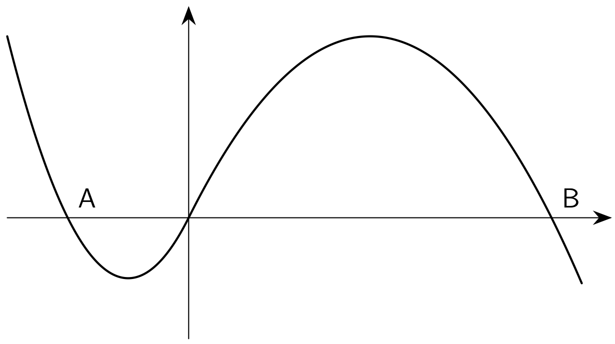


Figura 1

Il grafico Γ interseca l'asse x nell'origine O e nei due punti A di ascissa $x_A<0$ e B di ascissa $x_B>0$.

1. Dimostra che, se la funzione soddisfa le richieste precedenti, si ha:

$$f_1(x)=ax^2+bx,$$
$$f_2(x)=cx^2+bx,$$

dove a, b, c sono opportuni coefficienti reali non nulli. Dimostra che le rette tangenti a Γ in A e in B sono parallele.

2. Considerando le funzioni

$$g(x)=f'(x),$$
$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

mostra, con le opportune argomentazioni, che il grafico di g è costituito da due semirette che intersecano l'asse x nei punti di ascisse $x_A/2$ e $x_B/2$ e che il grafico di F ha due punti stazionari di ascisse x_A e x_B e due punti di flesso di ascisse $x_A/2$ e $x_B/2$.

3. Determina le espressioni di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ in modo tale che la retta tangente a Γ nel punto A abbia equazione $y = -2x - 8$ e l'area della superficie limitata compresa tra Γ e l'asse x contenuta nel semipiano $x > 0$ sia pari a 9 volte quella dell'analoga superficie contenuta nel semipiano $x < 0$.
4. Dimostra che anche il rapporto tra le aree dei triangoli formati dalle rette tangenti al grafico Γ nei punti A, O e B e l'asse delle ascisse è pari a 9.

Problema 2

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x) = \ln\left(a \cdot e^{bx} + c\right)$$

al variare di a, b, c parametri reali positivi.

1. Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per$x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina a, b, c, in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.
3. Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$h(x) = f(-|x|)$$

e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2.$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S.$$

Questionario

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $k/2$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.
2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2, 2, 2)$ tangente al piano di equazione

$$x + 2y + z = 12.$$

3. Considerando la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita come:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{4}+2x, & \text{per } x<4,\\ e^{4-x}+3, & \text{per } x\geq 4,\end{cases}$$

determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=x\cdot\sin(x)$, adoperando la definizione di derivata.

5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

le rette $y=2$, $x=5$ e l'asse y.

6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:

$$f(x)=x\cdot e^{-x}$$

nel suo punto di flesso.

7. La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{per } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ \dfrac{7}{12}, & \text{per } x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right],\\ \dfrac{1}{2}, & \text{per } x\in\left[\dfrac{3}{2},2\right];\end{cases}$$

determinare la media e la mediana della variabile casuale x.

8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $(1,1,1)$ al piano di equazione $2x-y-z=0$, a distanza 6 da tale piano.

9. Considerando la funzione

$$f(x)=\frac{ax+1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a. Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3[6].

[6] L'area richiesta risulta maggiore di 3 se $a<-2-\sqrt{6}\vee a>-2+\sqrt{6}$, quindi non esiste un minimo con la condizione richiesta. Tale minimo è invece $-2-\sqrt{6}$ se si richiede che l'area sia uguale a 3.

10. Dimostrare[7] che la derivata della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot \mathrm{e}^{ax}.$$

[7] La richiesta è sibillina: a differenza del quesito 4, non si richiede di usare la definizione di derivata, per cui la risposta a questo quesito può essere estremamente banale, usando la regola di derivazione delle funzioni composte.

6. Maturità Italiana all'estero

In questo capitolo proponiamo una raccolta, non esaustiva, dei temi assegnati nelle sessioni d'esame per le scuole italiane all'estero. Ci sono numerosi corsi di Liceo scientifico nelle scuole italiane all'estero: a causa delle differenze nelle date di svolgimento delle prove, le tracce sono diverse per i diversi raggruppamenti. I raggruppamenti più significativi sono:

— le scuole che seguono il Calendario Boreale del primo gruppo (generalmente indicate come scuole in Europa);
— le scuole che seguono il Calendario Boreale del secondo gruppo (generalmente indicate come scuole nelle Americhe);
— le scuole che seguono il calendario australe (generalmente indicate come scuole in America Latina);
— per alcuni anni le scuole del Cile che, pur seguendo il calendario australe, hanno avuto date di svolgimento delle prove diverse dalle altre scuole dell'America Latina.

Non sempre siamo riusciti a reperire informazioni esatte sul raggruppamento destinatario delle tracce che proponiamo: in questi casi abbiamo preferito la dicitura generica di "Scuole all'estero".

6.1. Anno scolastico 1972-1973

6.1.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un riferimento cartesiano ortogonale sono date le due circonferenze C_1 e C_2 di centri $(12,0)$, $(12,6\sqrt{3})$ e raggi 6 e 12 rispettivamente.

   a) Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte per l'origine degli assi, calcolando le coordinate dei punti di contatto.
   b) Si trovi l'ampiezza dell'angolo compreso fra le due suddette tangenti alla circonferenza C_1.
   c) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla C_1 e dalle sue due tangenti per l'origine.

2. Si rappresenti graficamente la funzione

   $$y = \frac{1}{x} + 5x + 6$$

   e se ne determini il centro di simmetria. Data poi la retta di equazione $y = m - x$ si trovino le ascisse dei punti comuni con il grafico di tale funzione, discutendo.

3. Detto m un numero reale qualunque, si risolva e si discuta geometricamente il sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ mx^2+2y=2m \end{cases}.$$
Nei due casi $m=1$, $m=2$ si calcoli la lunghezza della corda che ha per estremi i punti soluzioni del sistema.
4. Si studi la variazione della funzione
$$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$$
nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$.

6.2. Anno scolastico 1973-1974

6.2.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Un solido S è formato da un cilindro circolare con sovrapposta una semisfera avente per cerchio diametrale una delle basi del cilindro. Nota l'area a della superficie totale del solido S, determinare il raggio di base e l'altezza del cilindro in modo che S abbia volume massimo.
2. Determinare la funzione $f(x)$ essendo noto che
$$f'(x)=\frac{2}{(x-1)^3} \quad \text{e che} \quad f(4)=\frac{8}{9}.$$
Studiare la funzione ottenuta e disegnarne il grafico C. Discutere il numero dei punti comuni alla C e alla retta di equazione $y=kx$, determinando i valori di k per i quali la retta è tangente alla C. Calcolare l'area della porzione di piano delimitata da queste tangenti e dalla C.
3. La funzione
$$y=\frac{1}{\left(2^{1/x}-1\right)^2}$$
non è definita per $x=0$ che è per essa un punto di discontinuità. Precisare il tipo di questa discontinuità dopo aver esaminato i limiti sinistro e destro della funzione per x tendente a zero.
4. È in facoltà del candidato di riferire brevemente sui vari tipi di discontinuità di una funzione $y=f(x)$.

6.3. Anno scolastico 1976-1977

6.3.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Su di una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ si fissi un punto P e sia P' la sua proiezione ortogonale su $\overline{AB}$. Si unisca P con A e con B e si faccia compiere alla figura una rotazione completa attorno alla retta AB.

   Si determini la posizione del punto P in modo che risulti massima la somma del doppio del volume del solido generato dal triangolo PAP' con il triplo di quello generato dal triangolo PBP' nella rotazione attorno al diametro $\overline{AB}$.

2. Si scriva l'equazione di una circonferenza tangente in O all'asse delle y di un sistema cartesiano Oxy e passante per $A(2,4)$. Si determini l'equazione della parabola con l'asse parallelo all'asse delle y avente in A la stessa tangente della circonferenza e vertice di ascissa $x=5$.

   Considerata poi la retta
   $$y = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$
   essa interseca la circonferenza in B e B'. Si determini l'area della superficie limitata dall'arco di circonferenza $\overset{\frown}{BB'}$, le parallele in B e B' all'asse y e l'arco di parabola compreso tra tali rette.

3. Una funzione del tipo
   $$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$
   ha due punti di intersezione con l'asse x coincidenti nel punto di ascissa $x = n$ e la terza intersezione nel punto di ascissa $x = 2n$.

   Si determini il valore di n in modo che il punto di flesso della curva abbia ascissa $x = 4$.

   Si disegni poi nello stesso sistema di coordinate cartesiane ortogonali la funzione derivata prima della funzione data.

   Si determini l'area della parte di piano compresa fra le due curve, la retta $x = 0$ e quello fra i punti di intersezione delle due curve di ascissa minore.

4. Si faccia un esempio di applicazione alla Fisica del concetto di integrale definito.

6.3.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
   $$y = x - \frac{1}{x^3}$$
   e se ne disegni il grafico.

   Fra tutte le rette passanti per l'origine si determini quella su cui la curva intercetta il segmento di lunghezza minima.

2. Dato un cubo di spigolo a, si determini la piramide retta a base quadrata nella quale il cubo risulta inscritto, con una faccia sulla base della piramide, in modo che il volume della piramide sia minimo.

3. Nel piano cartesiano $\mathsf{O}xy$ si rappresenti la funzione:

$$y = a \sin x + b \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

dopo aver determinato a e b in modo che la curva abbia un flesso nel punto di ascissa $x = \pi/3$ e, nel punto di ascissa $x = \pi/6$, abbia la retta tangente formante un angolo di $\pi/6$ con l'asse x. Detti A e B i punti di intersezione della curva con l'asse x, si traccino le rette tangenti alla curva in A e B e si determini l'area della parte di piano limitata da tali rette e dall'arco AB della curva.

4. Si dimostri uno dei teoremi relativi alla determinazione dei massimi e minimi di una funzione.

6.3.3. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione

$$y = \frac{x-1}{x^3}$$

e se ne disegni il grafico.

Si determini su di essa il punto P di ascissa $a > 0$ per il quale l'area del triangolo APQ, essendo A il punto di intersezione della curva con l'asse delle ascisse e Q la proiezione di P sullo stesso asse, assuma valore massimo e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta AP

2. Una circonferenza di centro O e raggio r è tangente internamente ad una circonferenza di centro O' e raggio $3r$.

Si determini, sulla retta OO' e ad una distanza da O minore di r, il punto H tale che, condotta per esso la perpendicolare alla retta OO', risulti massima la somma delle corde ottenute sulle due circonferenze, e si dimostri che in questo caso particolare i tre segmenti staccati sulla stessa perpendicolare dalle due circonferenze risultano uguali.

3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione

$$y = x^2 - x + 1.$$

Condotta per il punto $\mathsf{A}(0, 1)$ la retta tangente alla parabola, si determini su di essa il punto B tale che l'ulteriore tangente alla parabola condotta per il punto B sia perpendicolare alla prima. Nella regione finita di piano delimitata dalla parabola e dalle due rette si inscriva il rettangolo di area massima avente i lati paralleli agli assi coordinati.

4. Si dimostri il teorema relativo alla determinazione dei massimi e minimi di una funzione.

6.3.4. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$$
e se ne disegni il grafico.

   Nella regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo, con la base su quest'asse, avente area massima e si determini il valore del parametro a per il quale tale rettangolo risulta anche quadrato.
2. Sul lato $|\overline{\mathsf{AB}}| = a$ del triangolo equilatero ABC si prenda il punto M tale che, condotte per esso la perpendicolare e la parallela al lato $\overline{\mathsf{BC}}$ ed indicate con P e Q le intersezioni di queste rette con i lati $\overline{\mathsf{BC}}$ e $\overline{\mathsf{CA}}$ del triangolo, risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero MPCQ in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{\mathsf{AB}}$.
3. Con riferimento ad un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle due parabole passanti per i punti $\mathsf{O}(0,0)$ ed $\mathsf{A}(2,2)$ ed aventi come tangenti nell'origine rispettivamente le rette rappresentate dalle equazioni $x + y = 0$ e $3x - y = 0$. Si calcoli l'area della regione finita di piano da esse limitata e si determini il quadrilatero in essa inscritto avente le diagonali, parallele agli assi coordinati, di lunghezza massima.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione $y = \cos x$.

6.4. Anno scolastico 1977-1978

6.4.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un trapezio un lato obliquo $\overline{\mathsf{AD}}$ e la base minore $\overline{\mathsf{DC}}$ hanno uguale misura $a\sqrt{2}$ e l'angolo fra essi compreso è di 135°; l'altro lato obliquo $\overline{\mathsf{CB}}$ misura $2a/\sqrt{3}$. Si consideri sulla base minore un punto P e si conducano da esso le perpendicolari PQ e PS ai prolungamenti dei due lati obliqui.

   Si studi la funzione
$$y = |\overline{\mathsf{PQ}}|^2 + |\overline{\mathsf{PS}}|^2$$
e se ne disegni il grafico limitatamente all'intervallo in corrispondenza del quale il problema ammette soluzioni.

   Si calcoli inoltre l'area della regione di piano limitata da tale arco e dalla corda che lo sottende.
2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione
$$y = 3x - x^2.$$

Si scriva l'equazione della parabola passante per i punti in cui la prima interseca l'asse delle ascisse ed avente il vertice nel punto

$$V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9a}{4}\right) \quad \text{con } a > 0.$$

Nella regione finita di piano limitata dalle due curve si determini il rettangolo di area massima e si trovi per quale valore del valore del parametro a tale rettangolo diventa quadrato.

3. Si studi la funzione

$$y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$$

e se ne disegni il grafico.

Si determinino le intersezioni della curva con la circonferenza avente equazione $x^2 + y^2 = 1$ e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve e posta nel primo quadrante del sistema cartesiano di riferimento.

4. Si enunci e si dimostri il teorema di unicità del limite di una funzione in un punto.

6.4.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data una circonferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ e condotta una corda $\overline{CD}$ perpendicolare al diametro in un punto H, si congiungano gli estremi di questa con A e con B. Dette S_1 ed S_2 le aree dei due triangoli ottenuti si studi la funzione

$$y = S_1^2 - S_2^2$$

e se ne disegni il grafico limitatamente all'intervallo in corrispondenza del quale il problema ammette soluzioni. Si calcoli inoltre l'area della regione finita del piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse.

2. In un sistema di assi cartesiani si consideri la parabola passante per i punti $O(0,0)$ ed $A(3,6)$ ed avente in quest'ultimo punto come tangente la retta di equazione $y = 9 - x$. Nella regione finita di piano limitata dalla parabola e dalla retta OA si conduca una parallela alla stessa retta OA, che incontra la curva nei punti B e C, in modo che il trapezio OABC abbia area massima.

3. Si studi la funzione

$$y = \frac{x}{3} - \frac{1}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

Fra le rette passanti per l'origine si determinino quelle sulle quali la curva intercetta segmenti di lunghezza minima su ciascuno dei due rami.

4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione $y = \tan x$.

6.4.3. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Sul lato $\overline{\mathsf{AC}}$ di un triangolo ABC, la cui base $\overline{\mathsf{BC}}$ misura a e la cui altezza $\overline{\mathsf{AH}}$ relativa ad essa misura h, si prenda il punto E. Per E si tracci la parallela a $\overline{\mathsf{BC}}$ che incontra $\overline{\mathsf{AB}}$ in D. Congiunto E con B, si determini la posizione di E per cui il solido ottenuto facendo ruotare il triangolo BED di una rotazione completa attorno alla retta BC abbia volume massimo.
2. Si studi la funzione
$$y = \frac{1}{6}x^4 - x^2 + 1$$
e se ne disegni il grafico.
Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalle tangenti inflessionali.
3. Si studi la funzione
$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$
e se ne disegni il grafico.
Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data e dalla curva di equazione $y = \sin x$, nell'intervallo determinato da due successivi punti di intersezione.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione $y = \tan x$.

6.4.4. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Su una circonferenza di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2r$ si determini il punto P tale che, detta Q la sua proiezione ortogonale su $\overline{\mathsf{AB}}$, la somma del volume del solido generato dal triangolo APQ nella rotazione completa attorno alla retta AB con il doppio di quello generato dal triangolo BPQ nella stessa rotazione abbia valore massimo.
2. Si studi la funzione
$$y = \frac{4}{x^2} - x$$
e se ne disegni il grafico.
Se A è il punto di estremo relativo, B l'ulteriore intersezione della curva con la retta tangente in A e C il punto d'incontro della curva con l'asse delle ascisse, si calcoli l'area del quadrilatero mistilineo OABC, essendo O l'origine delle coordinate.
3. Si studi la funzione
$$y = x - \cos x$$
e si determini il valore dell'area delimitata dalla curva e dalla retta di equazione $y = x$ nell'intervallo di estremi $\pi/2$ e $3\pi/2$.
4. Si enunci e si dimostri il teorema di unicità del limite di una funzione in un punto.

6.5. Anno scolastico 1978-1979

6.5.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Una cubica del tipo
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
passa per l'origine delle coordinate, ha il flesso nel punto $\mathsf{P}(1,1)$ e la tangente in esso è parallela all'asse delle ascisse. Si determini il valore dei coefficienti e si disegni la curva. Congiunta l'origine delle coordinate con il punto P, si calcoli l'area della parte di piano compresa tra le curva e tale segmento. In tale regione si tracci la retta parallela all'asse delle ordinate che determina la corda massima.
2. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si considerino le rette r ed s, di equazioni $y = x$ ed $y = -x$ rispettivamente, e i punti $\mathsf{A}(1,1)$, $\mathsf{B}(-1,1)$. Si scriva l'equazione della circonferenza tangente in A e B alle rette date. Si scriva poi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per A e B ed avente come tangenti in A e B le perpendicolari alle rette r ed s rispettivamente.

   Si calcoli l'area di una delle parti piano comprese fra circonferenza e parabola.
3. In un trapezio ABCD il lato obliquo $\overline{\mathsf{AB}}$ e la base minore $\overline{\mathsf{BC}}$ hanno uguale misura a e gli angoli adiacenti alla base maggiore $\overline{\mathsf{AD}}$ sono: $\mathsf{B\widehat{A}D} = 60°$ e $\mathsf{C\widehat{D}A} = 45°$. Sulla base maggiore $\overline{\mathsf{AD}}$ si determini il punto M tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai due lati obliqui sia minima.
4. Si dimostri il teorema di derivazione della funzione $y = \sin x$.

6.5.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Dato il fascio di parabole
$$y = -x^2 + kx,$$
si determini il valore di k per il quale l'area del segmento parabolico determinato dalla retta $y = x$ misura $4/3$.

   Si tracci internamente a tale segmento la retta parallela all'asse delle ordinate che determina in esso la corda massima.
2. Si disegni il grafico della funzione
$$y = \frac{x - x^2}{1 - 2x}.$$
Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ determina sulla curva la corda di lunghezza minima.

3. In una circonferenza di raggio r si tracci la corda $\overline{AB}$ uguale al lato del triangolo equilatero inscritto. Nel minore dei segmenti di cerchio determinati da tale corda, si inscriva un rettangolo tale che sia massimo il volume generato in una rotazione completa attorno al diametro perpendicolare alla corda stessa.
4. Si dimostri il teorema di derivazione della funzione

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

6.5.3. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali si rappresenti la parabola avente equazione

   $$y = -x^2 + 4x$$

   e si consideri la retta di equazione $y = mx$, la quale interseca in A ulteriormente la parabola. Sia P il punto medio di $\overline{OA}$. Si determinino le coordinate di P in funzione di m e, eliminato m fra le due espressioni delle coordinate di P, si ricavi l'equazione del luogo di P al variare di m.

   Si determini per quale valore positivo di m la corda $\overline{PA}$ ha valore massimo. Si calcoli inoltre l'area della parte di piano compresa tra la parabola data e la curva ottenuta, appartenente al primo quadrante.
2. La circonferenza di equazione

   $$x^2 + y^2 - 5x - 10y = 0$$

   incontra l'asse x in A e l'asse y in B, oltre che nell'origine. Si prenda sul segmento $\overline{AB}$ un punto P e sia P′ la sua proiezione ortogonale sull'asse x. Si studi come varia il volume V del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo OPP′, si rappresenti graficamente la funzione $V(x)$ e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla curva e dall'asse delle ascisse.
3. Data la curva di equazione

   $$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

   si determini il valore dei coefficienti sapendo che la curva passa per il punto dell'asse x di ascissa 2, che la tangente nell'origine delle coordinate ha coefficiente angolare 8 e che l'area della regione di piano compresa fra la curva e l'asse x nell'intervallo $[0, 2]$ ha valore 4. Si disegni il grafico della funzione.
4. Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

Sessione ordinaria - Buenos Aires - Prova annullata per irregolarità formali

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In una circonferenza di centro O e raggio r si conduca una corda $\overline{\mathsf{MN}}$ parallela al diametro $\overline{\mathsf{AB}}$ in modo che il solido generato dal quadrilatero OMNB in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{\mathsf{AB}}$ abbia volume massimo.
2. Si studi la funzione
$$y = x + \frac{1}{x^3}$$
e se ne disegni il grafico.
Fra tutte le rette passanti per l'origine delle coordinate si determini quella su cui la curva intercetta il segmento di lunghezza minima.
3. Dato il quadrato inscritto nella circonferenza di equazione
$$x^2 + y^2 = 2$$
ed avente i lati paralleli agli assi x, y, si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^2 + bx + c$$
in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due vertici di ordinata positiva e divida il cerchio in due parti delle quali quella che contiene il centro è cinque volte l'altra.
4. Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

6.5.4. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$
e se ne disegni il grafico.
Si consideri la retta di equazione $y = k^2$ e, detti A, B, C, D, i punti di intersezione di essa con la curva, nell'ordine delle ascisse crescenti, si determini k^2 in modo che si abbia $|\overline{\mathsf{AB}}| = |\overline{\mathsf{BC}}| = |\overline{\mathsf{CD}}|$.
Si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano limitate da questa retta e dalla curva.
2. Si rappresenti la funzione
$$y = \frac{x^2 + 4}{-x}$$
e se ne determinino il massimo e il minimo relativo e gli asintoti. Si trovino i punti della curva che hanno minima distanza dall'origine delle coordinate.

3. Sopra l'arco $\widehat{AB}$ quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio r, si determini il punto P′ tale che, detto C il punto medio di $\overline{\mathsf{OA}}$, sia massima l'area del quadrilatero OBPC.
4. Si dimostri per via elementare che il prodotto di due grandezze positive aventi somma costante è massimo quando esse sono uguali.

6.6. Anno scolastico 1979-1980

6.6.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$y = \frac{\cos 2x - 1}{\cos x}$$
nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$ e se ne disegni il grafico.
2. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
in modo che la curva che la rappresenta sia simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e sia tangente all'asse delle ascisse nel punto A(1,0). Detta B l'intersezione della curva con l'asse delle ordinate, si trovi la parallela all'asse delle ascisse, che incontra la curva in un punto P dell'arco AB, tale che l'area del rettangolo avente come lati le distanze di P dagli assi coordinati sia massima.

   Si conducano le tangenti alla curva nei punti di flesso: si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da tali rette e dalla curva.
3. Dato un segmento $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2a$, si conduca per il punto medio M la retta tale che, proiettato su di essa ortogonalmente il punto A in P, la somma $|\overline{\mathsf{AP}}| + |\overline{\mathsf{PB}}|$ assuma il valore massimo. Si costruisca geometricamente la figura in tale caso.
4. Si enunci e si dimostri il teorema di unicità del limite di una funzione in un punto.

6.6.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Internamente ad un triangolo rettangolo isoscele di cateto $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2a$, si conduca per il vertice B la retta tale che, detta P la sua intersezione con il cateto $\overline{\mathsf{AC}}$, Q la proiezione di P sull'ipotenusa $\overline{\mathsf{BC}}$ ed R la proiezione di Q sul cateto $\overline{\mathsf{AB}}$, il trapezio APQR abbia area massima.
2. Si studi la funzione
$$y = a - \frac{a}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

Si determini il valore di a per cui la circonferenza avente il centro nel punto $O(0,a)$ e passante per i punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse sia tangente alla curva stessa.

3. Dato il quadrato inscritto nella circonferenza di equazione
$$x^2+y^2=1$$
ed avente i lati paralleli agli assi coordinati, si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y=ax^2+bx+c \quad (\text{con } c>0)$$
in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due vertici A e B di ordinata positiva e delimiti con il minore dei due archi AB una regione finita di piano di area $\pi/4$.

4. Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

6.6.3. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Su un piano α sono appoggiati una sfera di raggio r ed un cono avente raggio di base ed altezza rispettivamente uguali al raggio e al diametro della sfera. Si conduca un piano β, parallelo al piano α, che tagli i due solidi in modo che la somma delle aree delle due sezioni risulti massima.

   Si ritrovino le condizioni precedenti studiando la funzione $k=f(x)$ ottenuta considerando che la somma delle aree suddette risulti uguale a $k\pi$.

2. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$
in maniera che la curva che la rappresenta passi per il punto $A(-1,0)$, abbia il flesso nel punto $B(1,1)$ e per tangente inflessionale la retta di equazione $4y=3x+1$.

   Se ne disegni il grafico.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla curva, dall'asse delle ascisse e dalla tangente inflessionale.

3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione
$$y=\frac{x^2}{2}-x+2$$
e si conducano, nei punti di intersezione con la retta di equazioni $y=2$, le rette tangenti.

   Nella regione finita di piano limitata da queste rette e dalla curva, si inscriva il triangolo isoscele, con la base parallela all'asse delle ascisse, la cui area abbia valore massimo.

4. Si espongano brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y=f(x)$.

6.6.4. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Dato un quadrante circolare AOB di centro O e raggio unitario, si fissi sul raggio $\overline{OA}$ il punto C tale che $|\overline{OC}| = 1/n$, si conduca per C la perpendicolare ad $\overline{OA}$ e si indichi con D il punto d'intersezione con l'arco $\widehat{AB}$. Si determini sull'arco $\widehat{AD}$ il punto P tale che risulti massima l'area del quadrilatero ACDP.
2. Si studi la funzione
$$y = \frac{1}{x^2} - 1$$
e se ne disegni il grafico.

   Detti A e B i punti di intersezione della curva con l'asse delle ascisse e condotte in esse le rette tangenti alla curva che intersecano ulteriormente la curva stessa in C e in D rispettivamente, si calcoli l'area del quadrilatero mistilineo ABCD.
3. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il triangolo equilatero avente un vertice nell'origine ed il lato opposto sulla retta di equazione $y = 1$. Si scriva l'equazione della parabola passante per i tre vertici.

   Detti A e B i due vertici diversi dall'origine si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^2 + bx + c$$
in modo che la parabola che la rappresenta passi per A e B e delimiti con la prima una regione finita di piano di area $\sqrt{3}/3$.
4. Si dimostri per via elementare che se due grandezze positive hanno somma costante, il prodotto è massimo quando sono uguali.

6.6.5. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si sezionino un triangolo equilatero di lato 1 e la circonferenza ad esso circoscritta con una retta parallela ad un lato del triangolo in modo che sia massima la differenza tra il quadrato della corda intercettata dalla circonferenza e il quadrato del segmento intercettato dal triangolo.
2. Si considerino la parabola di equazione
$$y = x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$
e la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni.

   Determinate le coordinate dei punti di contatto, si scriva l'equazione della circonferenza passante per questi e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle tre curve.

3. Si studi la funzione
$$y = 3x^4 - 6x^3$$
e se ne disegni il grafico.

   Determinati punti di flesso, si scriva l'equazione della tangente alla curva nel punto di flesso F di ascissa positiva.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, l'asse delle x e la tangente condotta per il punto F.

4. Si dimostri uno dei teoremi relativi alla determinazione dei massimi e minimi di una funzione.

6.6.6. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Ad un cilindro equilatero, avente raggio di base unitario, si circoscriva il cono, con la base complanare a quella del cilindro, il cui volume è minimo.
2. Data la parabola di equazione
$$y = ax^2 + 2x$$
si determini a in modo che l'area del segmento parabolico delimitato dalla retta $y = x$ e giacente sul semipiano delle ordinate positive sia 1/6.

   In tale segmento si trovi la parallela all'asse delle ascisse di lunghezza massima.

3. Si rappresenti la funzione
$$y = x\sqrt{1 - x^2}.$$
Condotte le tangenti alla curva nell'origine e nel punto di ascissa $x = 0,8$ si calcoli l'area del triangolo delimitato dalle suddette tangenti e dall'asse x e, facoltativamente, quella della regione di piano compresa tra la curva e l'asse delle ascisse.

4. Si faccia un esempio di applicazione alla fisica del concetto di integrale definito.

6.7. Anno scolastico 1980-1981

6.7.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si inscriva in un tetraedro regolare il prisma triangolare retto a basi parallele, con una base sul piano di base del tetraedro, il cui volume abbia valore massimo.

2. Una funzione del tipo
$$y = ax^4 + bx^2 + c$$
interseca gli assi coordinati nei punti $(1,0)$ e $(0,4)$ ed ha un estremo relativo nel punto di ascissa $\sqrt{5/2}$.

   Si scriva l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti $(2,0)$, $(0,4)$, $(-1,0)$ e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve e giacente nel semipiano delle ordinate positive.
3. Si studi come varia il rapporto tra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo ed il raggio del cerchio inscritto al variare degli angoli del triangolo.
4. Si porti un esempio di un problema sui massimi e minimi risolto per via elementare e se ne giudichi il procedimento.

6.7.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Data l'ellisse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
si consideri un punto P sulla semiellisse di ordinate positive. Detti C il punto $(k,0)$ (con $0 < k < a$) ed H la proiezione di P sull'asse delle ascisse, si studi come varia il volume del solido generato dal triangolo HPC in una rotazione completa attorno allo stesso asse delle ascisse e si determini il valore di k per cui i punti H e C, in corrispondenza ad uno dei due valori estremi del volume, siano simmetrici rispetto all'origine delle coordinate.
2. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
in modo che la curva da essa rappresentata passi per l'origine O delle coordinate, abbia un estremo relativo nel punto $M(1,2)$ e formi con l'asse delle ascisse e con le due rette di equazione $x = 0$, $x = 2$ una regione di area $10/3$.

   Si scriva l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per M ed avente il vertice nell'altro estremo relativo N della curva e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dagli archi MN delle curve.
3. Si studi la funzione
$$y = \tan x + \sin x$$
e se ne disegni il grafico.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione
$$y = x^{m/n}.$$

6.7.3. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Dato il triangolo isoscele ABC di base $|\overline{AC}| = 2b$ e lati $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = 2a$, si prenda sul lato $\overline{AB}$ il punto P tale che, condotte le parallele PM e PN rispettivamente alla base e al lato $\overline{BC}$, risulti minimo il segmento $\overline{MN}$.
2. Si determinino i coefficienti dell'equazione

   $$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   in modo che la curva da essa rappresentata passi per l'origine O delle coordinate, abbia un minimo relativo nel punto A(4, 0) e la sua tangente in O abbia il coefficiente angolare 16.

   Si scriva l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice in A e passante per il punto P di ordinata massima relativa della curva.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.
3. Si studi la funzione

   $$y = \frac{1+\cos x}{\sin x} - \sqrt{3}$$

   e se ne disegni il grafico.
4. Si espongano brevemente gli elementi della teoria per la determinazione degli asintoti di una curva rappresentata dall'equazione $y = f(x)$.

6.7.4. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione

   $$y = x + a + \frac{b}{x^2}$$

   sapendo che ha un minimo relativo nel punto (2, 0) e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni di essa con la curva di equazione

   $$y = \frac{2}{x^2}$$

   e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.
2. Sul lato $|\overline{AB}| = a$ del triangolo equilatero ABC si prenda il punto M tale che, condotta per esso la parallela MQ allo stesso lato, risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero MPCQ in una rotazione completa attorno alla retta BC.

3. In un sistema cartesiano ortogonale di riferimento si rappresenti il grafico della funzione

$$y = \sqrt{3}\sin x + \sin^2 x$$

dopo averne determinato massimi, minimi e flessi nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

4. Si dimostri la regola per il calcolo della derivata del prodotto di due funzioni.

6.7.5. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

in modo che la curva da essa rappresentata tocchi l'asse delle ascisse nel punto $S(1, 0)$, incontri lo stesso asse nel punto $B(-2, 0)$ e delimiti con il segmento $\overline{AB}$ una regione di area $27/4$.

2. Data l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{2a^2} = 1$$

si determini sulla semiellisse di ordinate positive il punto P tale che, detti H la sua proiezione sull'asse delle ascisse ed A il punto $(a, 0)$, risulti massimo il volume del solido generato dal triangolo HPA in una rotazione completa attorno allo stesso asse delle ascisse; si calcoli inoltre il volume del solido ottenuto.

3. Si studi la funzione

$$y = \sqrt{3}\cos x - \cos^2 x$$

e se ne disegni il grafico.

4. Si dimostri la regola per il calcolo della derivata del prodotto di due funzioni.

6.7.6. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = x + a + \frac{b}{x^2}$$

sapendo che la curva da essa rappresentata tocca l'asse delle ascisse nel punto $A(1, 0)$. Se C è l'ulteriore punto di intersezione della curva con l'asse delle ascisse, si conduca per C la retta di coefficiente angolare $m = 1/4$ e si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da questa retta e dalla curva

2. Su lato $|\overline{AB}| = a$ del triangolo equilatero ABC si prenda il punto P tale che, condotte per esso le parallele PQ e PR rispettivamente ai lati $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero PQCR in una rotazione completa attorno alla retta BC.
3. Si studi la funzione
$$y = \cot x + \cos x$$
e se ne disegni il grafico.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione
$$y = x^{m/n} \quad (m, n, \text{ numeri naturali}).$$

6.8. Anno scolastico 1981-1982

6.8.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Su una semicirconferenza di diametro $|\overline{AB}| = 2r$ si determini il punto P tale che, detta Q la sua proiezione su $\overline{AB}$, risulti massimo il volume del solido generato dal triangolo APQ in una rotazione completa attorno alla retta AB e si calcoli il valore del raggio r per cui tale volume risulti $4\pi/3$.
2. Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta all'esagono regolare avente due vertici consecutivi in $A(0,0)$, $B(2,0)$, giacente nel semipiano delle ordinate positive. Si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalla circonferenza e dalla parabola passante per i punti dati e per il centro dell'esagono.
3. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
in modo che la curva da essa rappresentata abbia un estremo relativo nel punto di ascissa 1 e sia bitangente alla retta $y = 2x$ nell'origine e nel punto di ascissa $3/2$. Se ne disegni il grafico.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla curva e da detta bitangente.
4. Si dimostri la regola della derivata del prodotto di due funzioni.

6.8.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si consideri il triangolo isoscele ABC avente base $|\overline{AB}| = a$ e lato $|\overline{BC}| = ma$. Sul lato $\overline{BC}$ si prenda il punto P tale che, condotte per esso le parallele PQ e PR rispettivamente alla base e all'altro lato, risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero PQAR in una rotazione completa attorno alla retta della base.

Si calcoli m in modo che tale volume massimo risulti $2\pi a^3/27$ e si disegni per questo valore di m il triangolo dato.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le due circonferenze passanti per l'origine ed aventi i centri rispettivamente nei punti $\mathsf{A}(3,0)$, $\mathsf{B}(0,1)$.

   Si calcoli l'area della regione di piano comune alle due circonferenze.

3. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$$

   in modo che la curva da essa rappresentata passi per i punti $\mathsf{A}(-1,0)$, $\mathsf{B}(1,2)$ e sia tangente in C all'asse delle ascisse. Se ne disegni il grafico. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta BC.

4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione

$$y = x^{m/n} \quad (m, n, \text{ numeri naturali}).$$

6.8.3. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si consideri il triangolo equilatero ABC di lato a. Si prenda sul lato $\overline{\mathsf{AB}}$ il punto P tale che, condotta per esso la perpendicolare PQ al lato $\overline{\mathsf{AC}}$ e dette P', Q' le proiezioni dei punti P, Q sul lato $\overline{\mathsf{BC}}$, risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero $\mathsf{PQQ'P'}$ in una rotazione completa attorno alla retta BC.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle due circonferenze aventi i centri sugli assi e passanti per i punti $(0,0)$ e $(3,\sqrt{3})$.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano comune alle due circonferenze.

3. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = a - x + \frac{b}{x^2}$$

   in modo che la curva da essa rappresentata sia tangente all'asse delle ascisse nel punto $\mathsf{A}(1,0)$. Se ne disegni il grafico.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla retta AB, essendo B il punto della curva di ascissa $1/2$.

4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione

$$y = x^{m/n} \quad (m, n, \text{ numeri naturali}).$$

6.8.4. Sessione suppletiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Su una circonferenza di centro O e raggio r si determinino i punti diametralmente opposti P, Q tali che, dette P′, Q′ le loro proiezioni su un diametro $\overline{AB}$, risulti massimo il volume del solido generato dai triangoli OPP′, OQQ′ in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{AB}$ e si determini il rapporto fra tale volume e quello della sfera generata nella stessa rotazione dal semicerchio di diametro $\overline{AB}$.
2. Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo equilatero avente due vertici nei punti $A(0,0)$, $B(2,0)$ e giacente nel quadrante delle coordinate positive. Si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalla circonferenza e dalla parabola passante per i punti dati e per il centro della stessa circonferenza.
3. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
in modo che la curva da essa rappresentata passi per l'origine delle coordinate, sia tangente alla retta $y = 3$ nel punto di ascissa 2 ed incontri questa retta ulteriormente nei punti di ascissa −1 e 3. Se ne disegni il grafico.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dalla bisettrice del primo quadrante.
4. Applicando la definizione di derivata se ne determini il valore per la funzione
$$y = \cos 2x.$$

6.9. Anno scolastico 1982-1983

6.9.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali è data la parabola di equazione
$$y = 3x - x^2.$$
Nel segmento parabolico delimitato dall'asse delle ascisse si inscriva il triangolo equilatero avente un lato parallelo allo stesso asse delle ascisse e il vertice opposto su tale asse.

   Si calcolino le aree delle regioni limitate nel segmento parabolico dai lati del triangolo.

2. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^4 + bx^2 + c$$
in modo che la curva da essa rappresentata abbia un estremo relativo nel punto $(\sqrt{3}, -1)$ e passi per il punto $(1,3)$. Si disegni il grafico della funzione.

   Si scriva l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice nel punto $(0,4)$ e che sia tangente alla curva.
3. Fra i trapezi isosceli circoscritti ad un cerchio di raggio r si determini quello che, in una rotazione di mezzo giro attorno al diametro perpendicolare alle basi, genera il solido di volume minimo.
4. Applicando la definizione, si determini la derivata della funzione $y = \sin 2x$.

6.9.2. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, I gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri il quadrato di lato unitario avente il centro nell'origine degli assi ed i lati paralleli alle bisettrici dei quadranti. Fra tutte le parabole passanti per due dei suoi vertici opposti si determinino le due parabole che dividono il quadrato in tre parti equivalenti.
2. Si studi la funzione
$$y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$$
e se ne disegni il grafico. Si verifichi che i tre flessi della curva sono allineati e si scriva l'equazione della retta congiungente.
3. In una sfera di raggio r si inscriva il solido formato dal cilindro e dai due coni sovrapposti alle basi avente volume massimo.
4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione
$$y = x^{m/n} \quad (m, n, \text{ numeri naturali}).$$

6.9.3. Sessione ordinaria - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
in modo che la curva da essa rappresentata abbia un flesso nel punto $\mathsf{A}(0,1)$, passi per il punto $\mathsf{B}(1,0)$ e le due tangenti ad essa in A e B s'incontrino nel punto $\mathsf{C}(2/3,1)$. Se ne disegni il grafico.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla curva e dalle due tangenti.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri, nella regione di piano delle ordinate non negative, il quadrato ABCD avente vertici $A(0,0)$, $B(1,0)$.

   Si scriva l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrato.

   Fra le parabole passanti per A, B e fra quelle passanti per C, D, si determinino le parabole che si intersecano negli estremi del diametro della circonferenza parallelo all'asse delle ascisse.

3. In una circonferenza di centro O e raggio r si conduca la corda $\overline{CD}$ parallela al diametro $\overline{AB}$ tale che il quadrilatero (non intrecciato) CDEF, essendo E, F i punti medi dei segmenti $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ rispettivamente, generi, in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{AB}$, un solido di volume massimo.

4. Si dimostri la regola di derivazione della funzione

$$y = x^{m/n} \quad (m, n, \text{ numeri naturali}).$$

6.9.4. Sessione suppletiva - Scuole all'estero, II gruppo

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = \frac{ax^2 + b}{x^2 + c}$$

   in modo che la curva da essa rappresentata abbia un estremo relativo in un punto di ordinata 2 ed un flesso nel punto $(1,1)$. Se ne disegni il grafico.

   Si scriva l'equazione della circonferenza tangente alla curva nei punti di flesso.

2. In un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle parabole (con assi paralleli all'asse delle ordinate) aventi in comune i punti $A(0,3)$ e $B(4,4)$ ed i vertici sulla retta di equazione $y = 2x$.

   Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve.

3. Sul lato $|\overline{BC}| = a$ del triangolo equilatero ABC si prenda il punto M tale che, condotte per esso le perpendicolari MP e MQ rispettivamente ai lati $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, risulti massimo il volume del solido generato dal quadrilatero APMQ in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{BC}$.

4. Applicando la definizione si determini la derivata della funzione $y = \sin 2x$.

6.9.5. Sessione ordinaria - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si studi la funzione
$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$$
e se ne disegni il grafico. Si verifichi che i tre flessi della curva rappresentativa sono allineati e si scriva l'equazione della retta che li congiunge.
2. Sul lato $|\overline{\mathsf{BC}}| = a$ del triangolo equilatero ABC si prenda il punto M tale che, condotte per esso le parallele MP e MQ rispettivamente ai lati $\overline{\mathsf{CA}}$, $\overline{\mathsf{AB}}$, risulti massima la superficie del solido generato in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{\mathsf{BC}}$.
3. Applicando le definizione di derivata, si determini la derivata di
$$y = \sin^2 x.$$

6.9.6. Sessione suppeltiva - Buenos Aires

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene piu adeguate alla sua preparazione. Tempo concesso: 5 ore.

1. Si determinino i coefficienti dell'equazione
$$y = \frac{ax^2 + b}{x^2 + c}$$
in maniera che la curva da essa rappresentata passi per i punti $(1,1)$, $(0,3)$, $3,-3)$. Se ne disegni il grafico.

   Si scriva l'equazione della circonferenza tangente alla curva nei punti di flesso.
2. Un triangolo equilatero ABC, avente $|\overline{\mathsf{AB}}| = 3$, è diviso da una parabola passante per i vertici A, B in due parti equivalenti.

   In un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali si determinino le coordinate dei vertici del triangolo e si scriva l'equazione della parabola.
3. Detto *clessidra* il solido costituito da due coni circolari retti opposti al vertice, si determini la clessidra di volume massimo inscritta in una sfera di raggio r.
4. Si dimostri il teorema di Torricelli
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{dove} \quad F'(x) = f(x).$$

6.10. Anno scolastico 1992-1993

6.10.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato svolga due dei seguenti quesiti. Tempo concesso: 5 ore.

1. Studiare la funzione
$$y = \frac{\cos x}{2+\sin x}.$$
Supposto che y rappresenti il valore numerico espresso in ampère dell'intensità di una corrente che percorre un filo e x il tempo in secondi, calcolare la quantità di carica che attraversa una sezione del filo tra gli istanti
$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$
espressi in secondi.

[L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $2+\sin x = z$].

2. Dall'estremo A del diametro $\overline{AB}$ di una circonferenza di raggio unitario tracciare le due corde $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tali che $B\widehat{A}C = x$, $B\widehat{A}D = x/2$.

   Siano poi H il piede della perpendicolare tracciata da C su $\overline{AB}$ e K il piede della perpendicolare tracciata da D su $\overline{AB}$. Determinare in funzione di x l'area y del rettangolo di lati uguali a $\overline{CH}$ e $\overline{DK}$. Rappresentare in tutto il suo campo di esistenza la funzione così trovata. Per quale valore di x il rettangolo ha area massima?

3. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, trovare la parabola passante per $A(1,0)$ e tangente in $B(3,0)$ alla retta di equazione $y = -2x+6$.

   Trovare la circonferenza passante per A, B e per il vertice della precedente parabola. Calcolare il rapporto tra le lunghezze delle corde che parabola e circonferenza staccano su una retta $y = k$ parallela all'asse delle x. Calcolare il valore a cui tende il precedente rapporto quando la retta si avvicina alla tangente comune alle due curve.

   Determinare, in funzione di k, l'area y del rettangolo avente lati della stessa lunghezza delle due corde. Rappresentare la funzione così trovata, quindi determinare per quale valore di k l'area y è massima.

6.11. Anno scolastico 1993-1994

6.11.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione
$$y = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2+1}$$
dove a è un parametro reale non nullo.

   a) Si dimostri che ognuna di esse ammette un punto di massimo e un punto di minimo.

   b) Tra quelle assegnate si determini la curva k, il cui punto di massimo ha ascissa minore dell'ascissa del punto di minimo e in cui la distanza di questi due punti è $2\sqrt{2}$. Si disegni l'andamento di k, controllando, in particolare, che la curva presenta tre flessi.

c) Si verifichi che tali flessi sono allineati e che quello intermedio è centro di simmetria per k.

2. Su una circonferenza C' di raggio 1 si prenda un punto A e si tracci per esso una generica retta r, la quale sechi ulteriormente C' in M. Si conduca per il centro C della circonferenza la retta s parallela ad $\overline{\mathsf{AM}}$ e per il punto M la retta t parallela ad $\overline{\mathsf{AC}}$. Si chiami P il punto comune alle rette s, t.

   Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, si trovi il luogo geometrico del punto P al variare di r nel fascio di rette di centro A. Constatato che tale luogo è costituito da una retta e da una circonferenza C'', si verifichi che il cerchio delimitato da C' e quello delimitato da C'' hanno una parte comune. Se ne calcoli l'area.

3. Si consideri una piramide triangolare regolare di base ABC e vertice V. Lo spigolo di base e l'altezza della piramide sono lunghi rispettivamente a e $a/2$. Per il punto P della mediana $\overline{\mathsf{AM}}$ del triangolo di base si conduca il piano parallelo alla faccia VBC: in questo modo si ottiene un prisma. Si determini la posizione di P per la quale tale prisma ha volume massimo. Si calcoli quindi il valore di a per cui detto volume massimo è $4,5\,\mathrm{cm}^3$.

6.12. Anno scolastico 1994-1995

6.12.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. L'area laterale e l'apotema di una piramide quadrangolare regolare misurano rispettivamente
$$\frac{32}{3}\,\mathrm{dm}^2 \quad \text{e} \quad \frac{4}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{dm}.$$
   a) Un piano α, contenente uno degli spigoli di base, seca la piramide secondo un poligono; far vedere che l'area y di questo poligono, espressa in funzione dell'angolo x che il piano α forma col piano di base della piramide, è data dalla seguente formula:
$$y=\frac{16\cos x}{(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2},$$
   con x soggetto a specifiche delimitazioni.

   b) Prescindendo dalla questione geometrica, studiare la precedente funzione $y=y(x)$ nell'intervallo $[0,2\pi]$ e disegnarne un andamento approssimato, formulando in particolare qualche ipotesi sull'esistenza o meno di punti di flesso.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva k di equazione:
$$y=x\sqrt{x}-1.$$
   a) Disegnare l'andamento di k.

   b) Indicati con A, B i punti in cui k seca l'asse x e l'asse y rispettivamente, determinare l'equazione della parabola passante per B e avente l'asse parallelo all'asse y e il vertice in A.

c) Dopo aver dimostrato analiticamente che la curva k e la parabola p non hanno altri punti comuni all'infuori di A e B, calcolare il volume del solido che la regione piana delimitata da k e da p genera in una rotazione completa attorno all'asse x.

3. È dato un trapezio rettangolo circoscritto a una circonferenza.

   a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che il punto di intersezione delle sue diagonali appartiene al diametro della circonferenza perpendicolare alla basi del trapezio.

   b) Sapendo che il trapezio ha perimetro:
   $$4a(2+\sqrt{3}),$$
   dove a è una lunghezza nota, e che il punto in cui si secano le sue diagonali ha distanza dalle basi uguali ad
   $$a(3-\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad 3a(\sqrt{3}-1),$$
   calcolare le lunghezze delle basi del trapezio.

   c) Indicato infine con A il vertice dell'angolo acuto del trapezio e con B, C i punti in cui le tangenti condotte per A alla circonferenza la toccano, calcolare l'area del triangolo mistilineo delimitato dai segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e dal minore degli archi $\widehat{BC}$ della circonferenza.

6.13. Anno scolastico 1996-1997

6.13.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano sono assegnate una circonferenza k di diametro $\overline{AB}$, lungo 2, e una parabola p passante per A e avente per asse di simmetria il diametro perpendicolare ad $\overline{AB}$. Si sa che la parabola divide il cerchio delimitato da k in due parti, la maggiore delle quali è 5 volte la minore.

   Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani:

   a) determinare l'equazione di k;

   b) determinare l'equazione di p;

   c) stabilire com'è situato rispetto alla circonferenza il punto in cui si secano le rette tangenti alla parabola nei punti che essa ha in comune con la circonferenza.

2. Tra le curve di equazione
   $$y=\frac{ax+b}{x^2},$$
   assegnate in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, determinare quella che ha un flesso nel punto di coordinate $(3,-2/9)$ e disegnarne l'andamento.

   Sull'arco di curva situato nel I quadrante determinare il punto T tale che la retta tangente alla curva in T determini con gli assi di riferimento un triangolo di area $8/3$.

   Calcolare, infine, le aree delle due parti in cui la retta OT divide il triangolo suddetto.

3. Considerata una sfera di diametro $\overline{AB}$, lungo 2, per un punto P di tale diametro si conduca il piano α perpendicolare a esso e, posta uguale a x la lunghezza di $\overline{AP}$:

   a) si calcoli in funzione di x la differenza $d(x)$ fra il volume del cono avente altezza $\overline{AP}$ e base il cerchio sezione di α con la sfera, e il volume del segmento sferico avente la medesima base e altezza $\overline{PB}$;

   b) si studi la funzione $d(x)$ e se ne disegni il grafico;

   c) si utilizzi questo grafico per calcolare i valori di x per i quali $d(x) = k$, dove k è un parametro reale assegnato;

   d) si trovi, in particolare, la posizione di P per cui $d(x)$ è massima.

   Si ricorda che il volume di un segmento sferico a una base, di raggio di base r e altezza h è:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2).$$

6.14. Anno scolastico 1997-1998

6.14.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazioni:

$$x^2 + y^2 - ay = 0, \quad y = x^2 + bx + a.$$

   a) Determinare i coefficienti a, b in modo che esse si sechino nel punto $A(2,1)$.

   b) Disegnare la circonferenza c e la parabola p corrispondenti ai valori di a, b così trovati, dopo aver dimostrato che le due coniche si secano oltre che in A in un solo altro punto B.

   c) Fra le rette tangenti alla circonferenza e parallele alla retta AB indicare con t quella che seca la parabola p e trovarne l'equazione.

   d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla retta t.

2. In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve C' e C'' di equazioni rispettivamente

$$y = x^3, \quad y = \sqrt{3}x.$$

   a) Studiarle e disegnarne il loro andamento, dimostrando in particolare che si intersecano in tre punti allineati.

   b) Calcolare le aree delle regioni piane delimitate dalle due curve.

   c) Determinare le equazioni delle rette tangenti alle due curve, parallele alla retta dei loro punti comuni e le coordinate dei punti di contatto di tali rette con le curve medesime.

d) Scelta a piacimento una di tali tangenti, determinare le coordinate degli ulteriori punti che essa ha in comune con le curve C' e C''.

3. In un trapezio ABCD la base maggiore $\overline{AB}$ è lunga 3 cm e gli angoli di vertici A e B misurano rispettivamente 120° e 30°.

   a) Stabilire se esiste un trapezio siffatto con area massima.

   b) Sapendo che il trapezio descritto è circoscrivibile a un cerchio, calcolare le misure dei suoi lati obliqui.

   c) Sulla base maggiore del trapezio considerato in b) determinare un punto P in modo che la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del trapezio abbia valore massimo.

6.15. Anno scolastico 1998-1999

6.15.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. In un piano α è assegnata una parabola avente il fuoco e il vertice nei punti rispettivamente F e V tali che $|\overline{VF}| = 1/2$. Riferito il piano α ad un conveniente sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy:

   a) Determinare l'equazione della parabola.

   b) Condotta per F una retta di coefficiente angolare m, indicati con A e B i punti in cui tale retta seca la parabola e condotte quindi le rette tangenti alla parabola stessa in questi punti, esprimere in funzione di m le coordinate del punto P in cui si secano tali tangenti.

   c) Verificare che il punto P appartiene alla direttrice della parabola.

   d) Chiamate A′, B′, P′ le posizioni dei punti A, B, P corrispondenti al particolare valore $m = 1/2$, trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti A′, B′, P′.

   e) Calcolare la aree delle regioni in cui la parabola divide il cerchio delimitato dalla circonferenza trovata.

2. a) Studiare la funzione
$$y = \frac{1}{\cos x} - \cos x,$$
con $-\pi \leq x \leq \pi$, e disegnarne l'andamento.

   b) Dopo aver dimostrato che
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{dove} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$
esprimere in funzione di t l'espressione
$$\frac{1}{\cos x} - \cos x.$$

c) Studiare la funzione di t così trovata e disegnarne l'andamento.

d) A completamento del problema dimostrare che: condizione sufficiente ma non necessaria affinché una funzione $f(x)$, derivabile almeno due volte in un punto A, abbia ivi un minimo relativo è che risulti

$$f'(a) = 0 \quad \text{e} \quad f''(a) > 0.$$

3. a) Fornire la definizione di piramide retta.

b) Tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, determinare quella che ha il volume massimo.

c) Tale piramide ha anche la massima area laterale?

d) Posto che la piramide triangolare retta considerata abbia altezza h, perimetro di base

$$\frac{3}{2}h\sqrt{3}$$

e volume massimo, calcolare tale volume e l'area laterale della piramide.

6.16. Anno scolastico 1999-2000

6.16.1. Sessione ordinaria - Scuole all'estero

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva. Tempo concesso: 5 ore.

1. È dato il rettangolo ABCD, i cui lati $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ sono lunghi rispettivamente $2a$ ed a, essendo a una lunghezza assegnata. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette BE e DC.

   a) Spiegare, con considerazioni di geometria sintetica, perché il quadrilatero ABFD non è circoscrittibile ad un cerchio.

   b) Spiegare, ancora con considerazioni di geometria sintetica, perché il pentagono ABCED è inscrittibile in una circonferenza γ.

   c) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema monometrico di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza γ e le coordinate del punto E.

   d) Calcolare infine l'area delle regioni in cui la corda $\overline{BE}$ divide il cerchio delimitato da γ.

2. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy sono assegnati i punti $A(-1,0)$ e $B(0,-1)$.

   a) Trovare l'equazione della parabola p' avente l'asse parallelo all'asse y, il vertice nel punto A e passante per B.

   b) Trovare l'equazione della parabola p'' simmetrica di p' rispetto alla retta di equazione $y = x$

   c) Determinare le coordinate dei punti comuni alle due parabole.

d) Le rette tangenti alle due parabole nei punti A e B individuano un quadrilatero; calcolarne l'area.

e) Calcolare infine le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due parabole.

3. Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva γ di equazione
$$y = \frac{2x}{x^3+1}.$$

 a) Studiarla e disegnarne l'andamento dopo aver trovato, fra l'altro, il suo punto di flesso e il suo asintoto verticale r.

 b) Trovare l'equazione della retta tangente a γ in O.

 c) Stabilire quante sono le circonferenze tangenti a γ in O e tangenti alla retta r e trovare le loro equazioni.

 d) A completamento del problema dimostrare la formula che esprime la derivata, rispetto a x, di
$$\frac{f(x)}{g(x)},$$
 essendo $f(x)$ e $g(x)$ funzioni reali di variabile reale.

6.17. Anno scolastico 2000-2001

6.17.1. Sessione ordinaria - Europa

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e quattro domande scelte all'interno del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

É assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura a.

a) Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complementari).

b) Si determini il valore di a per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è $31{,}4\,\text{dm}^3$.

c) Si determini il volume dell sfera S circoscritta a C.

Problema 2

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento ortogonale monometrico è data la curva Γ di equazione:
$$y = 2x - \frac{x^3}{2}.$$

a) Si studi e si rappresenti Γ;

b) considerata la retta r di coefficiente angolare m passante per il punto $A(2,0)$, si determini, al variare di m, il numero delle intersezioni di r con Γ;

c) si calcoli l'area della regione finita di piano R, del primo quadrante, delimitata da Γ e dall'asse delle x;

d) si determini il volume del solido generato da R in un giro completo intorno all'asse x.

Questionario

1. Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e applicarlo per dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{2^x}=0.$$

2. Mostrare, eventualmente anche con esempi, che la derivata del prodotto di due o più funzioni **non è** il prodotto delle derivate.
3. Dimostrare che se un polinomio $p(x)$ è divisibile per $(x-a)^m$ allora il polinomio $p'(x)$ è divisibile per $(x-a)^{m-1}$.
4. Calcolare la derivata della funzione

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x.$$

Dal risultato quali conseguenze se ne possono trarre per la $f(x)$? É una costante?

5. Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi presi a k a k.
6. Verificare che:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} x\log x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{4}\left(3\mathrm{e}^2-1\right).$$

7. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:

$$\log_a b\times\log_b a=1.$$

8. La somma di due numeri non negativi è 16. Qual è il valore più basso che assume la somma dei loro quadrati? Qual è il valore più alto ?

6.17.2. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la parabola p di equazione:

$$y=\frac{1}{2}x^2-x+1.$$

1. Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola nel suo punto C di ascissa 0 e la retta s perpendicolare alla retta t e tangente alla p medesima.

2. Dopo aver controllato che la retta s e la parabola si toccano nel punto $A(2,1)$, trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto A e tangenti alla retta t.
3. Indicata con k la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con p, oltre ad A, e detto B il punto in cui questa circonferenza tocca la retta t, calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento $\overline{BC}$, dal minore degli archi $\widehat{AB}$ della circonferenza k e dall'arco AC della parabola p.
4. Chiamata r la retta tangente alla circonferenza k e strettamente parallela alla retta t e considerato il segmento parabolico che tale retta r individua sulla parabola p, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

Problema 2

Una piramide di vertice V ha per base il triangolo ABC rettangolo in B. Lo spigolo $\overline{VA}$ è perpendicolare al piano della base e il piano della faccia VBC forma con lo stesso piano di base un angolo di 60°. Inoltre lo spigolo $\overline{BC}$ è lungo $5a/2$, dove a è una lunghezza data, e il volume della piramide è uguale a

$$\frac{5}{\sqrt{3}}a^3.$$

a) Calcolare la lunghezza dello spigolo $\overline{VA}$.

b) Controllato che essa é $2a\sqrt{3}$, calcolare la distanza del vertice B dal piano della faccia VAC.

c) Determinare il prisma retto, avente il volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABC della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area totale.

Questionario

1. S_n rappresenta la somma di n numeri in progressione geometrica di ragione $3/7$. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$
2. Di due rette a, b dello spazio ordinario si sa soltanto che sono perpendicolari ad una stessa retta c. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a, b.
3. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali, le due rette a, b hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e $1/2$. Calcolare il coseno dell'angolo orientato $\widehat{ab}$.
4. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, é assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:
$$2xy-(k-1)x+4y-2k+1=0$$
dove k é un parametro reale. Determinare per quali valori di k il luogo assegnato é:

   a) un'iperbole;

   b) una coppia di rette.

5. Determinare una primitiva della funzione
$$\frac{\log x}{x},$$
essendo $\log x$ il logaritmo naturale di x.
6. Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, dimostrare la formula che fornisce la derivata, rispetto ad x, della funzione
$$\frac{1}{f(x)}$$
facendo ricorso alla definizione di derivata.
7. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:
$$f(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \quad ,\text{con } x > 0$$
dove e é il numero di Nepero.

6.17.3. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Assegnato il segmento $\overline{AB}$ di lunghezza 1, si disegni la circonferenza avente il centro C sull'asse di $\overline{AB}$ e passante per A e per B. In tale contesto, denotata con P la proiezione ortogonale di B sulla retta AC:

a) si esprima la somma $|\overline{BC}|^2 + |\overline{BP}|^2$ in funzione dell'angolo $B\widehat{A}C = x$;

b) si determini il valore minimo assunto da tale somma;

c) si stabilisca per quali valori di x si ha che
$$|\overline{BC}|^2 + |\overline{BP}|^2 = \frac{7}{4};$$

d) fissato $x = 30°$ si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo BPC attorno alla retta AC, presa come asse di rotazione.

Problema 2

Un foglio di latta ha le dimensioni di un quadrato di lato a. Da esso si ritagliano quattro quadrati uguali (ciascuno avente un angolo coincidente con un angolo del foglio) in modo da ottenere, piegando ad angolo retto i lembi rimasti, una scatola senza coperchio.

Trascurando lo spessore del foglio, si determini:

a) il lato x del quadrato da ritagliare affinché la scatola abbia volume massimo;

b) il valore di a, espresso in centimetri, affinché tale volume massimo abbia capacità di 4 litri;

c) il raggio, in funzione di a, che deve avere una sfera per essere circoscritta alla scatola di volume massimo.

Questionario

1. Dimostrare che se un polinomio $p(x)$ è divisibile per $(x-a)^2$ allora $p'(x)$ è divisibile per $x-a$.
2. Senza usare il simbolo del valore assoluto, si descriva il dominio di x per cui $|x+1|<4$.
3. Si dimostri che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.
4. L'equazione
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$
esprime il teorema del valor medio o di Lagrange. Determinare c quando $f(x)=\sqrt{x-1}$, $a=1$ e $b=3$.
5. Si trovi la curva il cui coefficiente angolare nel punto (x,y) è $3x^2$ e che deve passare per il punto $(1,-1)$.
6. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:
$$\log_a b \times \log_b a = 1.$$
7. Qual è la lunghezza di un arco di cerchio di raggio 10 m se l'angolo al centro che lo sottende misura
$$\frac{4}{5}\pi?$$
E se l'angolo misura 110°?
8. Cosa si intende per *funzione periodica*? Qual è il periodo di
$$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1?$$

6.18. Anno scolastico 2001-2002

6.18.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo ABC è rettangolo in A e i suoi cateti hanno misure note, una doppia dell'altra. Condotta per A una retta r non secante il triangolo e detta $\overline{B'C'}$ la proiezione ortogonale dell'ipotenusa $\overline{BC}$ su r, si determini la posizione di r per cui l'area del trapezio $\overline{B'BCC'}$ è massima. Si affronti il problema

a) con i metodi della trigonometria (indicando, ad esempio, con x l'angolo che r forma con AC o AB);
b) con i metodi della geometria analitica introducendo un conveniente sistema di riferimento cartesiano.

Si ritrovi, infine, il risultato a partire dall'osservazione che il trapezio è somma del triangolo dato e dei triangoli rettangoli, di ipotenuse costanti, B′BA e ACC′. Quand'è che ciascuno di questi ha area massima?

Problema 2

Uno spicchio sferico di ampiezza 20° ha il volume, approssimato a meno di 10^{-2} uguale a $169{,}65\,\mathrm{cm}^3$.

a) Si determini il raggio della sfera cui lo spicchio appartiene;

b) Supposto che la sfera sia di ferro (peso specifico $= 7{,}8$) e pesi $21{,}65\,\mathrm{kg}$ si stabilisca se essa è piena o contiene al suo interno qualche cavità.

c) Si calcoli l'altezza del cono di volume minimo circoscritto alla sfera.

Questionario

1. Cosa si intende per *funzione periodica*? Quale è il periodo di
$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$
Quale quello di $\cos(\pi x)$?

2. Se $f(x) = 2^x$, mostrare che

   a) $$f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x).$$

   b) $$\frac{f(x+3}{f(x-1)} = f(4).$$

3. Dopo aver spiegato il significato e il valore del numero e di Nepero, calcolare
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right).$$

4. Determinare il valore del parametro t che soddisfa l'equazione:
$$\int_0^t \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)\mathrm{d}x.$$

5. Trovare l'equazione di una curva sapendo che il suo coefficiente angolare nel punto (x, y) è $x\sqrt{1+x^2}$ e passa per il punto $(0, -2)$.

6. Due angoli α e β misurano rispettivamente π^2 radianti e 539 gradi. Quale dei due è il maggiore? Quale è più grande, $\sin\alpha$ o $\sin\beta$?

7. Provare che esiste un numero reale α con $1 < \alpha < 2$ in cui si annulla la funzione:
$$f(x) = \tan x + \log x - x$$
ove $\log x$ denota il logaritmo naturale di x.

8. Si stima che la popolazione mondiale aumenti dell'1,7% ogni anno. Indicata con P la popolazione mondiale attuale e con Q la popolazione stimata tra un anno, il legame tra P e Q è espresso da:

   a) $Q = 1{,}0017P$;

b) $Q = 1,017P$;

c) $Q = 1,17P$;

d) $Q = 1,7P$;

e) nessuna delle risposte precedenti è esatte.

Dare una esauriente spiegazione della risposta.

6.18.2. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 degli 8 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1. Si chiede di:

a) dimostrare che il lato obliquo è la metà della base maggiore;

b) determinare la base minore del trapezio sapendo che la sua area è k, essendo $k \neq 0$;

c) discutere le condizioni di possibilità del problema ed esaminarne i casi particolari;

d) determinare il trapezio di area minima ed il volume del solido da esso generato nella rotazione di 360° attorno alla base maggiore.

Problema 2

Di un fascio di parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$ si hanno, localizzate nel punto $x = 0$, le informazioni seguenti:

$$y(0) = 3 - k \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y''(0) = 2k,$$

essendo k un parametro diverso da zero.

a) Si determini l'equazione del luogo γ descritto al variare di k dai vertici delle parabole e se ne determinino le coordinate dei punti A e B di massimo e di minimo.

b) Si verifichi che tutte le parabole del fascio passano per i punti A e B e se ne dia una giustificazione.

c) Si determinino le due parabole del fascio che hanno i vertici rispettivamente in A e B e si calcoli l'area della regione limitata da esse racchiusa.

Questionario

1. Il peso totale di 5 giocatori di calcio è 405 kg e il peso medio di 10 campionesse di nuoto è 47 kg. Trovare il peso medio di questi quindici atleti.
2. Un cilindro avente il raggio di base di 8,5 cm e altezza 20 cm vene riempito con biglie d'acciaio di 2,1 cm di diametro. Dimostrate che nel cilindro ci sono meno di 940 biglie.
3. Tra tutti i coni aventi apotema 1, determinare quello di volume massimo.
4. Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e applicarlo per calcolare il:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(1 + x^2\right)}{\log\left(1 + 3^x\right)}.$$

5. Determinare la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ che soddisfi l'equazione $f(x+1) = 2f(x)$ per tutti i numeri reali x. Successivamente della funzione trovata se ne calcoli la derivata seconda in $x = 0$ e se ne dia un'approssimazione con due cifre decimali esatte.
6. Dopo aver dato una giustificazione della formula d'integrazione per parti applicarla per calcolare l'integrale definito:
$$\int_0^1 e^x \left(x^2+1\right) dx.$$
7. A quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti a e b della funzione $y = a\sin^2 x + b\sin x$ affinché essa abbia un massimo relativo per $x = \pi/4$?
8. Dimostrare che la derivata $(n+1)$-esima di un polinomio $P(x)$ di grado n è zero.

6.18.3. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la parabola p di equazione:
$$y = x^2 + x + 1.$$

a) Condotte per il punto O le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti A e B di contatto.

b) Trovare le coordinate del punto C, situato da parte opposta di O rispetto alla retta AB, tale che il triangolo ABC sia isoscele e rettangolo in C.

c) Determinare l'equazione della circonferenza k avente il centro in C e passante per A.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco AB di parabola e dai segmenti $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$.

e) Determinare in quante parti la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

Problema 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$
dove m è un parametro reale.

a) Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.

b) Determinare, tra le curve assegnate, la curva γ avente un flesso nel punto di ascissa 1.

c) Per il punto A, di ascissa 2 , condurre le due rette tangenti a γ e indicare con B e C ($x_B > x_C$) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con γ, oltre al punto A.

d) Sull'arco AB di γ trovare un punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.

e) Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a γ.

Questionario

1. Una piramide si dice retta:

   a) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono a due a due perpendicolari;

   b) se almeno un angolo del poligono di base è retto;

   c) se l'altezza è perpendicolare alla base;

   d) per una ragione diversa dalle precedenti.

   Una sola risposta è corretta: individuarla.

2. Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza s di un suo spigolo.

3. La cifra delle unità dello sviluppo della potenza 2^{2002} è:

   $$(A)\,2 \quad ; \quad (B)\,4 \quad ; \quad (C)\,6 \quad ; \quad (D)\,8.$$

   Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

4. Considerata la seguente equazione in x:

   $$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

   e indicate con x_1 ed x_2 le sue soluzioni, calcolare il valore della seguente espressione:

   $$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3 + \left(x_1^2 \cdot x_2^2\right)^3 - (x_1 + x_2) - x_1 x_2.$$

5. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione:

   $$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t.$$

6. Determinare il dominio di continuità e quello di derivabilità della funzione

   $$f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

7. Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e stabilire se può essere applicato per calcolare i seguenti limiti:

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + 3x}{\sin x + 2x}.$$

6.19. Anno scolastico 2002-2003

6.19.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Tra le circonferenze di equazione $x^2+y^2-4y-k=0$, sia Γ quella di raggio $2\sqrt{2}$. Siano A e B i punti in cui Γ interseca l'asse x.

a) Determinare l'equazione della parabola p, con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in B alla retta di equazione $y=-2x+4$.

b) Calcolare l'area di ciascuna delle due parti in cui p divide il cerchio Γ.

c) Nel segmento parabolico determinato dalla corda $\overline{AB}$ inscrivere un rettangolo, con un lato su $\overline{AB}$, di area massima.

d) Tale rettangolo è anche quello di massimo perimetro?

Problema 2

Si consideri un cono circolare retto.

a) Si sezioni il cono con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a>b)$ e h rispettivamente le misure dei raggi delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprimano in funzione di a, b, h il volume e la superficie laterale del tronco di cono illustrando il ragionamento seguito.

b) Posto che il cono preso in esame abbia la superficie laterale di $\sqrt{3}\pi\,\mathrm{dm}^2$, quale ne è il volume massimo?

c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta al cono massimo determinato.

d) Si dia una approssimazione in centilitri della capacità di tale sfera.

Questionario

1. Date un esempio di solido la cui superficie laterale è 7^{π}.
2. Date un esempio di polinomio il cui grafico taglia la retta $y=1$ tre volte.
3. Dimostrate, senza risolverla, che l'equazione : $2x^3+3x^2+6x+12=0$ ammette una e una sola radice reale.
4. Calcolate $D[\operatorname{arccot} x]$ ($D=$ derivata) e dite perché essa è opposta a $D[\arctan x]$.
5. Scrivete l'equazione della tangente a λ, grafico di
$$f(x)=2x-\log\left(e^{\pi/2}+1\right)$$
nel suo punto P di ascissa 0.
6. Dopo aver tracciato il grafico della funzione $\log_4 x$, come vi regolereste per tracciare il grafico della funzione $\log_4(x-5)$? e quello della funzione $\log_4 2x$?
7. Fra le primitive di $y=3\cos^3 x$ trovare quella il cui diagramma passa per $P(0,5)$.
8. Il coefficiente angolare della tangente al diagramma di $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Determinate $f(x)$ sapendo che $f(0)=4$.

6.19.2. Sessione suppletiva - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Considerate le funzioni
$$f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2} \quad , \quad g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

a) Tracciate nel piano (t,y) i loro rispettivi grafici F e G.

b) Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2-y^2=1$ avente per ascissa $f(t_1)$ ha per ordinata $g(t_1)$.

c) Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa t_0. Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di t_0.

d) Calcolate l'area della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t=-1$ e quella della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t=1$.

Problema 2

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y=-x^2+bx+c$ abbia il vertice in $A(1,6)$. Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione $xy=k$ passi per A.

a) Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni, indicando con B quello appartenente al primo quadrante.

b) Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.

c) Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y della medesima parte di piano.

Questionario

1. Cosa si intende per *funzione periodica* ? Quale è il periodo della funzione $f(x)=\tan 2x+\cos 2x$?
2. Provate che se l'equazione $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $3ax^2+2bx+c$.
3. Provate che la curva di equazione
$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$$
con a_0 e b_0 reali non nulli, ammette per asintoto la retta di equazione
$$y=\frac{a_0}{b_0}.$$
4. Quale è il flesso della funzione e^x-x^2 ?
5. Provate che una qualsiasi curva di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$, con $a\neq 0$, presenta uno e un solo flesso e che questo è il centro di simmetria della curva.
6. Per quale x la tangente alla curva di equazione $y=\arcsin x$ ha coefficiente angolare 1?
7. $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive rispettivamente di $y=x^2$ e $y=x$. Sapendo che è $G(0)-F(0)=3$, quanto vale $G(1)-F(1)$?
8. Tra i coni circolari retti di apotema 3 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

6.19.3. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.

b) Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.

c) Dimostrare che i tre punti sono allineati.

d) Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y = x$ e disegnarne l'andamento.

e) Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ.

Problema 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy:

a) tra le iperboli di equazione $xy = k$ indicare con j quella che passa per il punto $A(1,3)$ e chiamare B il suo punto di ascissa -3;

b) determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B;

c) determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB;

d) indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j, dalla parabola p, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Questionario

1. Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ. Sapendo che $\cos\alpha = 5/13$ e $\cos\beta = 12/13$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2\sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k \sin X$.

3. Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

4. x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione:
$$y = \log \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \leq x \leq 1.1$; inoltre $f(1.1) = 0$ e $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0 \leq x \leq 1.1$. Dimostrare che risulta: $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$.

7. Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \leq x \leq b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

6.19.4. Sessione suppletiva - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnati i punti $A(a, 0)$ e $B(0, 2a)$, dove a è un parametro reale positivo.

a) Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y, avente il vertice in A e passante per B.

b) Sull'arco AB della parabola determinare il punto P per il quale risulta minima la somma delle coordinate e calcolare il valore di a per cui questa somma minima vale $7/4$.

c) Chiamata k la parabola corrispondente al valore di a così trovato, determinare l'equazione della retta t tangente a k nel suo punto P e quella della retta p perpendicolare a t in P.

d) Indicato con Q il punto in cui la retta p interseca ulteriormente la parabola k, calcolare le aree delle due parti in cui il cerchio di diametro $\overline{AB}$ è diviso dalla parabola k.

Problema 2

Su una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB}$, lungo $2r$, dove r è una lunghezza nota, si consideri un punto P, si conduca, parallelamente alla retta AP, la tangente alla semicirconferenza e si chiami M il punto di contatto. Sia poi Q il punto in cui questa tangente interseca quella condotta per P. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo $P\widehat{A}B$

a) si esprima in funzione di x l'area S' del triangolo AOP;

b) si esprima in funzione di x l'area S'' del quadrilatero OPQM;

c) posto
$$\tan \frac{x}{2} = t,$$

si esprima in funzione di t il rapporto

$$f(t) = \frac{S'}{S''};$$

d) si studi la funzione $f(t)$ ottenuta e se ne disegni un andamento approssimato prescindendo dalla questione geometrica.

Questionario

1. Sapendo che $\sin 30° = 1/2$ calcolare $\sin 15°$.
2. Di triangoli in cui due lati hanno lunghezze rispettivamente: $b = 2\sqrt{3} - 2$ e $c = 4$ e l'angolo opposto al primo di essi ha ampiezza $\beta = 15°$, ne esistono

    a) nessuno;

    b) uno;

    c) due;

    d) più di due.

    Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta effettuata.
3. Dimostrare che se tre rette distinte dello spazio passano per uno stesso punto O e ciascuna di esse interseca una quarta retta in un punto distinto da O allora le quattro rette sono complanari.
4. Si consideri la seguente espressione:

    $$\frac{\log_{1/4} 2 + \log_3 \sqrt[3]{9}}{\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_{1/2} 8}.$$

    Il suo valore è:

    $$\text{a)}\ \frac{2}{3} \quad , \quad \text{b)}\ \frac{1}{23} \quad , \quad \text{c)}\ \frac{2}{45} \quad , \quad \text{d)}\ -\frac{14}{27}.$$

    Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

    $$f(x) = \log\left(2x - \sqrt{4x-1}\right).$$

6. Considerata la funzione

    $$f(x) = \frac{1}{x^{x-1}}$$

    stabilire se esistono i suoi limiti per:

    a) $x \to -\infty$,

    b) $x \to +\infty$,

    c) $x \to 1$,

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

7. Si consideri il seguente integrale
$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$
Il suo valore è, con buona approssimazione:

a) -0.024;

b) -0.24;

c) -2.4;

d) un valore diverso dai precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

6.19.5. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche Oxy, studiate la curva F di equazione:
$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}.$$

a) Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.

b) Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva Γ. Sul segmento $\overline{AB}$ prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di Γ avente la stessa ascissa di P, sia massima l'area del triangolo APQ.

c) Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da Γ e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

d) Determinate l'equazione della curva S simmetrica di Γ rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, siano: S il punto di coordinate $(0,4)$; P un punto della retta r di equazione $2x-y-2=0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y.

a) Trovate l'equazione cartesiana del luogo Γ descritto da Q al variare di P su r.

b) Studiate Γ, disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x=3$.

c) Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra Γ, il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x=2$.

d) Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di Γ rispetto alla retta $x=2$.

Questionario

1. Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{\pi}$? Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto $x = \pi$?
2. Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.
3. Dimostrate che
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$
4. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.
5. I *gradi sessagesimali*, i *radianti* e i *gradi centesimali* sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.
6. Sia $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{P}}\mathsf{B}$ un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{P}}\mathsf{B}$ e quale quella in gradi centesimali?. Motivate la vostra risposta.
7. Calcolate la derivata della funzione
$$f(x) = \arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1}.$$
Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è una costante? Se si, quale è la costante?
8. Verificate che la funzione: $y = \mathrm{e}^{-x} + x^{-1}$ è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate $g'\big(1+\mathrm{e}^{-1}\big)$.

6.19.6. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Considerate assegnate, nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $\mathsf{O}xy$, la parabola λ d'equazione: $x^2 = 4(x-y)$ e la retta r d'equazione: $2y = x+3$.

a) Verificate che λ e r non hanno punti di intersezione.
b) Trovate il punto P di λ che ha minima distanza da r e determinate altresì il valore di tale minima distanza.
c) Determinate l'area della regione finita di piano R che è delimitata da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.

Problema 2

Fra i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio 6 cm, determinate:

a) il cono C di volume minimo e il valore, espresso in litri, di tale volume minimo;
b) il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura di C;
c) il rapporto tra i volumi delle due sfere, inscritta e circoscritta a C.

Questionario

1. Se è
$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1,$$
qual è il $\lim_{x\to 4} f(x)$?
2. Spiegate perché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e calcolate la derivata di ordine 725 di $\sin x$.
3. Considerate la curva
$$y=x-\frac{1}{2x}:$$
ci sono punti di essi dove la pendenza è 3? Se si, determinateli.
4. Mostrate che le tangenti alla curva
$$y=\frac{\pi\sin x}{x}$$
in $x=\pi$ ed $x=-\pi$ si intersecano ad angolo retto.
5. Provate che la funzione $f(x)=x^4+3x+1$ ha esattamente uno zero nell'intervallo $[-2,-1]$.
6. Mostrate che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
7. Per quale o quali valori della costante k la curva $y=x^3+kx^2+3x-4$ ha esattamente una tangente orizzontale?
8. Tra i coni circolari retti di apotema 6 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.

6.20. Anno scolastico 2003-2004

6.20.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano sono assegnati una retta r ed un punto H la cui distanza da r è $3/2$ rispetto ad una data unità di misura delle lunghezze.

a) Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, determinare sulla retta r due punti A e B tali che il triangolo HAB sia equilatero e trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.
b) Determinare l'equazione in t che risolve la seguente questione: "Condurre, ad una distanza t dal punto H, la retta s parallela ad r in modo che intersechi la circonferenza e il triangolo suddetti e, indicate con $\overline{PQ}$ ed $\overline{RS}$ le corde che su tale retta s intercettano nell'ordine la circonferenza e il triangolo medesimi, risulti: $|\overline{PQ}|=k\cdot|\overline{RS}|$, dove k è un parametro reale assegnato".
c) Posto, nell'equazione trovata, $t=X$ e $k^2=Y$, esprimere Y in funzione di X e, prescindendo dalla questione geometrica, studiare la funzione $Y=Y(X)$ così ottenuta e disegnarne l'andamento.

d) Utilizzando tale andamento, stabilire per quali valori di k si hanno valori di t che risolvono la questione di cui al punto b) e quanti sono questi valori di t.

Problema 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2x},$$

dove a è un parametro reale assegnato.

a) Dimostrare che esse passano tutte per uno stesso punto A.

b) Tra le curve assegnate determinare quella che presenta come tangente in A la retta di coefficiente angolare 23/18.

c) Dopo aver controllato che la curva K trovata è quella che corrisponde al valore 1 di a, studiarla e disegnarne l'andamento.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalla retta di equazione

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Questionario

1. Considerata la funzione
$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x},$$
calcolare, qualora esistano, i suoi limiti per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
É allora possibile calcolare il valore di:

   a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/4} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

   b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

   c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

   d) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

   Una sola risposta é corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

3. Dimostrare la formula che fornisce la somma di n numeri in progressione geometrica.
4. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.
5. La retta r è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato ABCD. Indicato con E un qualsiasi punto di r, distinto da A, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base ABCD sono triangoli rettangoli, a due due congruenti.
6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate x, y:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{4} \\ x^3y^3=1 \end{cases}.$$

   Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano Oxy. Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.
7. Una classe é formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

6.20.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 cm, si determini:

a) il cono C di volume massimo e il valore, espresso in litri, di tale volume massimo.
b) il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;
c) il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.

Problema 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x)=\frac{x+a}{bx^2+cx+2}. \tag{1}$$

a) Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:
   a) i valori di a, b, c sono 0 o 1;
   b) il grafico G di f passa per $(-1,0)$;
   c) la retta $y=1$ è un asintoto di f.
b) Si disegni G.
c) Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette $x=0$ e $x=2$.

Questionario

1. La coppia $(1,2)$ è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?

2. Sia α tale che la funzione
$$f(x)=\alpha x-\frac{x^3}{1+x^2}$$
risulti crescente. Provare che $\alpha \geq 9/8$.

3. Mostrare che le tangenti alla curva
$$y=\frac{\pi \sin x}{x}$$
in $x=\pi$ e $x=-\pi$ si intersecano ad angolo retto.

4. Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?

5. Calcolare:
$$\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx.$$

6. Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione
$$\frac{x}{10}=\sin x$$
e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.

7. Se $\tan\alpha$ e $\tan\beta$ sono radici di $x^2-px+q=0$ e $\cot\alpha$ e $\cot\beta$ sono radici di $x^2-rx+s=0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q?

8. Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

6.20.3. Sessione suppletiva - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Tra i coni circoscritti ad una sfera di raggio 10 cm, si determini:

a) il cono C di volume minimo e il valore, espresso in litri, di tale volume minino;

b) il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;

c) il rapporto tra i volumi delle due sfere, inscritta e circoscritta a C.

Problema 2

Sia S un semicerchio di raggio 2. Si introduca nel piano del semicerchio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche xy e si determinino:

a) le dimensioni del rettangolo R di area massima iscritto in S e tale valore massimo;

b) l'area di ciascuna delle 3 parti che con R compongono S;

c) un'approssimazione in gradi sessagesimali dell'angolo che ciascuna diagonale di R forma con il diametro di S e la misura del corrispondente arco staccato su S.

Questionario

1. Della funzione $f(x)$ si sa che

$$f''(x) = 2^x, \quad f'(0) = 0, \quad f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2.$$

   Quale è $f(x)$?

2. Determinare la derivata della funzione $\sqrt{x}$ usando la definizione.

3. Determinare un polinomio $P(x)$ tale che

$$P(0) = P(1) = 0, \quad P'(1) = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)\,dx = 1.$$

4. Sia a un parametro reale e sia f una funzione definita da

$$(a-x)f(x-a) + f(a-x) = a - x, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

   determinare f.

5. Nel piano Oxy l'equazione $x^2 - 100 = 0$ rappresenta:

   a) una parabola;

   b) la circonferenza di centro l'origine e raggio 10;

   c) l'unione di due rette parallele;

   d) il punto di intersezione di due rette.

   Motivare la risposta.

6. Sapendo che

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1,$$

   trovare il

$$\lim_{x\to 4} f(x).$$

7. Si spieghi perché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e si calcoli la derivata d'ordine 725 di $\sin x$.

8. Si dia un esempio di solido il cui volume sia 40π.

6.20.4. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

É assegnata una piramide retta a base quadrata il cui spigolo laterale misura a. Si determini:

a) la piramide P di volume massimo e il rapporto di questo con il volume del cubo di spigolo unitario;

b) di quanto si deve ridurre l'altezza di P per ridurne il volume del 10%, mantenendo inalterata la forma della piramide;

c) la capacità in litri della sfera circoscritta a P quando $a = 1,2$ metri.

Problema 2

La curva λ e la retta r hanno equazioni rispettive:

$$\lambda : y = x^3 - 15x - 4$$
$$\mathsf{r} : y = mx$$

a) Si denotino con A e B (A a sinistra di B) le intersezioni, nel secondo quadrante degli assi Ox e Oy, di λ con r, e con R ed S si denotino le regioni finite di piano così individuate: R delimitata da λ e dal segmento $\overline{\mathsf{AB}}$, S delimitata dall'asse x, da λ e dal segmento $\overline{\mathsf{AO}}$.

b) Si determini m in modo che R ed S siano equivalenti.

c) Si determini l'equazione della curva γ simmetrica di λ, rispetto alla retta determinata al punto precedente.

Questionario

1. Si dia un esempio di sistema lineare di due equazioni in due incognite compatibile, la cui soluzione è la coppia $(-1, 2)$ e si esponga il ragionamento seguito.
2. Quale è la capacità massima di un cono circolare retto di apotema 12 cm? Quale ne è il valore in litri?
3. Si dimostri che la derivata n-esima di un polinomio $P(x)$ di grado $n - 1$ è zero.
4. Si considerino gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Se $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$, quanti sono i numeri reali k per i quali è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito per giungere alla risposta.
6. Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 25% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 219 euro quale era il suo prezzo di listino?
7. Dire quante soluzioni reali ammette l'equazione
$$\cos x - \log x = 0.$$
C'è una radice positiva tra 1 e 2? Si illustri il ragionamento seguito.
8. Calcolare:
$$\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx.$$

6.20.5. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si riferisca il semicerchio S di raggio 2 ad un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche xy e si determinino:

a) le dimensioni del rettangolo R di area massima inscritto in S;

b) l'area di ciascuna delle 3 parti che, insieme ad R, compongono S;

c) un'approssimazione in gradi sessagesimali dell'angolo che ciascuna diagonale di R forma con il diametro di S e la misura del corrispondente arco staccato su S.

Problema 2

È assegnata la funzione determinata da

$$x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}.$$

1. Si studi e si disegni il suo grafico γ.
2. Si calcoli l'area della regione R racchiusa tra γ, gli assi coordinati e la retta $y = 3$.
3. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse y.

Questionario

1. Si spieghi perché la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta 4.
2. Si enunci il teorema di Lagrange o del valor medio; se ne illustri il significato geometrico, il legame col teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione del grafico di una funzione.
3. Esiste una funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1,2)$ e un minimo relativo in $(-1,3)$. Se si, se ne può fornire un esempio?
4. L'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette soluzioni reali? Quale ragionamento può seguirsi per rispondere al quesito?
5. Come si può trovare il
$$\lim_{x\to 4} f(x)$$
partendo dalla conoscenza che il
$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1?$$
6. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$
Trovate una espressione di $g(x)$.

7. Calcolate:
$$\int_0^1 \arcsin x \, \mathrm{d}x.$$

8. Siano dati gli insiemi
$$A = \{\Phi, \Sigma, \Omega, \Psi\} \quad \text{e} \quad B = \{a, b, c\};$$
quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

6.21. Anno scolastico 2004-2005

6.21.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ dove k è una costante arbitraria.

a) Si trovino, in funzione di k, i valori di minimo e massimo relativo di f.

b) Per quali valori di k, f ha tre zeri reali distinti?

c) Si trovi il valore di k tale che il valor medio di f nell'intervallo chiuso $[-1, 2]$ sia 1.

d) Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando $k = 32$.

Problema 2

Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$.

a) Quale è la distanza minima tra λ e r? E quale ne è il valore?

b) Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima.

c) Si determini l'area del segmento parabolico di base $\overline{\mathsf{AB}}$ e si verifichi che essa è $3/4$ dell'area del triangolo ABP.

d) Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base $\overline{\mathsf{AB}}$ attorno all'asse x.

Questionario

1. Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $1/2$ e ragione $1/2$ si calcoli il
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}.$$

2. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 8 cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7 : 1? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

3. Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un parallelepipedo a base quadrata, quali ne sono le dimensioni minime?

4. Quale è il cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
5. Quando una funzione f è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1} ? Fai un esempio.
6. Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.
7. Trovare il periodo della funzione :

$$y = \sin\frac{2}{3}x + \sin\frac{1}{4}x.$$

8. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

6.21.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{BC}$ e contiene il centro della circonferenza k circoscritta ad esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.

a) Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.
b) Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento $\overline{AE}$, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 5/4 e 2, riferire il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC. Trovare:
    1) le coordinate dei punti B, C, D;
    2) l'equazione della circonferenza k;
    3) l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.
c) Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

Problema 2
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:

$$y = x^4 + ax^2 + b$$

dove a e b sono parametri reali.

a) Determinare a quali condizioni devono soddisfare tali parametri affinché la corrispondente curva sia situata nel semipiano $y \geq 0$.
b) Esistono valori di a e b tali che la curva corrispondente sia situata nel semipiano $y < 0$?

c) Tra le curve assegnate indicare con K quella che ha un minimo relativo uguale a 0 ed un massimo relativo uguale ad 1.

d) Controllato che la curva K si ottiene per $a = -2$ e $b = 1$, disegnarla.

e) Calcolare infine le aree delle regioni in cui la curva K divide il cerchio di centro O e raggio 1.

Questionario

1. Nello spazio si considerino tre rette a, b, c, comunque scelte ma alle seguenti condizioni: la retta a è strettamente parallela alla retta b e la retta b è strettamente parallela alla retta c. Si può concludere che le rette a, c non hanno punti in comune? Fornire una esauriente motivazione della risposta.
2. Un piano π interseca i due piani α e β, paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette a e b. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette? Fornire esaurienti spiegazioni della risposta.
3. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione 2^x è $2^x \ln 2$, esplicitando ciò che si ammette.
4. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^7$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:
$$a^7\,,\quad a^6b\,,\quad a^5b^2\,,\quad a^4b^3\,,\quad a^3b^4\,,\quad a^2b^5\,,\quad ab^6\,,\quad b^7.$$
Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.
5. In una fabbrica lavorano 35 operai e 25 operaie. Si deve formare una delegazione comprendente 3 operai e 2 operaie. Quante sono le possibili delegazioni?
6. Calcolare il limite della funzione
$$f(x) = \frac{2x - \sin 3x}{3x + \cos 2x}$$
per x tendente a $+\infty$. È vero o falso che si può ricorrere al teorema di *de L'Hôpital*? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
7. Calcolare, se esiste, la funzione $f(x)$ tale che
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t^2 + \sqrt{t}.$$

6.21.3. Sessione suppletiva - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione

$$y = \frac{1}{3}x^3 + kx - 3\,, \tag{1}$$

dove k è un parametro reale.

a) Dimostrare che tutte le curve (1) passano per uno stesso punto A che per ciascuna di esse è punto di flesso e centro di simmetria.

b) Dimostrare inoltre che tutte le curve (1) hanno un massimo e un minimo relativi oppure non hanno né l'uno né l'altro.

c) Trovare a quale valore di k corrisponde una curva (1) tangente all'asse x.

d) Indicare con γ quella, tra le curve (1), la cui tangente in A individua con gli assi coordinati un triangolo di area $9/4$ e, nel medesimo tempo, presenta un massimo e un minimo relativi.

e) Fra i rettangoli contenuti nella regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dagli assi coordinati e aventi un lato sull'asse x e gli estremi del lato opposto sulla curva γ, determinare i vertici di quello per il quale questo secondo lato dista $95/24$ dall'asse x.

Problema 2

Un prisma retto ha per basi i quadrati ABCD e A′B′C′D′ e i suoi spigoli laterali sono $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$. Gli spigoli di base del prisma misurano 2 cm, quelli laterali misurano 5 cm.

a) Indicata con φ l'ampiezza dell'angolo che un piano, contenente lo spigolo $\overline{AB}$, forma col piano della base ABCD, determinare a quale condizione deve soddisfare φ affinché il piano intersechi la faccia laterale CDD′C′ del prisma.

b) Condotto per lo spigolo $\overline{AB}$ il piano formante un angolo di 60° col piano della base ABCD, dimostrare che questo piano seca il prisma secondo un rettangolo e determinare le misure dei lati di tale rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano del rettangolo precedente ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, trovare l'equazione dell'ellisse inscritta nel rettangolo e le coordinate dei suoi fuochi.

d) Dimostrare che la bisettrice dell'angolo avente il vertice in un punto T dell'ellisse e i lati passanti per i suoi fuochi risulta perpendicolare alla tangente all'ellisse nel punto T.

e) Calcolare infine l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse.

Questionario

1. La finale di nuoto "100 metri rana" è disputata da 6 atleti. Quanti sono, in teoria, i possibili ordini di arrivo?

2. Calcolare un valore, approssimato a meno di un grado centesimale, dell'angolo che una diagonale del cubo forma con una delle facce.

3. Sia S_n la somma di n numeri in progressione aritmetica di primo termine $1/2$ e ragione $3/2$. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2}.$$

4. È vero o falso che il grafico della funzione
$$\ln(x+2)^2$$
coincide con quello della funzione
$$2\ln(x+2)?$$

Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

5. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la seguente proprietà: "Se due numeri reali positivi variano in modo che il loro prodotto si mantenga costante, allora la loro somma è minima quando essi sono uguali".
6. Trovare la funzione $f(x)$ avente come primitiva la funzione $\tan\sqrt{x}$.
7. Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ tale che

$$f(0)=0, \quad f'(1)=1, \quad f''(2)=2.$$

6.21.4. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$$

e sia $F(x)$ la sua primitiva tale che $F(1)=f(1)$. Siano inoltre φ e Φ le curve rappresentative rispettivamente di f e F.

a) Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino φ e Φ;

b) si determinino le coordinate dei punti comuni a φ e Φ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti;

c) si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x+2=0$.

Problema 2

Il triangolo ABC ha il lato $\overline{\mathsf{BC}}$ che è il doppio di $\overline{\mathsf{CA}}$ di lunghezza k mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad $\overline{\mathsf{AB}}$, ha il cateto $\overline{\mathsf{AB}}$ che è il doppio di $\overline{\mathsf{BD}}$.

a) Si esprima l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo $\mathsf{A\widehat{C}B}$;

b) si determini il valore di $\mathsf{A\widehat{C}B}$ cui corrisponde il quadrilatero di area massima;

c) di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

Questionario

1. Prova che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.
2. S_n indica la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine $1/3$ e ragione $1/3$. Calcola il

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}.$$

3. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a $10\,\mathrm{cm}$. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto $7:3$? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?

4. Considera la cubica $y = x^3$ e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l'aggiunta ad x^3 di un termine kx al variare di k nell'insieme dei numeri reali.
5. Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima.
6. Calcola la derivata della funzione
$$y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$
Cosa puoi dire della funzione? É costante? Illustra il perché della tua risposta.
7. Spiega come utilizzeresti il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.
8. Quando una funzione f è *invertibile*? Come si può calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} ? Fai un esempio.

6.21.5. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si consideri l'equazione $y = x^3 - ax + b$.

a) Si determinino a e b in modo che la sua curva rappresentativa Γ sia tangente, nel punto A di ascissa -1, alla retta r d'equazione $y = 4$. Si disegni Γ.
b) La retta r incontra Γ in un altro punto B. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ e da Γ.
c) Si determini l'equazione della retta s per l'origine degli assi che delimita con Γ e con l'asse y una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area $5/4$.

Problema 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = \sin x + a\cos x + b$, con $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Calcolate a e b in modo che $x = \pi/6$ sia punto di massimo relativo e
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0;$$
2. tracciate il grafico λ, della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto;
3. calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ, nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x = \pi/2$.

Questionario

1. L'equazione $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ esprime il teorema del valore medio o di Lagrange. Determinare c quando $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$ e $b = 1$.
2. Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in metri?

3. Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
4. La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è *invertibile*? Perché? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa f^{-1}?
5. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$
ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in $]0,1]$. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali -1?
6. Fra tutte le primitive di $f(x) = 3\cos^3 x$ trovare quella il cui grafico passa per il punto $(0,5)$.
7. Spiegare perché l'equazione $3^x = -x^2 + 5x - 8$ non ammette soluzioni.
8. Perché tutte le tangenti alla curva d'equazione $y = x^3 + 3x - 4$ formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x? Illustra le ragioni della tua risposta.

6.22. Anno scolastico 2005-2006

6.22.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Siano λ e γ le curve d'equazioni rispettive $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

a) Si disegnino λ e γ; si indichi con P il loro punto comune e si indichino con A e B le loro intersezioni rispettive con una retta di equazione $y = k$ $(k > 0)$.

b) Se $k < 1$, si determini il rettangolo di area massima che ha i vertici in A, B e nelle proiezioni di questi sull'asse x.

c) Se $k > l$, si determini k in modo che risulti uguale a 2 l'area racchiusa tra la retta e i due archi PA e PB.

d) Si determini il volume del solido la cui base è la regione di area 2 prima determinata e tale che le sue sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x siano tutte rettangoli la cui altezza è 3 volte la base.

Problema 2

Sia T il tetraedro regolare di lato $1{,}20\,\mathrm{m}$.

a) Si calcoli il volume, espresso come capacità in litri, di T.

b) Quanti piani paralleli alla base dividono T in due parti i cui volumi sono nel rapporto $2:3$? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice di T?

c) Come deve condursi un piano α parallelo alla base affinché il prisma le cui basi sono la sezione di T con α e la sua proiezione ortogonale sulla base di T, abbia volume massimo?

Questionario

1. Un foglio di carta deve contenere $80\,\text{cm}^2$ di stampa con margini superiore e inferiore di $3\,\text{cm}$ e margini laterali di $2\,\text{cm}$. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
2. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\sin x - 3k + 1 = 0$ dove k è un parametro reale e x, per soddisfare le condizioni del problema, deve essere $30° < x < 60°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
3. La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è *invertibile*? Perché? Quali sono le derivate di f e di f^{-1}? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa?
4. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ e la tangente t al suo grafico nel punto di ascissa $x = 2$. Quale è la pendenza di t?
5. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?
6. Disegnare il grafico di una funzione la cui pendenza sia sempre maggiore di 1.
7. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x.
8. Il dominio della funzione
$$f(x) = 3\arctan x - \arctan\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$
è l'unione di tre intervalli. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione è costante in ciascuno di essi; indi si calcoli il valore di tale costante.

6.22.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = ax^2 + \frac{b}{x}$$
dove a, b sono parametri reali.

a) Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate $(2,3)$ e $(-2,5)$ e indicarla con γ.
b) Studiare la curva γ e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.
c) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dalla retta $y = 5$.
d) Utilizzando il disegno di γ, trovare quante soluzioni ammette l'equazione
$$x^3 - kx - 2 = 0$$
per $-2 < x < 2$, essendo k un parametro reale.

Problema 2

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnata la parabola p' di equazione:

$$y = ax^2$$

dove a è un numero reale positivo assegnato.

a) Condotta una generica retta t per il fuoco F della parabola p' e chiamato M il punto medio del segmento che p' intercetta su t, trovare le funzioni $x(k)$ ed $y(k)$ che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di M per mezzo della pendenza k della retta t.

b) Considerate le equazioni $x = x(k)$ e $y = y(k)$ ed eliminato il parametro k fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola p'' (è chiamata *luogo geometrico del punto* M *al variare di* t *nel fascio di centro* F).

c) Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p'' e dalle rette di equazioni $x = 0$ ed $x = 2a$.

d) Trovare il valore di a per il quale l'area A è uguale a 13/24 e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

Questionario

1. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \sin^2(2x)$.

2. Si consideri la seguente proposizione: *Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.*

   Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.

3. Si indichi con α l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di α, espressa in radianti:

   a) è $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

   b) è $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

   c) è $\arctan \dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

   d) è un valore diverso.

   Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Considerata l'equazione: $x^4 + x - 2 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione razionale.

5. In un cono equilatero di apotema a inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.

6. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo J, tranne che nel punto a di J, dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione $f(x)$ è costante in J? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7. Si consideri il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/x}.$$
Esso è uguale a:
   a) e^2,
   b) $\dfrac{1}{e^2}$,
   c) $\sqrt{e}$,
   d) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

   dove e è il numero di Nepero. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

6.22.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo ABC è rettangolo in C ed è $|\overline{CB}| = m$.

a) Posto $A\widehat{B}C = x$ e $t = \tan(x/2)$, si esprima il raggio y del cerchio inscritto nel triangolo in funzione di t.

b) Si studi $y = f(t)$ e se ne tracci il grafico senza tener conto dei limiti geometrici del problema; si denoti, poi, con γ, l'arco del grafico che corrisponde a tali limiti t_1 e t_2.

c) Si determini il valore del parametro m in modo che l'area della regione delimitata da γ e dall'asse t fra t_1 e t_2 sia uguale a $4-\log 16$.

Problema 2

La somma di due numeri x e y è uguale al loro prodotto. Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y):

a) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x,y)$ che soddisfano al problema.

b) Quali proprietà di simmetria di γ sono deducibili dalla commutatività della addizione e della moltiplicazione? Il luogo γ ha altre simmetrie?

c) Si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ, dagli assi coordinati e dalle rette $x = 2$ e $y = 5$ e se ne dia un valore approssimato.

Questionario

1. Si vogliono colorare, con colori diversi, le facce di un tetraedro e le facce di un cubo. In quanti modi ciò è possibile disponendo di dieci colori e prescindendo dal loro ordine?
2. La somma di due numeri è s; determinate i due numeri in modo che la somma dei loro cubi sia minima.
3. Per quale o quali valori di x, con $90° < x \leq 450°$, è vero che:

a) $2\cos 5x = 1$;

b) $2\cos 5x > 1$.

4. Fra tutti i coni circoscritti ad una data sfera, trovare quello di volume minimo.
5. É assegnata l'equazione
$$(m-1)x^2-(m-5)x+m-1=0.$$
Per quali valori del parametro m le radici appartengono all'intervallo $[-2,-1]$?
6. Si dia una definizione del numero e di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier $(1550-1617)$] e si dimostri che la derivata di e^x è e^x?
7. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x.
8. Calcolare il volume di in tetraedro regolare di spigolo s. Se è $s = 30\,\text{cm}$, quale è la capacità in litri del tetraedro?

6.22.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo ABC, rettangolo in C, ha l'altezza relativa all'ipotenusa uguale a 1.

a) Posto $x = \widehat{CAB}$ e $t = \tan(x/2)$ si esprima il perimetro p del triangolo in funzione di t.

b) Si studi la funzione $p(t)$ così ottenuta e se ne disegni il grafico.

c) Se $p = 6$ quale è il valore, approssimato, in gradi sessagesimali, di x?

Problema 2

Sia $f(x) = x - x^3$ sull'intervallo $[-2,2]$.

a) Trovare m e n tali che la retta r d'equazione $y = mx + n$ sia tangente al grafico di f nel punto $(-1,0)$.

b) Una seconda retta s passante per $(-1,0)$ è tangente al grafico di f in un punto (a,b). Determinare a e b.

c) Dare una valutazione dell'angolo compreso tra le due rette r ed s.

d) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta s.

Questionario

1. Si sa che $G(0)-F(0)=3$, essendo $F(x)$ e $G(x)$ due primitive di $y = x^2$ e $y = x$ rispettivamente. Quanto vale $G(1)-F(1)$?
2. Quanti sono i numeri di tre cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?
3. La somma di due numeri è s; determinate i due numeri in modo che il loro prodotto sia massimo.
4. Fra tutti i coni inscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ e la tangente t al suo grafico nel punto di ascissa $x = 2$. Quale è la pendenza di t ?
7. É data l'equazione $x^2 - 2(k-1)x + 4 = 0$. Dire per quali valori positivi del parametro k una o entrambe le radici sono reali.
8. La funzione
$$f(x) = a \sin x + bx$$
è tale che
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sqrt{3}\frac{\pi}{6}$$
e presenta un massimo relativo nello stesso punto. Si trovino a e b e si dica se $f(x)$ è periodica.

6.23. Anno scolastico 2006-2007

6.23.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = x^2 + 1$.

a) Sia $\mathsf{A}(a, b)$ un punto di Γ. Si dimostri che, qualsiasi sia $a \in \mathbb{Z}$, l'ordinata b non è mai un numero divisibile per 3.
b) Sia $\mathsf{C}(h, k)$ il centro di una circonferenza tangente a Γ nel punto $(1, 2)$. Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C.
c) Si tracci il grafico della funzione
$$\frac{1}{f(x)}.$$
La funzione ha punti di flesso?
d) Sia
$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$
Si calcoli il limite per t tendente ad infinito di $F(t)$ e si interpreti il risultato geometricamente.

Problema 2
Si consideri la funzione f così definita:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Si disegni il grafico di f;

b) si mostri che f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo $[0,2]$; si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico;

c) il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.

Questionario

1. Si calcolino le radici dell'equazione: $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$.
2. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:
$$f : x \mapsto 2^{x+1}\,, \quad g : x \mapsto 2^x + 1\,, \quad h : x \mapsto 2^{|x|}\,, \quad k : x \mapsto 2^{-x}.$$
3. Quante cifre ha il numero 7^{60} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.
4. La formula seguente:
$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
è dovuta a *Leonardo Eulero* (1707—1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è:
$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$
Si illustri il ragionamento seguito.
5. Si vuole che delle due radici reali dell'equazione:
$$x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$$
una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Si determini $f(x)$, sapendo che $f(0) = 4$.
7. Si dimostri che, fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$.
8. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

6.23.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione f definita da $f(x) = 1 - x^2$, il cui grafico è la parabola Γ.

a) Si trovi il luogo geometrico Λ dei centri (a, b) delle circonferenze che sono tangenti a Γ, nel suo punto di ascissa 1.

b) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato da Λ e Γ.

c) Si tracci il grafico della funzione
$$\frac{1}{f}.$$

d) Si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $1/f$ nella striscia[1] $-2 \leq y \leq -1$ e se ne calcoli l'area.

Problema 2

Della parabola γ si sa che passa per i punti $\mathsf{A}(0,2)$ e $\mathsf{B}(2,0)$, ha l'asse parallelo all'asse y e volge la concavità nel verso negativo di tale asse; inoltre l'area del dominio piano delimitato da γ e dai segmenti $\overline{\mathsf{OA}}$ e $\overline{\mathsf{OB}}$ è $10/3$.

a) Si determini l'equazione di γ e se ne tracci il grafico.

b) La retta s di equazione $y = mx + 2$, dove m è un parametro reale, interseca γ in A e in C. Si esprimano in funzione di m le coordinate di C.

c) Si studi la funzione $f(m) = |\overline{\mathsf{AC}}|^2$ e se ne tracci il grafico λ.

d) Si dica quale posizione assume la retta s in corrispondenza dell'estremo relativo della curva λ.

Questionario

1. Si dimostri che fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
2. Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe?
3. Si calcolino le radici dell'equazione:
$$3^{x+3} + 9^{x+1} = 10.$$
4. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:
$$f: x \mapsto 3^{x+1}\,, \quad g: x \mapsto 3^x + 1\,, \quad h: x \mapsto 3^{|x|}\,, \quad k: x \mapsto 3^{-x}.$$
5. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Si dimostri che:
$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione $f(x)$ è, in ogni suo punto P, uguale al quadruplo della radice cubica dell'ascissa di P. Si determini $f(x)$, sapendo che il grafico passa per il punto $\mathsf{A}(-1,0)$.

[1] In realtà il testo ministeriale scrive $-1 \leq y \leq -2$, ma si tratta evidentemente di una svista.

7. Un cerchio ha raggio 1 metro. Quanto misura il lato del decagono regolare in esso inscritto? E quale è la misura del lato del decagono regolare circoscritto?
8. Il valore della seguente espressione:
$$\int_0^1 \arccos x \, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2\arcsin x)\, dx$$
è
$$\frac{\pi - 1}{2}.$$
Spiegarlo in maniera esauriente.

6.23.3. Sessione ordinaria - America Latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Sia f la funzione definita da: $f(x) = a\log_{10} x + 1$, ove a è un parametro reale.

a) Dopo aver precisato il campo di esistenza di f si stabilisca per quali valori di a la funzione f è crescente.
b) Si disegnino i grafici F e G di f corrispondenti, rispettivamente, ai valori $a = 2$ e $a = -2$ e siano b e c le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x.
c) Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo $[b, c]$ e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.
d) Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di a per cui f e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

Problema 2
Si consideri la funzione f così definita:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{3}, & \text{se } x \leq 1; \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) Si disegni il grafico di f;
b) si dica se f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio [o *teorema di Lagrange* – da Giuseppe Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813)] sull'intervallo $[0, 2]$ e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo;
c) il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

Questionario

1. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$f: x \mapsto 3^{x+1}, \quad g: x \mapsto 3^x + 1; \quad h: x \mapsto 3^{|x|}; \quad k: x \mapsto 3^{-x}.$$

2. Quante cifre ha il numero 5^{59} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

3. Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S.

4. Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo

$$\binom{n}{m}$$

e si risolva l'equazione:

$$2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{N}.$$

5. La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6. Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.

7. Si dia una definizione di "asintoto" – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

8. La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione $2\sin x + k\cos x = 1$ ove $k > 0$ e $0 \leq x \leq \pi/3$. Si discutano le possibili soluzioni del problema.

6.23.4. Sessione suppletiva - America Latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $|\overline{AB}| = k$ e l'angolo $B\widehat{A}C = \pi/3$. Con centro in B e raggio x si tracci l'arco di circonferenza le cui intersezioni con i lati $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ siano, rispettivamente, D e E. Con centro in A si tracci poi l'arco di circonferenza tangente in D alla circonferenza già tracciata e che intersechi in F il cateto $\overline{AC}$. Si chiede:

a) Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.

b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo DECF.

c) Si trovino i valori massimo e minimo di $S(x)$.

Problema 2

Si consideri la parabola Γ grafico della funzione f definita da $f(x) = 4 - x^2$.

a) Si trovi il punto P di Γ del primo quadrante degli assi cartesiani la somma delle cui coordinate è massima.

b) Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area del segmento parabolico di base $\overline{AB}$, ove A e B sono le intersezioni di Γ con l'asse x.

c) Si tracci il grafico della funzione $1/f$.

d) Si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $1/f$ nella striscia $-2 \le y \le -1$ e se ne calcoli l'area.

Questionario

1. Si vuole che delle due radici dell'equazione
$$x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$$
una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?

2. Sia $f(x) = x + \sin x$ per ogni x. Si trovino i punti x in corrispondenza dei quali il grafico di f in $(x, f(x))$ abbia coefficiente angolare nullo.

3. La risoluzione di un dato problema conduce all'equazione
$$k \sin x + \cos x = 2k \quad \text{ove} \quad k \ge 0 \quad \text{e} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$
Si discutano le possibili soluzioni del problema.

4. Le nuove targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, seguite da 3 cifre, seguite a loro volta da 2 lettere. Sapendo che le lettere possono essere scelte tra le 26 dell'alfabeto angolosassone, si calcoli quante automobili si possono immatricolare in questo modo.

5. Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

6. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposte affermative, effettuare il calcolo.

7. Le misure dei lati di un triangolo sono 18, 24 e 30 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

8. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - 3x + k = 0.$$

6.24. Anno scolastico 2007-2008

6.24.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

La circonferenza γ passa per $B(0,-4)$ ed è tangente in $O(0,0)$ alla retta di coefficiente angolare -4; la parabola λ passa per $A(4,0)$ ed è tangente in O a γ.

a) Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.

b) Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento $\overline{OB}$ da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.

c) Se P è un punto dell'arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.

d) Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

Problema 2

Nell'insieme delle funzioni $y = f(x)$ tali che

$$y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $(1/2, 1)$ e $(0, 2)$.

a) Constatato che la funzione definita da:

$$y = \frac{2}{1+4x^2}$$

è quella richiesta, si disegni γ.

b) Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento $\overline{HQ}$?

c) Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

Questionario

1. La regione R delimitata dal grafico di
$$y = 7\sqrt[3]{x},$$
dall'asse x e dalla retta $x = 2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.

2. Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0.$$

4. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema 50 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.

5. Si dimostri che l'equazione
$$x^7+5x+5=0$$
ha una sola radice reale.

6. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:
$$f : x \mapsto 5^{x+1}; \quad g : x \mapsto 5^x+1; \quad h : x \mapsto 5^{|x|}; \quad k : x \mapsto 5^{-x}.$$

7. Quale significato attribuisci al simbolo
$$\binom{n}{k}?$$
Esiste un k tale che
$$\binom{10}{k}=\binom{10}{k-2}?$$

8. Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè
$$\sqrt{a} \le \frac{a+b}{2}.$$

6.24.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}|=2$ e si affrontino le seguenti questioni:

a) Si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ, si abbia $|\overline{\mathsf{AP}}|+|\overline{\mathsf{PQ}}|=k$ ove k è un parametro reale diverso da zero.

b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Si calcoli il volume del solido che ha per base il semicerchio delimitato da Γ e tale che tagliato con piani ortogonali ad $\overline{\mathsf{AB}}$ dia tutte sezioni quadrate.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:

a) Si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da
$$f(x)=x+\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x)=x-\frac{1}{x}$$
e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2.

b) Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \le x \le 2$ e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia P un punto del piano di coordinate

$$\left(t+\frac{1}{t},\, t-\frac{1}{t}\right).$$

Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

Questionario

1. Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150 m con un percorso di 3 km. Quale è la sua inclinazione?
2. Si provi che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.
3. Quale significato attribuisci al simbolo
$$\binom{n}{k}?$$
Esiste un k tale che
$$\binom{12}{k}=\binom{12}{k-3}?$$
4. Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.
5. Si calcoli il numero delle soluzioni dell'equazione:
$$|x^2-x|=k$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.
6. Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?
7. Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate reali
$$\mathsf{P}(x,|x|) \quad \text{e} \quad \mathsf{Q}\left(x,\sqrt{4-x^2}\right)$$
si determini, al variare di x, l'insieme dei punti Q la cui ordinata è minore dell'ordinata di P.
8. La regione R delimitata dal grafico di
$$y=12\sqrt{x}$$
dall'asse x e dalla retta $x=2$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

6.24.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

L'ellisse Σ ha equazione

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

e $\mathsf{P}(a, b)$, con $b \geq 0$ è un suo punto.

a) Si determini l'equazione della tangente a Σ in P e se ne indichi con Q l'intersezione con l'asse y.

b) Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico Ω, descritto dal punto medio M del segmento $\overline{\mathsf{PQ}}$ al variare di P.

c) Si studi e si rappresenti Ω, avendo trovato che la sua equazione è:

$$y = \frac{2 - x^2}{2\sqrt{1 - x^2}}.$$

Problema 2

Il trapezio ABCD è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore $|\overline{\mathsf{CD}}| = 2x$.

a) Si dimostri che è $|\overline{\mathsf{AB}}| = x/2$.

b) Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume il valore minimo per $x = \sqrt{2}/2$.

c) In corrispondenza di tale valore di x, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.

Questionario

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
2. Si calcoli e si interpreti geometricamente l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Si dica quanti *litri* di vino la damigiana può contenere.
4. Si dia un esempio, almeno, di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 3$ in 3 punti distinti.
5. Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari?
6. Si determinino le costanti a, b, c in modo che le curve di equazioni

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + c$$

siano tangenti nel punto $\mathsf{A}(1, 0)$. Si determini l'equazione della tangente comune.

7. Il cono W e il cilindro T, circolari retti, hanno uguale raggio r di base e uguale altezza h. Si calcoli il limite del rapporto delle rispettive superfici totali al tendere di r a zero.

8. Si provi che le espressioni

$$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

definiscono la stessa funzione f. Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.

6.24.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Un'ellisse Σ ha gli assi di lunghezza 4 e 2 e i fuochi sull'asse delle ascisse.

a) Si determini l'equazione canonica di Σ e si inscriva in essa il rettangolo di area massima.

b) Detto $\mathsf{P}(x, y)$ un punto di Σ con $y > 0$, si esprima in funzione di x la somma $f(x)$ delle coordinate di P. Si studi $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.

c) Sia R l'insieme piano delimitato da γ, dall'asse delle x, dalle rette $x = 0$ e $x = 2$. Si calcoli il volume del solido generato da R in una rotazione completa attorno all'asse x.

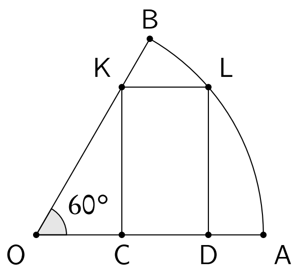
Problema 2

È assegnato il settore circolare AOB con $|\overline{\mathsf{OB}}| = |\overline{\mathsf{OA}}| = r$ e $\mathsf{A\widehat{O}B} = 60°$.

a) Sia CDLK il rettangolo inscritto nel settore circolare con il lato $\overline{\mathsf{CD}}$ su OA. Si esprimano in funzione di $\mathsf{A\widehat{O}L} = x$ le dimensioni del rettangolo.

b) Si determini per quale valore di x il rettangolo ha area massima.

c) Il settore AOB è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani ortogonali al lato $\overline{\mathsf{OA}}$ sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.



Questionario

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 30, 70 e 90 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

2. Si dimostri che le espressioni

$$y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \quad \text{e} \quad \sin x - \sqrt{3}\cos x - 2$$

definiscono la stessa funzione f. Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.

3. Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentano un asintoto verticale e un asintoto orizzontale.
4. Si enunci il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e se ne illustrino il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.
5. Si dimostri che l'equazione
$$x^9 - 9x + 9 = 0$$
ha una sola radice reale.
6. Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?
7. Fra tutti i cono circoscritti ad una data sfera, si trovi quello che ha volume minimo.
8. Si determini k in modo che valga $4/3$ l'area dell'insieme piano delimitato dall'asse x e dalla parabola d'equazione
$$y = -x^2 + kx.$$

6.25. Anno scolastico 2008-2009

6.25.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C d'equazione
$$x^2 + y^2 = 25.$$

a) Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti d'ordinata $y = 3$.

b) Si tracci una corda $\overline{MN}$ perpendicolare al diametro $\overline{AB}$ con $A(0, -5)$ e $B(0, 5)$. Si trovino le coordinate dei punti M e N di C in modo che l'area del triangolo AMN sia massima.

c) Con l'aiuto di una calcolatrice, si calcoli la lunghezza dell'arco tra i punti $P(5, 0)$ e $Q(4, 3)$ di C.

d) Il settore circolare POQ è la base di un solido W che tagliato con piani perpendicolari all'asse dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:
$$y^2 = 2ax \quad \text{e} \quad x^2 = ay, \quad \text{con} \quad a > 0.$$

1. Si disegnino le due parabole e si denoti con A il loro punto d'intersezione diverso dall'origine O.
2. Sia B la proiezione ortogonale di A sull'asse x. Si dica se il segmento $\overline{OB}$ risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a. Posto $a = 2$ e non disponendo di una calcolatrice come si può procedere per avere l'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 10^{-1}?
3. Sia D la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini l'area di D.
4. Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse y.

Questionario

1. Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Si determini il rapporto dei rispettivi spigoli.
2. Si dimostri che l'equazione:
$$x^{11}+11x+5=0$$
ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
3. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$f: x \mapsto \ln(-2x^2+4x+6).$$
4. Qual è il periodo della funzione
$$f(x)=\cos(3x+1)?$$
Si dia ragione della risposta.
5. Si sa che una grandezza fisica y dipende da un'altra x secondo una legge del tipo $y=kx^{\alpha}$ dove k e α sono costanti incognite. Una misura simultanea di x e y, eseguita in due diverse situazioni, ha dato i risultati riportati nella tabella seguente:

x	2	3
y	6,4	14,4

Si calcolino k e α.
6. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$
7. Dati due punti A e B distanti tra loro 4 dm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a $2\,\mathrm{cm}^2$.
8. Si determini il cilindro di massimo volume che si può inscrivere in una sfera di 60 cm di raggio. Quale è la capacità di tale cilindro, espressa in litri?

6.25.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza C con centro nell'origine O e raggio $r=3$.

a) Si tracci una corda $\overline{CD}$ perpendicolare al diametro $\overline{AB}$ con $A(-3,0)$ e $B(3,0)$. Si trovino le coordinate dei punti C e D di C affinché l'area del triangolo ACD sia massima.

b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei suoi punti d'ascissa $x=1$.

c) Si calcoli, con l'aiuto di una calcolatrice, l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo $P\widehat{O}Q$, con $P(0,3)$ e $Q(2,\sqrt{5})$.

d) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione del settore circolare POQ attorno all'asse x.

Problema 2

a) Si trovi l'espressione generale di un polinomio $P(x)$ di 4° grado tale che $P(-2) = P(2) = 0$ e $P(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Sia
$$P(x) = (x^2 - 4)^2.$$
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy si rappresenti l'andamento di $P(x)$, determinandone in particolare i valori massimi e minimi e i flessi.

c) Si determini l'area della regione piana finita R compresa tra il grafico di $P(x)$ e l'asse x.

d) Si inscriva in R un rettangolo, con uno dei lati sull'asse x. Come va scelto tale rettangolo affinché esso abbia area massima? Come va scelto tale rettangolo affinché, ruotandolo di un mezzo giro attorno all'asse y, si ottenga un cilindro di volume massimo?

Questionario

1. Si dimostri che l'equazione:
$$x^{19} + 19x + 11 = 0$$
ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

2. Si determini il periodo della funzione
$$f(x) = \cos 7x.$$

3. Si scrivano le equazioni di almeno due funzioni razionali fratte che hanno un asintoto obliquo.

4. Si trovi il valore del parametro k in modo che la curva d'equazione
$$y = kx^3 - x + 4$$
abbia nel punto d'ascissa $x = 1$ la tangente orizzontale.

5. Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

6. Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

7. Si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

8. Si risolva in R la seguente equazione:
$$e^{2x} + e^x = 2.$$

6.25.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

È assegnata la parabola λ d'equazione $x^2 - 2y = 0$.

a) Si disegni λ. Si determinino il *fuoco* e la *direttrice* illustrandone le rispettive proprietà.

b) Siano: $\mathsf{A}(-2,2)$ e $\mathsf{B}(2,2)$. Si calcoli l'area del segmento parabolico S di base $\overline{\mathsf{AB}}$

c) Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di S.

d) Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di S attorno alla retta AB.

Problema 2

Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Si determinino a, b, c e d di modo che il grafico Γ di $p(x)$ abbia nei punti $\mathsf{F}(1,-2)$ e $\mathsf{M}(2,-4)$ rispettivamente il punto di flesso e il punto di minimo.

b) Verificato che è $p(x) = x^3 - 3x^2$, si disegni Γ.

c) Si determini il polinomio $q(x)$ il cui grafico è simmetrico di Γ rispetto all'asse x.

d) Si determinino le aree di ciascuna delle due regioni che Γ delimita con la retta per F parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Questionario

1. Si risolva la seguente equazione
$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 3^x.$$

2. Dopo aver illustrato il significato di funzione inversa si dica, motivando la risposta, se è vero che:
$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro du t sono al più due.

4. Si determinino a e b in modo che il diagramma della funzione
$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{2x - 5}$$
abbia come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 3x + 2$.

5. Una piramide di altezza h viene secata con un piano α parallelo al piano β della base in modo da ottenere un tronco di piramide il cui volume è $7/8$ del volume della piramide. Qual è la distanza tra α e β?

6. Si disegni il grafico della funzione:
$$y = \left|\log(x-1)\right|.$$

7. Si determini, motivando la risposta, il periodo della funzione
$$y = \sin(2x + 3).$$

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy si tracci il diagramma del luogo dei punti P del quarto quadrante che hanno dall'origine una distanza quadrupla di quella che hanno dal punto $(2,0)$.

6.25.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

L'ellisse Σ ha equazione:

$$x^2+4y^2-4=0.$$

a) Si determinino le coordinate dei vertici e dei fuochi, le lunghezze degli assi e l'eccentricità.

b) Si determini il rettangolo di area massima inscritto in Σ.

c) Sia $y>0$. Detto $P(x,y)$ un punto di Σ, si esprima in funzione di x la somma $f(x)$ delle coordinate di P. Si studi $f(x)$ e se ne tracci il grafico.

d) Si calcoli l'area della regione R delimitata dal grafico di f, dall'asse x, dalle rette $x=0$ e $x=2$.

Problema 2

Nel piano Oxy è assegnata la circonferenza di centro O e raggio 1.

a) Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a C nei suoi punti di ascissa $1/2$.

b) Sia $P\in C$ a coordinate non negative; Q l'intersezione della tangente a C in P con l'asse x e N l'intersezione della retta OP con la retta $y=2$. Si determini P in modo che risulti minima l'area del triangolo PQN[2].

c) Sia $P\in C$ tale che $P\hat{O}A=\pi/6$ con $A(1,0)$. Il settore circolare POA è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di tale solido.

Questionario

1. Provare che, per $n>0$, vale
$$n!\geq 2^{n-1}.$$

2. Si enunci il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e se ne illustrino il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.

3. Si dimostri, nel modo che si preferisce, che la media geometrica di due numeri positivi a e b non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè
$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$$

4. Fra tutti i coni inscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.

5. Si calcoli:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}.$$

[2] Il testo indicava PMN, ma si tratta di un evidente refuso.

6. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = e^x - x^e.$$
Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = e$.
7. Quante diagonali ha un poligono di 2009 lati?
8. La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di
$$y = 3e^{-x}$$
e dalla retta $x = \ln 3$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

6.26. Anno scolastico 2009-2010

6.26.1. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy:

a) si studi la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{3}x}$$
e se ne tracci il grafico γ.

b) Si determini l'ampiezza degli angoli individuati dai due asintoti

c) Si verifichi che il parallelogramma, avente due lati consecutivi sugli asintoti e un vertice su γ, ha area costante, mentre il suo perimetro ammette un valore minimo ma non un valore massimo.

d) Tra le infinite primitive di $f(x)$ si determini quella che passa per il punto di coordinate $(1, 0)$.

Problema 2

È data il fascio di cubiche di equazione
$$y = kx^3 - kx^2 + 2kx + 1$$
dove k è un parametro reale non nullo.

a) Si verifichi che tutte le curve del fascio hanno in comune con l'asse delle y lo stesso punto C, di cui si chiedono le coordinate.

b) Si mostri che, qualunque sia il valore di k, la curva corrispondente incontra in un sol punto P_k l'asse delle x. Si verifichi altresì che se $k = 1$ l'ascissa di P_1 è compresa fra e -1 e 0.

c) Si disegnino la curva γ del fascio corrispondente al valore $k = 1/4$ e la retta t tangente a γ nel punto C.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata da γ, da t e dalla retta di equazione $x = -2$.

Questionario

1. Sia γ il grafico di
$$y = \frac{10x}{x^2+1}.$$
Si trovi l'equazione della retta normale a γ nel punto $(2,4)$.

2. Si determini il cono rotondo di massimo volume inscritto in una sfera di raggio $30\,\mathrm{cm}$.

3. Quale è la derivata di
$$f(x) = 3^{\pi x}\,?$$
Si giustifichi la risposta.

4. Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.

5. La regione R del primo quadrante delimitata dal grafico di
$$y = 3\mathrm{e}^{-x}$$
e dalla retta $x = \ln 3$ è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

6. Un prisma a base quadrata ha altezza x e spigolo di base y tali che $x+y=3$. Quale è il suo volume massimo?

7. Si disegni, nell'intervallo $]-\pi,\pi]$, il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{1}{2}|\cos x| - 1.$$

8. Si consideri una parabola del fascio
$$y = x^2 - ax$$
e siano r e s le rette ad essa tangenti rispettivamente nell'origine del sistema di riferimento $\mathsf{O}xy$ e nel punto T di ascissa $2a$. Sia P il punto di intersezione fra r e s. Si calcoli:
$$\lim_{a\to+\infty} \frac{|\overline{\mathsf{OP}}|}{|\overline{\mathsf{PT}}|}.$$

6.26.2. Sessione suppletiva - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la parabola d'equazione $y = ax^2$ con a numero reale.

a) Si descriva come varia il grafico della parabola al variare di a.

b) Si determini a in modo che la parabola corrispondente λ stacchi sulla retta r d'equazione $y = x + 4$, nel semipiano delle ordinate positive, un segmento $\overline{PQ}$ di lunghezza $6\sqrt{2}$.

c) Sia A il punto in cui la retta r taglia l'asse delle x. Si calcolino l'area del triangolo mistilineo APQ e l'area del segmento parabolico di base $\overline{PQ}$.

d) Si determini il punto M dell'arco di λ di estremi P e Q per il quale è massima l'area del triangolo PMQ.

Problema 2

Il trapezio rettangolo ABCD ha la base maggiore $\overline{AB}$ e il lato obliquo $\overline{AD}$ entrambi di lunghezza 1.

a) Si esprima il perimetro del trapezio in funzione dell'angolo acuto $D\widehat{A}B = \delta$.

b) Si studi la funzione $f(\delta)$ ottenuta e se ne tracci il grafico nell'intervallo di definizione.

c) Si determini il trapezio di perimetro massimo.

d) Si affronti il problema di determinare il trapezio di perimetro massimo studiando la funzione $g(x)$ ove è $x = |\overline{BC}|$.

Questionario

1. Fra tutti i coni inscritti in una sfera si trovi quello di volume massimo.
2. Si enunci il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e se ne illustrino il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.
3. Si dimostri che il prodotto di due numeri positivi che hanno somma costante è massimo quando i due numeri sono uguali.
4. Si tracci il grafico di $y = |x^5 - 1|$.
5. Nel piano riferito a un sistema di coordinate Oxy, si consideri la regione R delimitata dal grafico di $y = e^x$, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = \ln(1/2)$. Si calcoli l'area di R.
6. Cosa si intende per periodo di una funzione? Si spieghi il procedimento da seguire per determinare il periodo della funzione:
$$f(x) = \sin(3x + 1).$$
7. Si determini il campo di esistenza della funzione:
$$f : x \mapsto x^2 - x - \ln x.$$
La f ha caratteristiche di simmetria? È invertibile? Si tracci il grafico di f.
8. Sia f la funzione polinomiale definita per ogni x reale da
$$f(x) = x^4 + 5x^2 + 3.$$
Allora $f(x^2 - 1)$ è dato per ogni x da:

A) x^4+5x^2+1;

B) x^4+x^2-3;

C) x^4-5x^2+1;

D) x^4+x^2+3;

E) nessuna di queste.

Una sola delle risposte indicate è quella corretta. Si giustifichi la risposta.

6.26.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione di dominio $I=]-1/2,+\infty[$ definita da $f(x)=\ln(1+2x)$.

a) Quale è il codominio di f? Si dimostri che f è strettamente crescente su I e se ne tracci il grafico γ.

b) Sia $g(x)=f(x)-x$ con $x\in I$; si studi come varia $g(x)$ su I.

c) Si dimostri che l'equazione $g(x)=0$ ammette due soluzioni: 0 e un'altra, denotata con β, appartenente all'intervallo $[1,2]$. Si dimostri altresì che per tutti gli x reali dell'intervallo $J=]0,\beta[$ anche $f(x)$ appartiene a J.

d) Si calcoli l'area della parte di piano delimitata dal grafico di f e dall'asse x sull'intervallo $[0,2]$.

Problema 2

Il triangolo ABC è equilatero e di lato unitario. La retta r parallela ad $\overline{AB}$ interseca il lato $\overline{AC}$ e il lato $\overline{BC}$ nel punto P e nel punto Q, rispettivamente.

a) Detta x la distanza di r dal vertice C si determini per quale valore di x nel quadrilatero ABQP si può inscrivere una circonferenza; quale è la lunghezza del suo raggio?

b) Si esprima in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABQP, verificando che si ottiene la funzione:

$$f(x)=\frac{4x^2}{3-4x^2}.$$

Il rapporto $f(x)$ assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta.

c) Si studi la funzione f senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il grafico γ.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta di equazione $y=2$.

Questionario

1. Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, delimitata dal grafico di $y = e^{-x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x, dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.
2. Si discuta l'equazione
$$(m-1)x^2-(m-5)x+m-1=0 \quad \text{con} \quad -2 \leq x \leq -1.$$
3. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.
4. Si determini il punto della parabola
$$y = \frac{1}{4}x^2$$
più vicino al punto di coordinate $(6,3)$.
5. Sia $\overline{AB}$ un segmento di lunghezza 10 cm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\widehat{B}C$ sia retto e $B\widehat{A}C$ misuri 60°.
6. Due località A e B hanno la stessa longitudine; A ha latitudine 43° 36′ N mentre la latitudine di B è 36° 43′ N. Quanto misura in linea d'aria la distanza tra A e B? (Raggio medio della terra: 6400 km).
7. Si dimostri che una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 è ivi anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
8. Si dica se
$$f(x) = \sin(x-\pi) + \cos(3x)$$
è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.

6.26.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si consideri la parabola λ di equazione $y = kx^2$, dove $k > 0$.

a) Sia P un punto di λ del I quadrante e siano A e B le proiezioni di P rispettivamente sugli assi x e y. Si considerino le due regioni in cui λ divide il rettangolo OAPB e se ne calcolino le rispettive aree.

b) Le due regioni di cui al punto precedente, ruotando intorno all'asse x, generano due solidi. Quale è il rapporto dei loro volumi?

c) Sia S la regione compresa tra λ e la retta r di equazione $y = 3$. Si determini k in modo la massima area tra quelle dei rettangoli aventi un lato su r e inscritti in S sia uguale a 8.

d) Si dimostri che le rette tangenti a λ condotte da un punto qualsiasi della retta $y = -1/(4k)$ sono tra loro perpendicolari.

Problema 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani Oxy:

a) si disegni la curva Γ di equazione

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

e, in particolare, si dica se ammette estremi relativi o flessi.

b) Si scriva l'equazione della retta t tangente alla curva Γ nel suo punto di ascissa 8 e si determinino le coordinate dell'ulteriore punto in cui t incontra Γ.

c) Si consideri il fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse x e tra esse si determini quella che incontra Γ in due punti A e B diametralmente opposti. Si denoti con Λ tale circonferenza.

d) Si calcoli l'area delle tre parti in cui il cerchio, di cui Λ è la circonferenza, è suddiviso dagli archi OA e OB di Γ.

Questionario

1. Sia $n > 0$. Si dimostri che è
$$n! \geq 2^{n-1}.$$
2. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio r, qual è quello di superficie laterale massima?
3. Si determini il punto della parabola $y = 2x^2$ più vicino al punto di coordinate $(-2,-2)$.
4. Si discuta l'equazione
$$x^2 - (k-1)x + 2 = 0 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 2.$$
5. Si dica, giustificando la risposta, se sono esatte le uguaglianze seguenti:
$$\arcsin\big(\sin(-0.3)\big) = -0.3; \qquad \arccos\big(\cos(-0.3)\big) = -0.3;$$
$$\sin\big(\arcsin(-0.3)\big) = -0.3; \qquad \cos\big(\arccos(-0.3)\big) = -0.3.$$
6. Si determini il periodo della funzione
$$f(x) = \cos(3x) - 2\sin(2x) - 2\tan\frac{x}{2}.$$
7. Si determini l'equazione della normale alla curva $y = e^x$ nel suo punto di ascissa $x = \ln 3$.
8. Si calcoli
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}\binom{n}{k}\right].$$

6.26.5. Sessione ordinaria - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x+2} \quad \text{con} \quad x\in\mathbb{R}.$$

a) Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano, si disegni il grafico λ di $f(x)$.

b) Si provi che la retta di equazione
$$y=\frac{5}{2}x$$
interseca λ nel punto Q di ascissa 2. Quale è l'equazione della retta tangente a λ in Q?

c) Sia
$$g(x)=(-x^2-2x-3)\mathrm{e}^{-x+2}.$$
Si calcoli $g'(x)$ e si deduca da essa una primitiva di $f(x)$.

d) Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata da λ, dall'asse x e dalla retta $x=2$ e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia un valore approssimato arrotondato ai centesimi.

Problema 2

Sia $\overline{\mathrm{AC}}$ una corda della semicirconferenza di diametro $|\overline{\mathrm{AB}}|=2$. Indicato con D il punto medio dell'arco BC si consideri il quadrilatero ABDC.

a) Si calcoli l'area di ABDC in funzione di $x=|\overline{\mathrm{AC}}|$.

b) Si calcoli l'area di ABDC in funzione di $\varphi=\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{C}$.

c) Per quali valori di x e di φ l'area del quadrilatero è massima? Quanto vale tale area? Sia T tale quadrilatero massimo.

d) Il quadrilatero T è la base di un solido che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume del solido.

Questionario

1. Sia
$$f(x)=\begin{cases} x^2-5, & \text{se } x\leq 3;\\ x+2, & \text{se } x>3.\end{cases}$$
Si trovi:
$$\text{a) } \lim_{x\to 3^-} f(x); \quad \text{b) } \lim_{x\to 3^+} f(x); \quad \text{c) } \lim_{x\to 3} f(x).$$

2. Sia t una retta e P un punto non appartenente ad essa. Si dimostri che le circonferenze di assegnato raggio r, passanti per P e con centro su t sono al più due.

3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 qual è quello di volume massimo ?

4. In un riferimento cartesiano Oxy, si tracci la curva d'equazione:
$$xy-x+y-1=0.$$

5. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.
6. Si dimostri che se $f(x)$ è una funzione continua dispari definita in $\mathbb{R}$ allora
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
7. Si provi che per tutti gli x reali, si ha:
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \text{e} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$
8. Sia D la regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione
$$y = \sqrt{\sin x}$$
e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi$. Si calcoli il volume del solido generato da D in una rotazione completa attorno all'asse delle x.

6.26.6. Sessione suppletiva - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ la spezzata OABC ove è: $A(2,2)$, $B(3,1)$, $D(4,2)$.

a) Si trovi la funzione polinomiale di grado minimo il cui grafico passi per O, A, B, C.

b) Si consideri la funzione f così definita:
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \le x < 2, \\ x^2 - 6x + 10, & \text{se } 2 \le x \le 4, \end{cases}$$
e si dica se essa è continua e derivabile per $x = 2$.

c) Si denoti con S la regione compresa tra il grafico di f e l'asse x per $0 \le x \le 4$. Si calcoli l'area di S.

d) S è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliandolo con piani ortogonali all'asse x, sono tutte rettangoli la cui altezza è tripla della base. Si calcoli il volume di W.

Problema 2

Nel piano è fissato il sistema di coordinate Oxy.

a) Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ e tangente in O alla retta $y = -x$.

b) Si determini l'equazione della parabola passante per $A(2,2)$ e tangente in O alla retta $y = 3x$.

c) Sia D la parte di piano racchiusa tra le due parabole. Si calcoli l'area di D e si calcoli altresì il volume del solido che essa genera nella rotazione completa intorno all'asse y.

d) Si inscriva in D il quadrilatero di area massima avente le diagonali parallele agli assi coordinati.

Questionario

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 5, 12 e 13 dm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
2. Sia
$$F(x) = a\sin^3 x + b\sin x + 2x.$$
Si determinino le costanti a e b in modo che $F(x)$ sia una primitiva della funzione
$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$
3. Si risolva l'equazione:
$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$
4. Si inscriva in una sfera di raggio r il cono rotondo di massimo volume.
5. Sia P un punto del piano di coordinate $(a\cos t, b\sin t)$ dove è $0 \le t \le 2\pi$. Al variare di t il punto P descrive un luogo geometrico. Quale o quali proprietà geometriche caratterizzano tale luogo?
6. Si dimostri che esiste almeno un punto dell'intervallo $]0, \pi/4[$ nel quale i grafici delle funzioni
$$f(x) = \sin x + 2x\cos x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x\sin x + \cos x + \tan x$$
hanno tangenti parallele.
7. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una ed una sola soluzione α. Si determini l'intervallo di ampiezza 10^{-1} cui α appartiene.
8. Si calcoli
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

6.27. Anno scolastico 2010-2011

6.27.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri il quadrato OABC, dove $A = (1,0)$ e $C = (0,1)$.

a) Sia P un punto appartenente al lato $\overline{AB}$. Si considerino le parabole, con asse parallelo all'asse y, passanti per O e per P e tangenti al lato $\overline{BC}$. Quali sono i possibili vertici di tali parabole, al variare di P su $\overline{AB}$?

b) Tra quelle sopra indicate, si dimostri che la parabola Γ_1, tale che il segmento parabolico limitato dalla corda $\overline{OP}$ abbia area pari alla metà del quadrato OABC, ha equazione:
$$y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x.$$

c) Si determini l'equazione della parabola Γ_2 simmetrica di Γ_1 rispetto all'asse y e si calcoli l'area della regione piana delimitata dalle due parabole e dalla comune retta tangente nei loro vertici.

d) Sia r una retta di equazione $y = k$, con $k \in [0, 1]$ e siano Q e R i punti (più vicini all'asse y) in cui r taglia, rispettivamente, le parabole Γ_1 e Γ_2. Si determini il valore di k per cui risulti massima l'area del triangolo QCR.

Problema 2

Una circonferenza di centro O e raggio 4 è tangente esternamente nel punto A ad un'altra circonferenza di raggio x minore di 4. Le tangenti comuni, non passanti per A, si incontrano in un punto B.

a) Si provi che, al variare di x, la distanza $f(x)$ di B da O è data da

$$f(x) = \frac{4x + 16}{4 - x};$$

si disegni il grafico Γ di $f(x)$ prescindendo dai limiti posti ad x dal problema.

b) Sia P un punto di Γ. Si dimostri che la retta tangente a Γ in P incontra gli asintoti di Γ in due punti equidistanti da P. Si verifichi altresì che Γ ammette un centro di simmetria di cui si chiedono le coordinate.

c) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra Γ e gli assi coordinati.

d) Sia infine $g(x) = f(|x|)$.. Quale è il grafico di $g(x)$? Si determini, al variare di k il numero delle radici dell'equazione $g(x) = k$.

Questionario

1. Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione d allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a d.

2. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in [0, \pi/2]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

   a) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

   b) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx$;

   c) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

   d) nessuno di questi.

   Si motivi la risposta.

3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale a^2 quale è quello di volume massimo?

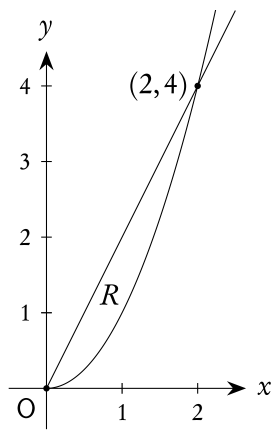
4. La curva di equazione
$$y = \sqrt{x \ln x}$$
ammette punti con tangente parallela all'asse x? Ammette punti con tangente parallela all'asse y? In caso affermativo si determinino questi punti.

5. In una circonferenza di centro O e raggio r sono date due corde prive di punti comuni $|\overline{AB}| = r$ e $|\overline{CD}| = r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.

6. Sia P un punto del piano di coordinate
$$\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right).$$
Quale è l'equazione cartesiana del luogo descritto da P al variare di t ($t \neq 0$)?

7. Si calcoli il valor medio della funzione
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$
nell'intervallo $[-1, 1]$ e se ne indichi il significato geometrico

8. La regione R è delimitata da $y = 2x$ e $y = x^2$ come mostrato nella figura seguente. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno area
$$A(x) = \sin \frac{\pi}{2} x.$$
Si determini il volume di W.



6.27.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel riferimento cartesiano Oxy si consideri il triangolo di vertici O, B(1,0), A(0,a), con $a > 0$. Preso un punto P interno al triangolo, si denotino con Q e con R i punti in cui la retta per P, parallela all'asse y, taglia i lati $\overline{OB}$ e $\overline{AB}$ rispettivamente.

a) Si dimostri che il luogo dei punti P, interni al triangolo OBA, tali che

$$\overline{QP} : \overline{QR} = \overline{OQ} : \overline{OB}$$

è un arco della parabola Γ d'equazione $y = ax(1-x)$.

b) Si verifichi che il lato $\overline{BA}$ del triangolo e la mediana ad esso relativa sono tangenti a Γ rispettivamente in B e in O.

c) Si denoti con Ω la regione delimitata da Γ e da $\overline{OB}$. In Ω, si inscriva un rettangolo con un lato su $\overline{OB}$; si stabilisca per quale valore di a il rettangolo di perimetro massimo risulta essere un quadrato.

d) Posto $a = 1/2$, si indichi con r la retta ortogonale a Γ nel punto B. Si calcoli l'area racchiusa tra r e Γ e si calcoli altresì il volume del solido generato da Ω nella rotazione attorno alla retta $y = -1$.

Problema 2

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$ di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato $\overline{CD}$ uguale al raggio. I prolungamenti dei lati $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ si incontrano in un punto E.

a) Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha:

$$D\widehat{A}C = D\widehat{B}C = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad A\widehat{E}B = \frac{\pi}{3}.$$

b) Se $x = D\widehat{A}B$, si provi che la somma $|\overline{CE}| + |\overline{DE}|$ in funzione di x è data da

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

Quale è l'intervallo di variabilità della x? Quale il valore massimo assunto da $|\overline{CE}| + |\overline{DE}|$?

c) Posto

$$g(x) = k\sin(x + \varphi)$$

si trovino k e φ in modo che sia $g(x) = f(x)$.

d) Si tracci, a prescindere dai limiti geometrici del problema, il grafico Γ di $f(x)$ e si denoti con R la regione delimitata, per

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi\right],$$

dall'asse x e da Γ. Si calcoli l'area di R e si calcoli altresì il volume del solido generato da R nella rotazione attorno all'asse x.

Questionario

1. Sia W il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la parte di piano compresa, per $x \in [0, \pi/2]$, fra il grafico di $y = \sin x$ e l'asse x. Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di W?

   A) $2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

   B) $\pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx$;

   C) $\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

   D) nessuno di questi.

   Si motivi la risposta.

2. Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede $\overline{FL}$ pari a 45°. Sapendo che $|\overline{BF}| = 12\,\text{m}$ e $|\overline{FL}| = 20\,\text{m}$ e che $B\widehat{F}L = 155°$, si spieghi ad Angelo come procedere per calcolare $|\overline{AB}|$, $|\overline{AF}|$ e $|\overline{AL}|$. Sono attendibili i risultati $|\overline{AB}| = |\overline{AF}| \cong 23,18\,\text{m}$ e $|\overline{AL}| \cong 27,85\,\text{m}$?

3. La base di un solido S è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta d'equazione: $4x + 5y = 20$. Si calcoli il volume di S sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.

4. Si spieghi perché l'equazione $\cos x = x$ ha almeno una soluzione.

5. Si risolva l'equazione $|x - 1| = 1 - |x|$.

6. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

7. Si dimostri che in un triangolo il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

8. Sia $t \in [0, 2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni

$$x = a \cos t \quad \text{e} \quad y = b \sin t?$$

6.27.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = 3 \ln(e^2 - x).$$

a) Si studi la funzione f e se ne tracci il grafico Γ.

b) La funzione f è invertibile? Se sì, quale è la sua equazione? E quale il suo grafico? Si disegnino, successivamente, anche i grafici delle funzioni definite da

$$g(x) = 3\ln|\mathrm{e}^2 - x| \quad \text{e da} \quad h(x) = -g(x)$$

illustrando le eventuali loro simmetrie.

c) Sia R la regione delimitata da Γ e dagli assi coordinati. Si calcoli l'area di R.

d) La regione R è la base di un solido W che tagliato con piani ortogonali all'asse x dà tutte sezioni rettangolari di altezza 5. Si calcoli il volume W. Supposto, invece, che la regione R ruoti di un giro completo attorno alla retta $y = -6$, come si può calcolare il volume del solido che essa genera? Si indichi solo il procedimento senza risolvere eventuali integrali.

Problema 2

In un riferimento cartesiano Oxy si consideri la semicirconferenza γ, tangente nell'origine all'asse y, passante per il punto $A(2,0)$ e appartenente al primo quadrante.

a) Sia X un punto del diametro $\overline{OA}$, distinto da O, Q il punto di γ avente la stessa ascissa di X e B il punto in cui la semiretta OQ incontra la tangente in A alla semicirconferenza. Sia P un punto della semiretta XQ tale che i due triangoli OPX e OQA abbiano uguale area. Qual è la posizione limite di P quando X tende a O? E quando tende ad A? Sia P_1 la posizione di P quando $A\widehat{O}Q = \pi/6$; si determinino le coordinate di P_1.

b) Si provi che il luogo geometrico Γ descritto da P, al variare di X su $\overline{OA}$, è il ramo, appartenente al primo quadrante, della curva di equazione

$$xy^2 + 4x - 8 = 0.$$

c) Si disegni Γ.

d) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione piana limitata dalla retta OP_1, da Γ e dall'asse x.

Questionario

1. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro dato.
2. Si consideri la regione R del primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, delimitata dal grafico di $t = \mathrm{e}^{-2x}$, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 3$. R è la base di un solido W che, tagliato con piani perpendicolari all'asse x, dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di W.
3. Si calcoli l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 0$ a $x = 5$ e con l'aiuto di una calcolatrice se ne dia il valore arrotondato con tre cifre decimali.
4. Sia $\overline{AB}$ un segmento di lunghezza 5 dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\widehat{B}C$ sia retto e $B\widehat{A}C$ misuri 60°.
5. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?
6. Si risolva l'equazione
$$\binom{x}{2} + 4 = \binom{x+1}{2}.$$

7. Si dica se
$$f(x)=\sin(x-\pi)+\cos(3x)$$
è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo.

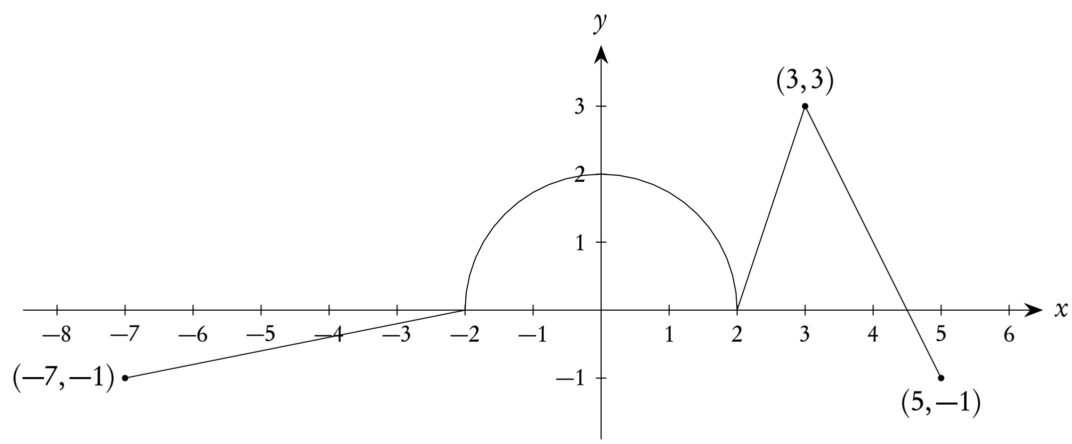
6.28. Anno scolastico 2011-2012

6.28.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

La funzione f è definita e derivabile sull'intervallo chiuso $[-7,5]$ ed è $f(0)=5$. Il grafico di $y=f'(x)$, la derivata di f, consiste di tre segmenti e una semicirconferenza di raggio 2 e centro in O, come indicato nella figura seguente.



a) Si determinino $f(3)$ e $f(-2)$.

b) Si determinino le ascisse di ciascun punto di flesso del grafico di $y=f(x)$, illustrando ragionamento seguito.

c) La funzione g è definita da
$$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2.$$
Si determinino le ascisse, con $-7<x<5$, dei punti critici di g, specificando se si tratta di massimo, di minimo o né l'uno né l'altro ed esponendo il ragionamento seguito.

Problema 2

Si consideri l'arco $\widehat{AB}$, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 1.

a) Sia C un punto di $\widehat{AB}$, M il punto medio della corda $\overline{AC}$ e D il punto di incontro delle rette $\underline{OM}$ e BC. Si provi che il triangolo CMD è rettangolo isoscele qualunque sia la scelta di C sull'arco $\widehat{AB}$, e, successivamente, si esprima in funzione di $x = |\overline{AC}|$ il rapporto

$$\frac{|\overline{CD}|^2}{|\overline{AM}|^2 + |\overline{OA}|^2}$$

controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+4}.$$

b) Si studi la funzione $f(x)$, si tracci il suo grafico indipendentemente dai limiti geometrici e, indicato con γ il ramo appartenente al primo quadrante, si dica se esiste su γ un punto di ordinata massima e, in caso affermativo, lo si determini.

c) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta r, tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto T di ascissa 2.

Questionario

1. Quante sono tutte le funzioni iniettive da un insieme A di n elementi in un insieme B di m elementi?
2. Tra tutti i settori circolari che hanno un perimetro di 100 metri, si determini quello di area massima.
3. Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico di
$$y = \sqrt{x-1},$$
la retta $x = 10$ e l'asse x. Si trovi il volume del solido generato da R nella rotazione attorno alla retta $y = -1$.
4. Si determini l'equazione della normale alla curva $y = e^{-x}$ nel suo punto di ascissa $x = \ln 4$.
5. Fra tutti i parallelepipedi a base quadrata con diagonale di misura d, si determini quello di volume massimo.
6. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x) + 3x}{\sin(5x)}.$$
7. Sia $\overline{AB}$ un segmento di lunghezza 20 dm. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali $A\widehat{B}C$ sia retto e $B\widehat{A}C$ misuri 60°.
8. Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono: 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0?

6.28.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo ABC è equilatero di lato unitario. La retta r parallela ad $\overline{AB}$ interseca i lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, rispettivamente, nei punti P e Q.

a) Si indichi con x la distanza di r dal vertice C. Per quale valore di x, nel quadrilatero ABQP si può inscrivere una circonferenza? Quale è la lunghezza del suo raggio?

b) Si esprima in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABQP, verificando che si ottiene la funzione:

$$f(x) = \frac{4x^2}{3-4x^2}.$$

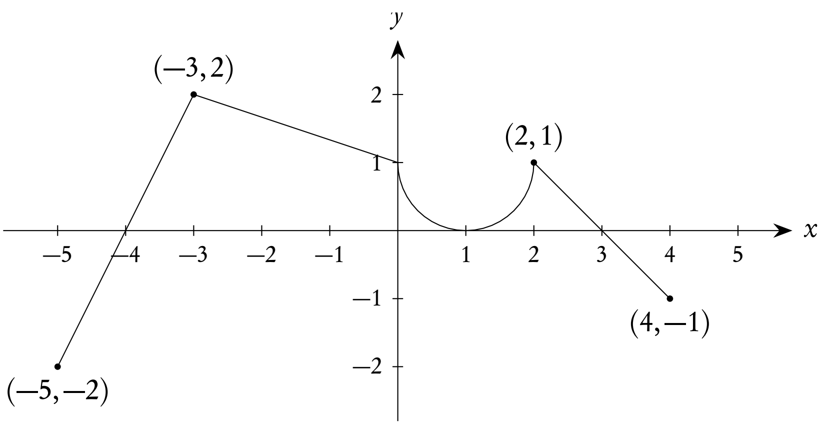
Il rapporto $f(x)$ assume tutti i valori reali positivi? Si giustifichi la risposta.

c) Si studi la funzione f senza tener conto dei limiti geometrici del problema e se ne tracci il grafico γ.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ e dalla retta di equazione $y = 2$.

Problema 2

Il grafico della funzione g, disegnato di seguito, consiste di tre segmenti e di una semicirconferenza (con raggio 1 e centro $(1,1)$).



Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \int_{-3}^{x} g(t)\,dt.$$

1. Si determinino $f(0)$ e $f'(0)$.
2. Si trovi il valore di x, $-5 < x < 4$, in cui f presenta il massimo assoluto e si trovi altresì il minimo assoluto di f nell'intervallo chiuso, $-5 \leq x \leq 4$.
3. Si trovino i valori di x, $-5 < x < 4$, in cui il grafico di f presenta punti di flesso.

Questionario

1. Un docente deve scegliere 4 studenti cui affidare un compito tra i 10 che ne hanno fatto richiesta. Quante scelte può fare?

2. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{2-x}{x}}}.$$

3. Sia
$$f(x) = \frac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)};$$
si calcoli $f'(x)$.

4. Sia R la regione del piano racchiusa tra il grafico di
$$y = \sqrt{x-1},$$
la retta $x = 10$ e l'asse x. Si trovi l'area di R.

5. Una particella si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua velocità v al tempo t, per $0 \le t \le 5$, è data da
$$v(t) = \ln(t^2 - 3t + 3).$$
Qual è l'accelerazione della particella al tempo $t = 4$?

6. Dato l'insieme $A = \{1, 2, 5, 8\}$: determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A, considerando che sono ammesse le ripetizioni.

7. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad una sfera di raggio r.

8. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Come si può procedere per esprimere il volume del tronco in funzione di a, b e h?

6.28.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

È data la funzione
$$f(x) = x^3 + kx^2 + 2.$$

a) Si determini k in modo che il grafico di $f(x)$ risulti tangente alla retta $y = 6$.

b) Verificato che la condizione di cui al precedente punto è soddisfatta per $k = 3$, si studi la funzione ottenuta e se ne disegni il grafico γ.

c) Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta di equazione $y = 6$ e dalla curva γ.

d) Si provi che ogni retta per $A(-1, 4)$ interseca γ in due punti P e Q equidistanti da A.

Problema 2

Sono assegnate la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 - 1}$$

e la semicirconferenza Γ di diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$.

a) Si studi la funzione f e se ne tracci il grafico .

b) Sia C un punto di Γ e D il punto in cui la bisettrice dell'angolo $\mathsf{B}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{C}$ incontra l'arco $\widehat{\mathsf{BC}}$. Si esprima, in funzione dell'ampiezza α dell'angolo $\mathsf{B}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{D}$, il rapporto

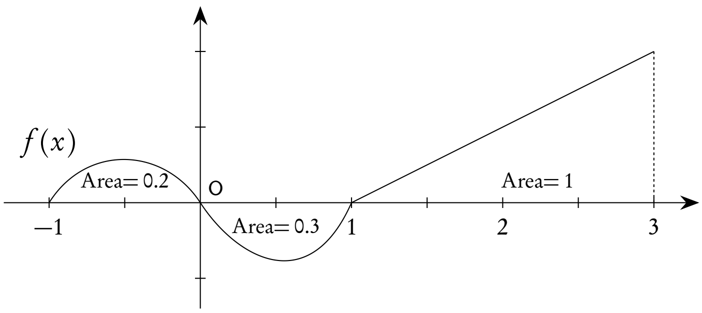
$$R(\alpha) = \frac{|\overline{\mathsf{AD}}|}{|\overline{\mathsf{AC}}|}.$$

c) Si determinino, se esistono, il valore minimo e il valore massimo di $R(\alpha)$.

d) Si mostri che, con la sostituzione $\cos\alpha = x$, $R(x)$ corrisponde ad una restrizione di $f(x)$ ad un opportuno intervallo.

Questionario

1. Si calcoli, esplicitando il procedimento seguito, il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 30 cm.
2. Sapendo che i lati di un triangolo sono lunghi rispettivamente $2a$, $3a$ e $4a$, dove a è un parametro reale positivo, si stabilisca se il triangolo è acutangolo, rettangolo oppure ottusangolo.
3. Un serbatoio d'acqua ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 3 metri. Si dica quanti litri d'acqua il serbatoio può contenere.
4. In un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ sono assegnati i punti $\mathsf{A}(-1,0)$ e $\mathsf{B}(1,0)$. Si determini un punto C dell'asse y in modo che l'angolo $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B}$ abbia ampiezza $\pi/3$.
5. Se
$$3\binom{n}{3} = 2\binom{n}{4},$$
quanto vale n?
6. Si mostri che le due parabole di equazioni
$$y = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad y = -x^2 + 6x - 8$$
si corrispondono in una simmetria centrale, di cui si chiede il centro.
7. Si determinino gli estremi relativi della funzione
$$F(x) = \int_0^x \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \mathrm{d}t.$$
8. La funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[-1,3]$. Nel grafico, rappresentato in figura, sono indicate le aree limitate dalla curva e dall'asse x, nei relativi intervalli.



Si calcoli

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6.28.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Le funzioni f e g sono definite da

$$f(x) = 2\sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 12 - 2x.$$

Sia R la regione delimitata dai grafici di f e g e dall'asse x.

1. Si calcoli l'area di R.
2. La regione R è la base di un solido le cui sezioni, perpendicolari all'asse x, sono tutti quadrati. Si calcoli il volume del solido.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Esiste un punto P appartenente al grafico di f in cui la retta tangente al grafico è perpendicolare al grafico di g? Se sì, quali sono le coordinate di P?

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane $\mathsf{O}xy$, si consideri una parabola d'equazione $y = ax^2$ con a numero reale.

a) Si descriva come varia il grafico della parabola al variare di a.

b) Si determini a in modo che la parabola corrispondente λ stacchi sulla retta r d'equazione $y = x + 4$, nel semipiano delle ordinate positive, un segmento $\overline{\mathsf{PQ}}$ di lunghezza $6\sqrt{2}$.

c) Sia A il punto in cui la retta r taglia l'asse delle x. Si calcolino l'area del triangolo mistilineo APQ e l'area del segmento parabolico di base $\overline{\mathsf{PQ}}$.

d) Si determini il punto M dell'arco di λ di estremi P e Q per il quale è massima l'area del triangolo PMQ.

Questionario

1. Si dica, giustificando la risposta, se le due funzioni
$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1) \quad \text{e} \quad g(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$$
hanno lo stesso campo di esistenza.
2. Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
3. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che
$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
4. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
5. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 — 1704) e la si applichi per dimostrare che è:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2012}}{2^x} = 0.$$
6. Data la funzione
$$y = \frac{\arctan x}{x}$$
se ne scriva un prolungamento continuo in $\mathbb{R}$.
7. Se
$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$$
con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
8. Nel piano riferito a un sistema di coordinate Oxy, si consideri la regione R delimitata dal grafico di $y = e^x$, dagli assi coordinati e dalla retta $x = \ln(1/2)$. Si calcoli l'area di R.

6.28.5. Sessione ordinaria - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Siano f e g le funzioni definite per ogni x reale da
$$f(x) = x + e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = x - e^{-x}.$$

1. Si disegnino, in un riferimento cartesiano Oxy, i rispettivi grafici γ_1 e γ_2 e si mostri che ammettono entrambi, per $x \to +\infty$, la retta $y = x$ come asintoto obliquo.

2. Si determinino le coordinate del punto di γ_1 in cui la tangente risulta perpendicolare all'asintoto.
3. Si provi che γ_2 incontra l'asse x in un punto di ascissa x_0, con $1/2 < x_0 < 1$.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve e dalle rette $x = 0$ e$x = 1$.

Problema 2

Sia C un punto di una semicirconferenza di raggio unitario e D la sua proiezione sul diametro $\overline{\mathsf{AB}}$.

a) Si esprima in funzione di $x = |\overline{\mathsf{DA}}|$ l'area S del triangolo ACD controllando che risulta

$$S(x) = \frac{x}{2}\sqrt{2x - x^2}.$$

b) Si evidenzi l'intervallo I in cui può variare x, accettando anche i casi limite in cui il triangolo è degenere.

c) Per quali valori di $x \in I$ l'area S cresce? Per quali decresce? Qual è il suo valore massimo? Qual è, in questo caso, l'ampiezza dell'angolo $\mathsf{C}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{D}$?

d) Si disegni il grafico della funzione $S(x)$ in un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ e si determinino, se esistono, i punti in cui la tangente risulta parallela all'asse x o all'asse y.

Questionario

1. Si spieghi perché il teorema di Carnot costituisce una generalizzazione del teorema di Pitagora.
2. Qual è il *dominio* della funzione
$$f(x) = \sqrt{2\sin x - 1};$$
quale il *codominio*?
3. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di
$$f(x) = x\ln(2x)$$
nel suo punto di incontro con l'asse x.
4. Un trapezio rettangolo ABCD è circoscritto ad una circonferenza di raggio r, tangente nel punto T al lato obliquo $\overline{\mathsf{BC}}$. Se x ed y sono le misure dei due segmenti in cui T divide il lato $\overline{\mathsf{BC}}$, si mostri che vale la relazione $xy = r^2$.
5. Il regista di una compagnia teatrale può disporre di cinque attori e di quattro attrici principali. Dovendo rappresentare "*Romeo e Giulietta*", in quanti modi può assegnare le parti di Romeo, Giulietta e Mercuzio?
6. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla parabola di equazione $y = x^2$ e circonferenza di equazione
$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$
7. In un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ sono assegnati i punti $\mathsf{A}(-1,0)$ e $\mathsf{B}(1,0)$. Si determini un punto C dell'asse y in modo che l'angolo $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B}$ abbia ampiezza $\pi/4$.
8. Si determini il cono di volume minimo circoscritto ad un cilindro di raggio 1 e altezza 3.

6.28.6. Sessione suppletiva - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ è assegnata la funzione f definita da

$$f(x) = -x^3 + 3|x|.$$

1. Si tracci il grafico γ di $f(x)$. Indicati con A e con B, rispettivamente, i punti di γ di ascissa 1 e -1, si provi che l'area del triangolo OAB è uguale a quella del triangolo mistilineo individuato dal segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ e dai due archi OA e OB della curva stessa.
2. Si mostri che la retta tangente nel punto A incontra la curva γ in un ulteriore punto C la cui ascissa x_{C} è compresa tra -1 e 0.
3. Si dica se si può applicare ad $f(x)$ il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 0]$ e, in caso affermativo, si determini il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.
4. Si dica se si può applicare ad $f(x)$ il teorema di Rolle nell'intervallo $[x_{\mathsf{C}}, 0]$ e, in caso affermativo, si determini il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema stesso.

Problema 2

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco $\widehat{\mathsf{AB}}$ un punto P.

1. Si esprima in funzione di
$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{con} \quad x = \mathsf{B}\hat{\mathsf{O}}\mathsf{P}$$
l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi $\overline{\mathsf{OA}}$ e $\overline{\mathsf{OB}}$.
2. Si studi la funzione $f(t)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°$, $\sin 36°$.
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva
$$y = x \sin x$$
è tangente alla retta $y = x$ quando $\sin x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\sin x = -1$.
3. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche
$$x = e^t + 2 \quad \text{e} \quad y = e^{-t} + 3$$
nel suo punto di coordinate $(3, 4)$.

4. Si spieghi perché la derivata di e^x è e^x essendo e il numero di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550 − 1617)].
5. Se
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3,$$
per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
6. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
7. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di W.
8. Si calcoli l'integrale indefinito
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$
e, successivamente, si verifichi che il risultato di
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$
è in accordo con il suo significato geometrico.

6.29. Anno scolastico 2012-2013

6.29.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un riferimento cartesiano Oxy siano C_1 e C_2 le circonferenze di equazioni
$$x^2 + y^2 + 4x = 12 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x = 12.$$

a) Si determinino le coordinate dei punti A e B comuni alle due circonferenze e si calcoli l'area della regione di piano Σ comune ai due cerchi.

b) Fra tutti i rettangoli inscritti in Σ e aventi i lati paralleli agli assi cartesiani, si determini quello di perimetro massimo.

c) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di Σ attorno all'asse x.

d) Scelto un punto P su C_1, si indichi con Q l'ulteriore intersezione di C_2 con la retta PA e si provi che il triangolo PQB è equilatero. Si determini la posizione di P affinché il triangolo abbia lato massimo.

Problema 2

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

per tutti i numeri reali $x > 0$.

a) Si studi f e se ne tracci il grafico Φ indicando le coordinate degli eventuali punti di massimo, di minimo o di flesso.

b) Si scriva l'equazione della tangente a Φ nel punto $x = e^2$.

c) Si calcoli l'area della parte di piano delimitata da Φ e dall'asse x sull'intervallo $[1,4]$ e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia il valore arrotondato con due cifre decimali.

d) Si disegni la curva simmetrica di Φ rispetto all'asse y e se ne scriva l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di Φ rispetto alla retta $y = x$.

Questionario

1. Dato un triangolo ABC, si indichi con M il punto medio del lato $\overline{BC}$. Si dimostri che la mediana $\overline{AM}$ è il luogo geometrico dei punti P del triangolo, tali che i triangoli ABP e ACP hanno aree uguali.
2. In un libro si legge: "*Ogni misura di grandezza implica una nozione approssimativa di numero reale*". Si chiede di spiegare, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale frase.
3. Si verifichi l'identità:
$$2\cot(2\alpha) + \tan\alpha = \cot\alpha.$$
4. È appropriato definire una *retta tangente* a una curva C in un punto P di C come una retta che ha un solo punto in comune con C? Si motivi esaurientemente la risposta.
5. Si faccia un esempio di una funzione, definita per tutti i numeri reali x , che sia priva di derivata:
   a) in un certo punto;
   b) in più punti;
   c) in infiniti punti.
6. Un cono rotondo ha altezza $h = 5\,\text{dm}$ e raggio $r = 3\,\text{dm}$. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 30%. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.
7. Si vogliono costruire, con un determinato materiale, delle scatole, senza coperchio, aventi una base quadrata e facce rettangolari. Se si vuole che il volume di ogni scatola sia $256\,\text{dm}^3$ quali sono le dimensioni della scatola che richiedono la minima quantità di materiale?
8. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione
$$y = 1 + \tan x$$
e dall'asse x nell'intervallo $0 \le x \le \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

6.29.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

È data la semicirconferenza Γ di centro C e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$. Sia t la semiretta tangente a Γ in B e giacente nello stesso semipiano di Γ rispetto ad $\overline{\mathsf{AB}}$.

a) Da un punto D di t, distinto da B, si conduca l'altra tangente a Γ e si indichi con E il punto di tangenza. Dal centro C si conduca una semiretta parallela a $\overline{\mathsf{DE}}$ che tagli t in F. Si provi che il triangolo FDC è isoscele.

b) Posto $x = |\overline{\mathsf{DB}}|$ e $y = |\overline{\mathsf{DF}}|$ si provi che

$$y = \frac{x^2+1}{2x}.$$

Si determini l'intervallo in cui può variare x e, in corrispondenza, quello in cui varia y.

c) Si tracci il grafico Φ della $y = f(x)$, senza tener conto dei limiti posti dal problema geometrico, e si indichi con s il suo asintoto obliquo.

d) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano delimitata da Φ, da s e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

Problema 2

Sia R la regione del primo quadrante degli assi cartesiani delimitata da

$$y = \sqrt{x} \quad \text{e da} \quad y = \frac{x}{4}.$$

a) Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di R.

b) Si disegni la regione piana simmetrica di R rispetto alla retta $y = 4$, e si scrivano le equazioni delle curve che la delimitano.

c) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione di R attorno alla retta $y = 4$.

d) R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse y sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Questionario

1. Un trapezio è inscritto in un semicerchio di raggio 2 con una base coincidente con il diametro del cerchio. Si trovi l'area massima del trapezio.
2. In un libro si legge: "*La definizione classica di misura di un angolo per mezzo della lunghezza di un arco di cerchio è essenzialmente corretta*". Si spieghi, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale affermazione.
3. Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 9 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo?

4. Si provi che l'equazione
$$x^4+4x^3+6x^2-1=0$$
ammette nell'intervallo $[0,1]$ un'unica soluzione.
5. Il volume di una sfera è pari ai 2/3 del cilindro ad essa circoscritto. È questo uno dei risultati più noti che si attribuisce ad Archimede tant'è che una sfera e un cilindro furono scolpiti sulla sua tomba. Si ritrovi tale risultato mediante l'applicazione del calcolo integrale.
6. Un cono rotondo ha altezza $h=7\,\text{dm}$ e raggio $r=4\,\text{dm}$. Si vuole diminuire la prima di quanto si aumenta il secondo in modo che il volume del cono aumenti del 25%. Si dica se la questione ammette soluzioni e, in caso affermativo, si dica quali sono.
7. Data la funzione definita da:
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & \text{se } x<2,\\ bx+c, & \text{se } x\geq 2,\end{cases}$$
si determini la terna ordinata (a,b,c) in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:
   a) $f(x)$ è continua;
   b) $f(3)=20$;
   c) $\lim_{x\to -2} f(x)=0$.
8. Si verifichi l'identità:
$$\tan(45°+\alpha)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

6.29.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia f la funzione definita per tutti gli $x\leq 1$ da
$$f(x)=x\sqrt{1-x}.$$

a) Si disegni il grafico di f e si disegni altresì il grafico G della curva d'equazione
$$y^2=x^2(1-x).$$
b) Si scrivano le equazioni delle tangenti a G nel punto O.
c) Si determini l'area della regione R delimitata da G per $0\leq x\leq 1$.
d) Si calcoli il volume del solido che la regione R genera ruotando di mezzo giro attorno all'asse x.

Problema 2

Siano r e s le perpendicolari, rispettivamente in A e in B, al segmento $|\overline{AB}| = 4a$. Un punto P, interno alla striscia individuata da r e s, si trova a distanza $|\overline{PK}| = a$ dalla retta r e a distanza $|\overline{PH}| = x$ dal segmento $\overline{AB}$. Siano C e D le rispettive intersezioni delle rette AP e BP con s e r.

a) Si determinino in funzione di a e di x le aree dei triangoli ABP, ADP, DCP, CBP, verificando che ABP e DCP hanno uguale area.

b) Dopo aver posto $a = 1$, si esprima in funzione di x il rapporto h tra la somma delle aree dei triangoli ABP e DCP e la somma delle aree dei quadrati costruiti su $\overline{PA}$ e su $\overline{PB}$ controllando che risulta

$$h(x) = \frac{2x}{x^2+5}.$$

Si tracci il grafico Γ di $h(x)$ prescindendo dalla questione geometrica.

c) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dall'asse x nell'intervallo $[0, \sqrt{5}]$.

d) Si determini per quale posizione di P le rette AC e BD sono tra loro perpendicolari e si mostri che, in questo caso particolare, le ampiezze degli angoli $B\widehat{A}C$ e $A\widehat{B}D$ sono uguali, rispettivamente, a 60° e 30°.

Questionario

1. Si calcoli il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 12 cm sapendo che esso è sezione aurea del raggio.

2. Le lettere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri interi, razionali e reali. Gli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono entrambi equipotenti a $\mathbb{Z}$? Si motivi la risposta.

3. Si illustri la regola di L'Hôpital e la si applichi per calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \dfrac{x}{4}}{2x^2}.$$

4. Le aree delle sezioni di un cono circolare retto con un piano perpendicolare all'asse, sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice. Indicato con α l'angolo di semiapertura del cono, si esprima, in funzione di α, la costante di proporzionalità e se ne determini il valore nel caso del cono equilatero.

5. Sia

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

Si provi che esiste un unico reale a tale che $g(a) = 0$.

6. Quanti sono i numeri di 6 cifre con almeno una cifra dispari? E quelli con almeno una cifra pari?

7. Sia P un punto di coordinate

$$(t, \sqrt{1-t^2}) \quad \text{con} \quad t \in]-1, 1[.$$

Qual è l'equazione cartesiana della curva descritta da P al variare di t?

8. Dato che
$$f(x)+2f(8-x)=x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
si calcoli $f(2)$.

6.29.4. Sessione suppletiva - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia R la regione del primo quadrante degli assi di riferimento racchiusa dai grafici di
$$y=\sqrt{x} \quad \text{e} \quad y=\frac{x}{3}.$$
Si affrontino le seguenti questioni illustrando adeguatamente i procedimenti seguiti.

a) Si calcoli l'area di R.

b) R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono tutti quadrati. Si calcoli il volume di W.

c) Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno alla retta $y=-1$.

d) Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno alla retta $x=-1$.

Problema 2

È dato un triangolo equilatero ABC di lato unitario.

a) Da un punto P del lato $\overline{\mathsf{BC}}$, distante x da C, si conducano le parallele agli altri due lati, fino ad incontrare il lato $\overline{\mathsf{AB}}$ nel punto Q e il lato $\overline{\mathsf{AC}}$ nel punto R. Se con S_1 e S_2 si denotano le aree dei triangoli CRP e PQB e con S_3 l'area del quadrilatero ARPQ, si mostri che
$$S_3=2\sqrt{S_1\cdot S_2}.$$

b) Si denoti con $f(x)$ il rapporto
$$\frac{S_1}{S_3+S_2}.$$
Verificato che
$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2},$$
si tracci il grafico Γ di$f(x)$ prescindendo dalla questione geometrica.

c) Per quali valori di k una retta di equazione $y=k$ incontra Γ in due punti reali e distinti? Si giustifichi la risposta.

d) Si scrivano le equazioni della retta tangente e della retta normale a Γ nel suo punto di ascissa 2.

Questionario

1. Si illustri la regola di L'Hôpital e la si applichi per calcolare:
$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x}.$$
2. Sia P un punto di coordinate
$$(4t+3, 16t^2-9) \quad \text{con} \quad t\in\mathbb{R}.$$
Qual è l'equazione cartesiana della curva descritta da P al variare di t?
3. Tra i coni circolari retti aventi apotema 10 cm si determini il raggio di base di quello di volume massimo.
4. Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?
5. Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:
$$|\overline{\mathsf{BC}}| = 10, \quad \cos\widehat{\mathsf{A}} = \frac{4}{5}, \quad \cos\widehat{\mathsf{B}} = \frac{7}{25};$$
quanto misurano i lati $\overline{\mathsf{AB}}$ e $\overline{\mathsf{AC}}$?
6. Si esponga il teorema della media integrale, fornendo una applicazione.
7. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
8. Sia
$$h(x) = x^2 + \ln x - 4.$$
Si provi che esiste un unico reale $a \in [1,2]$ tale che $h(a) = 0$.

6.29.5. Sessione ordinaria - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Due circonferenze, di raggio 2 e 1 rispettivamente, sono tangenti internamente nel punto A. Una retta secante entrambe, perpendicolare alla retta r dei loro centri e avente distanza x dal punto A, incontra la circonferenza minore nei punti M ed N e la maggiore nei punti P e Q.

1. La retta parallela a r passante per P, incontra la circonferenza maggiore nel punto P′. Si determini il valore minimo della somma delle aree dei quadrati di lati $\overline{\mathsf{AP}}$ e $\overline{\mathsf{PP'}}$.
2. Si esprima in funzione di x il rapporto h delle aree dei quadrati di lati $\overline{\mathsf{MN}}$ e $\overline{\mathsf{PQ}}$ controllando che risulta
$$h(x) = \frac{2-x}{4-x}.$$
3. Si tracci il grafico Γ di $h(x)$ prescindendo dalla questione geometrica.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dall'asse x sull'intervallo $[0,2]$.

Problema 2

In un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$ è data la parabola γ di equazione $y = x^2$. Sia P un punto di γ di ascissa $t \neq 0$.

1. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto P e si indichino con Q ed R le rispettive intersezioni con l'asse y.
2. Nel caso in cui P abbia ascissa uguale a 1, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da γ, dalla retta tangente e dall'asse y.
3. Si determini in funzione di t il rapporto Y delle aree dei triangoli OPR e QPR controllando che risulta
$$Y(t) = \frac{2t^2+1}{4t^2+1};$$
Y assume un valore massimo e un valore minimo? Si giustifichi la risposta.
4. Si disegni il grafico di $Y(t)$ in un riferimento cartesiano $\mathsf{O}tY$.

Questionario

1. Si calcoli
$$\int \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x.$$
2. Si determini il cono di volume minimo circoscritto al cilindro equilatero di raggio 12 cm.
3. Sia
$$h(x) = \left(f(x) - \sqrt{x+1}\right) \ln x$$
dove $f(x)$ è una funzione derivabile per $x > 0$. Si scelga $f(x)$ in modo che $h'(x)$ si annulli almeno una volta nell'intervallo $[1,3]$.
4. Si illustri la regola di L'Hôpital e la si applichi per calcolare:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 4x^2 + 1}{7x^3 + 2x - 6}.$$
5. Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.
6. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
7. Da un gruppo di 8 donne e 6 uomini deve essere scelta una commissione formata da 3 donne e 3 uomini. Quante diverse commissioni si possono formare?
8. Sia R la regione delimitata da $y = 3\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. Si calcoli il volume del solido che R genera ruotando di un giro completo intorno alla retta d'equazione $x = -1$.

6.29.6. Sessione suppletiva - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia R la regione del primo quadrante degli assi di riferimento racchiusa dalla curva d'equazione $y = x^3$ e dalla retta ad essa perpendicolare passante per il punto $(4, 0)$.

a) Si calcoli l'area di R.

b) R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono tutti quadrati. Si calcoli il volume di W.

c) Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno alla retta $y = -1$.

d) Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno alla retta $x = -1$.

Problema 2

Data una semicirconferenza di centro O e diametro $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2$, si assuma su di essa un punto P in modo che l'angolo $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{P} = \alpha$ sia acuto.

a) Si consideri la circonferenza Γ tangente tanto al diametro quanto, nel punto P, alla semicirconferenza e si dimostri che il centro C di tale circonferenza appartiene al raggio $\overline{\mathsf{OP}}$.

b) Si provi che il raggio y di Γ in funzione dell'angolo α è dato da

$$y = \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

c) Si disegni la curva descritta da C quando P varia sulla semicirconferenza e si calcoli l'area che tale curva delimita con il diametro $\overline{\mathsf{AB}}$.

d) Posto

$$x = \tan\frac{\alpha}{2},$$

si esprima y in funzione di x. Si studi e si rappresenti graficamente la funzione $y = f(x)$ senza tenere conto delle limitazioni di natura geometrica poste ad x dal problema.

Questionario

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18°$ e $\sin 36°$.

2. Si illustri la regola di L'Hôpital e la si applichi per calcolare:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \dfrac{\pi}{2}}{\cos x}.$$

3. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche

$$x = \mathrm{e}^t + 2 \quad \text{e} \quad y = \mathrm{e}^{-t} + 3$$

nel suo punto di coordinate $(3, 4)$.

4. Il numero e di *Nepero*: come ottenerne il valore e perché è importante?

5. Si consideri il settore circolare S di raggio r e angolo α. Si trovi il valore di α, in radianti, per cui il rapporto tra l'area di S e il quadrato del suo perimetro è massimo.
6. La regione R delimitata dal grafico di
$$y = 2\sqrt{x}$$
dall'asse x e dalla retta $x = 1$ è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di W.
7. Per quale o quali valori di $n \in \mathbb{N}$ è
$$\binom{n}{n-2} = 4n?$$
8. Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 12 cm si determini quello di volume massimo.

6.30. Anno scolastico 2013-2014

6.30.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

La circonferenza Σ_1 di centro C e raggio $a = 1$, appartiene al semipiano delle y positive ed è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento.

a) Da un punto P dell'asse x, distinto da O, si conduca l'ulteriore tangente a Σ_1 e si indichi con T il punto di tangenza. Successivamente, si consideri la circonferenza Σ_2 tangente esternamente a Σ_1 nel punto T e tangente altresì all'asse x in un punto A; si denoti con B il centro di Σ_2 e con b il suo raggio. Si dimostri che i triangoli OTA e CPB sono entrambi rettangoli e che $|\overline{\mathsf{OP}}|^2 = ab$.

b) Qual è il luogo geometrico descritto da B al variare di P sull'asse x?

c) Sia
$$f(x) = |x|(x^2 + 1).$$
Si mostri che $f(x)$ esprime l'area S del quadrilatero OABC in funzione dell'ascissa x di P.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico Γ di $f(x)$ e dalle rette di equazione $y = x$ e $y = -x + 3$.

Problema 2

Si consideri, in un riferimento cartesiano $\mathsf{O}xy$, la funzione
$$f(x) = x(x-1)(x-k) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Si dica come varia il grafico di $f(x)$ al variare di k ($k \leq 0$, $0 < k \leq 1$, $k > 1$).

b) Per quali valori di k le due regioni delimitate dal grafico di $f(x)$ e dall'asse x (una posta al di sopra, l'altra al di sotto dell'asse x) hanno aree uguali?

c) Si ponga $k = 2$ e sia Γ il grafico corrispondente. Preso un punto P di Γ avente ascissa compresa tra 0 e 1, si indichino con Q e R le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate. L'area e il perimetro del rettangolo OQPR ammettono entrambi un valore massimo?

d) Sia R la regione finita delimitata da Γ e dalla retta t tangente a Γ nell'origine O. Si consideri il solido W di base R, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono tutti semicerchi i cui diametri hanno gli estremi uno su t l'altro su Γ. Qual è l'altezza massima del solido W? Si calcoli il volume di W.

Questionario

1. Si determini, se esiste, un cono circolare retto tale che il suo volume e la sua superficie totale abbiano lo stesso valore numerico.
2. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\sin 3x\right)}{\ln\left(\sin x\right)}.$$
3. Si trovi un polinomio di terzo grado $p(x)$ che si annulli per $x = -3$ e tale che la retta tangente alla curva $y = p(x)$ nel suo punto di ascissa zero abbia equazione $2x + y - 6 = 0$.
4. Lo sviluppo della potenza
$$\left(x^3 + y^k\right)^{20}$$
contiene il termine la cui parte letterale è: $x^{21}y^{26}$. Si trovi il valore di k.
5. Una targa d'argento ha la forma di un rettangolo di area $600\,\mathrm{cm}^2$. La zona dove va incisa l'iscrizione è anch'essa rettangolare ed è posta a $2\,\mathrm{cm}$ sia dal lato superiore sia dal lato inferiore della targa, lasciando inoltre un bordo di $3\,\mathrm{cm}$ a sinistra e di $3\,\mathrm{cm}$ a destra. Si determinino le dimensioni della targa in modo che sia massima l'area della zona dedicata all'incisione e si calcoli la percentuale dell'area totale da essa occupata.
6. Si spieghi perché le facce di un poliedro regolare sono tutti triangoli, tutti quadrati o tutti pentagoni.
7. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli di un triangolo i cui lati misurano 10, 24 e 26 decimetri.
8. Siano x_1 e x_2 gli zeri di
$$P(x) = x^2 - x - 2014,$$
con $x_1 < x_2$. Siano x_3 e x_4 gli zeri di
$$Q(x) = x^2 - 2x - 2014,$$
con $x_3 < x_4$. Si calcoli
$$(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1).$$

6.30.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left| e^{2x} - 3e^{x} \right|.$$

a) Si mostri che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Si disegni il grafico Γ di $f(x)$.

c) Si dica se alla funzione $f(x)$ si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $[0, \ln 2]$ e il teorema di Lagrange nell'intervallo $[1, 2]$, giustificando le risposte.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dall'asse x sull'intervallo $[0, \ln 2]$.

Problema 2

I lati di un triangolo rettangolo misurano k , $2k$ e $\sqrt{5}k$, essendo k un numero reale positivo.

a) Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo. Si determini k in modo che l'altezza relativa all'ipotenusa abbia lunghezza uguale a 2 e si determinino le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

b) Una retta parallela all'ipotenusa, avente distanza x dal vertice dell'angolo retto, divide il triangolo in un triangolo T e un quadrilatero Q. Si mostri che il rapporto tra l'area di T e l'area di Q, in funzione di x, è uguale a

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

c) Si tracci il grafico Γ di $f(x)$ senza tener conto dei limiti geometrici.

d) Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata da Γ e dalle rette di equazioni $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$.

Questionario

1. Si calcoli:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x^2}.$$

2. Per quali valori reali di x è:

$$\frac{1}{10}\left(-x^2 + 3x + 10\right)^{x^2-6x+1} = 1\,?$$

3. È possibile che nello sviluppo della potenza

$$\left(2a^2 - 3b^3\right)^7$$

compaia il monomio $ka^{10}b^6$? E il monomio ka^8b^8? (k numero reale). Nel caso affermativo si trovi il valore di k motivando esaurientemente la risposta.

4. Sia R la regione racchiusa tra $y = e^{-2x}$ e $y = 0$ per $0 \le x \le 1$. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa di R attorno all'asse x.

5. Si provi l'identità:
$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$
6. Si trovi la capacità in litri della sfera inscritta in un cono di raggio di base 6 dm e altezza 9 dm.
7. Sapendo che
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$
(ove è $i^2 = -1$) si dimostri che
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$
8. Quanti colori si possono formare mediante le combinazioni dei sette colori fondamentali dello spettro? (contando, cioè, i colori presi separatamente e a 2 a 2, a 3 a 3,..., a 7 a 7).

6.30.3. Sessione ordinaria - America latina

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1
Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2} \quad \text{e} \quad x \neq 0.$$
a) Si determinino a e b affinché il grafico di $f(x)$ abbia il massimo relativo nel punto $(3, 1/3)$ e sia Γ il grafico corrispondente.
b) Si disegni Γ e si esprima, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente a Γ nel punto d'intersezione con l'asse x, forma con la direzione positiva dello stesso asse.
c) Si calcoli l'area della regione R del piano delimitata da Γ, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 4$.
d) Si consideri la funzione
$$e^{f(x)}.$$
Qual è l'andamento del suo grafico? Si illustri il ragionamento seguito.

Problema 2
Sia F la famiglia di curve definite da
$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax - 4x$$
con a parametro reale.
a) Si provi che esistono due punti del piano per cui passano tutte le curve di F.
b) Sia $g(x)$ l'equazione della curva Γ di F che ha il minimo relativo nel punto $(2, 0)$; si rappresenti Γ provando altresì che i suoi punti di massimo e minimo relativi sono allineati col flesso.
c) Si disegni il grafico di $g(|x|)$ e $|g(x)|$.
d) La regione R del piano delimitata da Γ e dall'asse x è la base di un solido W le cui sezioni con piani paralleli all'asse y sono tutti rettangoli di altezza 4. Si trovi il volume di W.

Questionario

1. Si dica del numero e di Nepero. In particolare, perché è così importante in matematica e come se ne può determinare il valore con la precisione voluta.
2. Si risolva l'equazione:
$$\cos 2x = 2\sin x.$$
3. Si consideri la corrispondenza f che al numero reale x associa
$$f(x) = 3\arctan x - \arctan \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$
La corrispondenza f è una funzione? Se sì, quale ne è il dominio? Cosa si può dire della sua derivata? La funzione è costante?
4. Sia S un settore circolare di raggio r e angolo α, $0 < \alpha < 2\pi$. Si trovi il valore di α, in radianti, per cui il rapporto tra l'area di S e il quadrato del suo perimetro è massimo.
5. Sia dato nel piano α il triangolo ABC retto in A. Si dimostri che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A, B e C è la retta perpendicolare ad α e passante per il punto medio di $\overline{\mathsf{BC}}$.
6. Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.
7. Sia R la regione delimitata da $y = 6\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione attorno alla retta $x = -1$.
8. Si mostri che l'equazione $\ln(\ln x) = 5$ ha una sola radice e se ne dia il valore arrotondato alla terza cifra decimale.

6.30.4. Sessione ordinaria - Santiago del Cile

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sia $f(x)$ una funzione definita in R e sia G il suo grafico.

a) Si determini $f(x)$ sapendo che
$$f''(x) = 2e^x \cos x$$
e che la tangente a G nell'origine è $y = x$.

b) Verificato che
$$f(x) = e^x \sin x,$$
si provi che essa ammette un massimo per $x = 3\pi/4$.

c) Si disegni G sull'intervallo $[-\pi, 0]$.

d) Si consideri la regione compresa tra G e l'asse x sull'intervallo $[-3, 0]$ e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa intorno all'asse x. Qual è l'integrale che fornisce il volume di W? Non si chiede di calcolare l'integrale ma di giustificarlo.

Problema 2

Il trapezio isoscele ABCD è circoscritto ad una circonferenza di raggio 1 e la sua base minore $\overline{\mathsf{CD}}$ misura $2x$.

a) Si provi che $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2/x$.

b) Sia $V(x)$ il volume del solido ottenuto dalla rotazione del trapezio attorno alla base maggiore. Si provi che $V(x)$ assume il valore minimo per $x = \sqrt{2}/2$.

c) Posto $x = \sqrt{2}/2$, si calcoli l'area del quadrilatero i cui vertici sono i punti in cui il trapezio è tangente alla circonferenza.

d) Sia Γ il grafico di

$$f(x) = \frac{3}{8\pi} \cdot V(x).$$

Si calcoli in gradi e primi sessagesimali l'angolo acuto formato dagli asintoti di Γ.

Questionario

1. Si dia un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 3$ in esattamente tre punti.

2. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^{2014}}.$$

3. Si risolva l'equazione:

$$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

4. Marco ha posto su "Yahoo! Answers" la questione seguente: "*In un esercizio del mio testo di Analisi Matematica si chiede di verificare che*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1.$$

Applicando la regola di De l'Hospital si perviene all'uguaglianza

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} (1+\cos x).$$

Uguagliando i risultati ottengo

$$\lim_{x\to\infty} (1+\cos x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \cos x = 0.$$

Come è possibile? Ho sbagliato io o c'è un errore nel libro?"

Cosa risponderesti a Marco ? Qual è l'errore che eventualmente ha commesso?

5. Si trovi l'equazione della normale al grafico di

$$y = \sqrt{3x^2 + 2x}$$

nel punto $(2, 4)$.

6. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right).$$
Qual è il suo periodo?

7. Si determini il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto $(4,0)$.

8. Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 24 cm si determini quello di volume massimo.

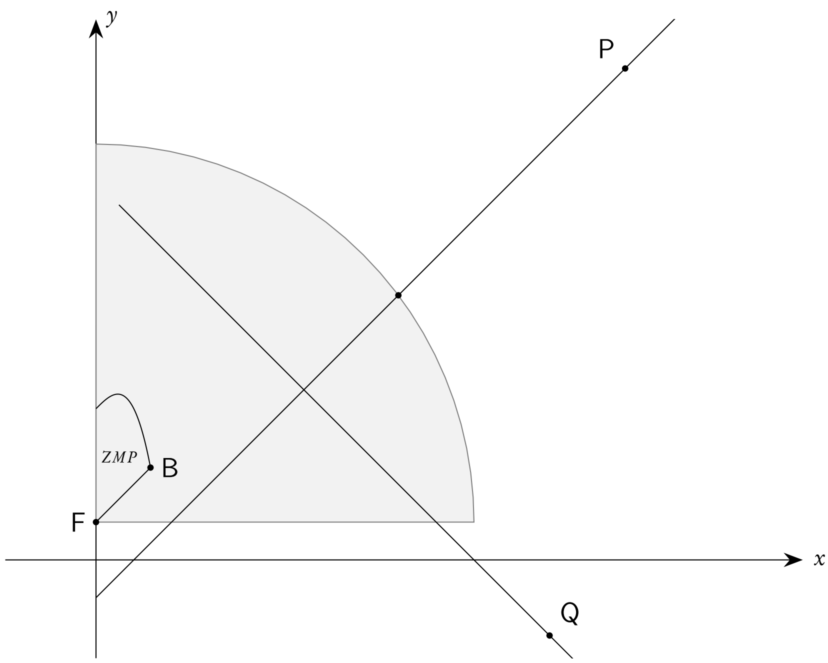
6.31. Anno scolastico 2014-2015

6.31.1. Sessione ordinaria - Europa

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti $t = 0$ e $t = 10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14,13)$ e $P_2(12,11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12,-2)$ e $Q_2(11,-1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in figura (non in scala).



L'area indicata con ZMP è una "Zona Marittima Pericolosa". Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate $(0,1)$ spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi figura).

a) Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.

b) Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.

c) Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

Nel punto $\mathsf{B}(x_\mathsf{B}, y_\mathsf{B})$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da:

$$\begin{aligned} &f(x) = -x^3 + x + 4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le x \le x_\mathsf{B} \\ &g(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le x \le x_\mathsf{B} \end{aligned}$$

e dalla retta $x = 0$.

d) Calcola l'area della ZMP.

Problema 2

Sia data la famiglia di funzioni

$$f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx.$$

a) Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;

b) trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;

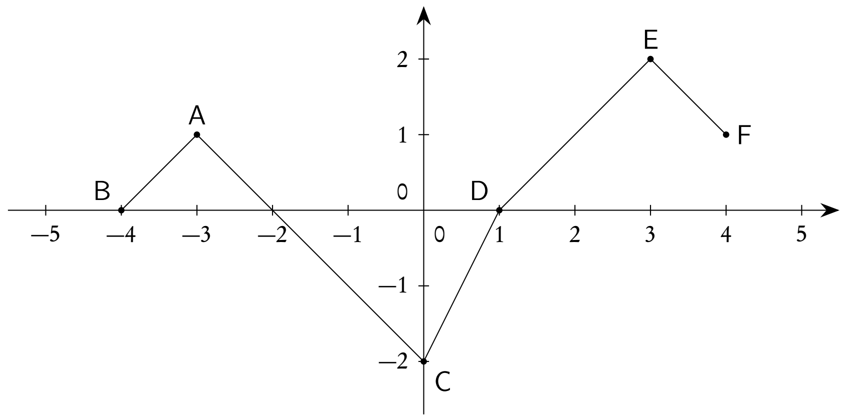
c) determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y;

d) calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.

Questionario

1. La funzione $f(x)$ è continua per $x \in [-4, 4]$ e il suo grafico è la spezzata passante per i punti:

$$(-4,0),\ (-3,1),\ (-2,0),\ (0,-2),\ (1,0),\ (3,2),\ (4,1).$$



Qual è il valor medio di $f(x)$ per $x \in [-4, 4]$?

2. Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale $X =$ "numero di persone che usa il prodotto A". Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.

3. In un riferimento cartesiano $Oxyz$, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
e del piano $z = 1$ ha centro in $(0, 0, 1)$ e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?

4. Sia
$$P(x) = x^2 + bx + c.$$
Si suppone che $P\big(P(1)\big) = P\big(P(2)\big) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare $P(0)$.

5. Risolvere l'integrale improprio:
$$\int_0^1 \ln(x)\, \mathrm{d}x.$$

6. La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y,$$
dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20000 batteri?

7. Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:
$$x(t) = 3 - 2\cos(t), \quad y(t) = 2 + 3\sin(t).$$

Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per t che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di ϑ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse x, per $t = 2\pi/3$ secondi.

8. Se
$$f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{per} \quad x \geq 1,$$
qual è il valore di $f'(2)$?

9. Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia: "Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza".

10. Trovare l'equazione della retta perpendicolare al grafico di
$$f(x) = 4x^3 - 7x^2$$
nel punto di ascissa 3.

6.31.2. Sessione ordinaria - Americhe

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Stai seguendo un corso, nell'ambito dell'orientamento universitario, per la preparazione agli studi di Medicina. Il docente introduce la lezione dicendo che un medico ben preparato deve disporre di conoscenze, anche matematiche, che permettano di costruire modelli ed interpretare i dati che definiscono lo stato di salute e la situazione clinica dei pazienti. Al tuo gruppo di lavoro viene assegnato il compito di preparare una lezione sul tema: "come varia nel tempo la concentrazione di un farmaco nel sangue?".

Se il farmaco viene somministrato per via endovenosa, si ipotizza per semplicità che la concentrazione del farmaco nel sangue raggiunga subito il valore massimo e che immediatamente inizi a diminuire, in modo proporzionale alla concentrazione stessa; nel caso che il docente ti ha chiesto di discutere, per ogni ora che passa la concentrazione diminuisce di 1/7 del valore che aveva nell'ora precedente.

a) Individua la funzione $y(t)$ che presenta l'andamento richiesto, ipotizzando una concentrazione iniziale $y(0) = 1\,\mu\text{g/ml}$ (microgrammi a millilitro) e rappresentala graficamente in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo t espresso in ore e in ordinate la concentrazione espressa in μg/ml.

Se invece la somministrazione avviene per via intramuscolare, il farmaco viene dapprima iniettato nel muscolo e progressivamente passa nel sangue. Si ipotizza pertanto che la sua concentrazione nel sangue aumenti per un certo tempo, raggiunga un massimo e poi inizi a diminuire con un andamento simile a quello riscontrato nel caso della somministrazione per via endovenosa.

b) Scegli tra le seguenti funzioni quella che ritieni più adatta per rappresentare l'andamento descritto per il caso della somministrazione per via intramuscolare, giustificando la tua scelta:
$$y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16};$$

$$y(t) = \sin(3t) \cdot e^{-t} \ :$$
$$y(t) = -t^3 + 3t^2 + t \ ;$$
$$y(t) = \frac{7}{2}\left(e^{-t/7} - e^{-t/5}\right).$$

c) Traccia il grafico della funzione scelta in un piano cartesiano avente in ascisse il tempo t espresso in ore e in ordinate la concentrazione y espressa in μg/ml e descrivi le sue caratteristiche principali, in rapporto al grafico della funzione relativa alla somministrazione per via endovenosa.

Per evitare danni agli organi nei quali il farmaco si accumula è necessario tenere sotto controllo la concentrazione del farmaco nel sangue. Supponendo che in un organo il farmaco si accumuli con una velocità v, espressa in μg/(ml · h) (microgrammi a millilitro all'ora), proporzionale alla sua concentrazione nel sangue:

$$v(t) = k \cdot y(t).$$

d) Determina la quantità totale di farmaco accumulata nell'organo nel caso della somministrazione endovenosa e di quella intramuscolare studiate in precedenza. In quale delle due l'accumulo sarà maggiore?

Problema 2

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}.$$

a) Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f della funzione.

b) Dimostra che la funzione

$$g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$$

è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciane il grafico G_g.

c) Detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento $\overline{PQ}$ e dai grafici G_f e G_g.

d) Sia f_a la famiglia di funzioni definite da

$$f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}, \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

Questionario

1. Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione

$$y = x^3 - 3x + 3$$

e dalla retta stessa.

2. Verificare che la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{3^{1/x} + 1}$$
ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:
$$g(x) = \frac{x}{3^{1/x} + 1}$$
ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").
3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:
   a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
   b) Descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.
4. Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:
$$\begin{aligned} \alpha) &\quad x - 3y + z - 5 = 0, \\ \beta) &\quad x + 2y - z + 3 = 0. \end{aligned}$$
Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta r da essi individuata verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x + y - z + 1 = 0$.
5. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.
6. Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo $[2, 5]$ con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia
$$\frac{7}{3} \le x \le \frac{17}{4}.$$
7. Calcolare il valor medio della funzione
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \le x \le 3, \\ e^{x-3} + 1, & \text{se } 3 < x \le 6, \end{cases}$$
nell'intervallo $[1, 6]$ e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.
8. Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione $r(t)$. Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.
9. In un riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$, data la retta r di equazioni:
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano P di equazione:

$$x+2y-z+2=0,$$

determinare per quale valore di k la retta r e il piano P sono paralleli, e la distanza tra di essi.

10. Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di

$$f(x)=x^3-3x^2$$

nel suo punto di flesso.

6.32. Anno scolastico 2015-2016

6.32.1. Sessione ordinaria - Europa

Il tema è uguale a quello proposto nella sessione ordinaria delle scuole in Italia, a cui si rimanda.

6.32.2. Sessione ordinaria - Americhe

Scientifico - Scientifico Opzione scienze applicate.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Considerata la funzione $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$G(x)=\int_0^{2x} \mathrm{e}^t \sin^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

svolgi le richieste che seguono.

1. Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione $G(x)$. Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
2. Determina l'esistenza degli asintoti della funzione $G(x)$, motivando opportunamente la risposta.
3. Individua i punti stazionari della funzione $G(x)$, riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.
4. Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione $G(x)$ nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

Problema 2

Sia Γ il grafico della funzione

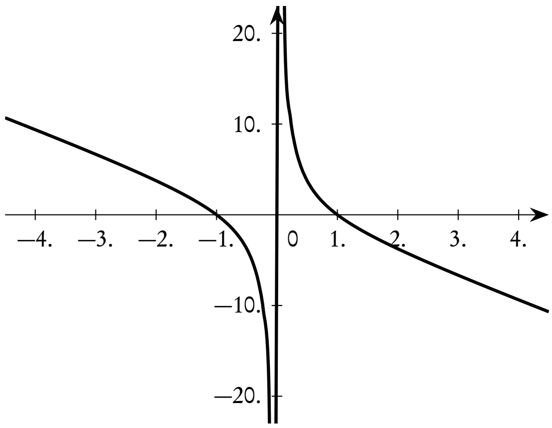
$$f(x)=\frac{1}{1+k\cdot \mathrm{e}^{-x}}, \quad k\in\mathbb{R},\ k>0$$

definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

1. Relativamente al grafico Γ, mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso P in funzione del parametro k e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da k.
2. Dopo aver verificato che la funzione $p(x) = \log\left(1 + k \cdot e^{-x}\right) + x$ è una primitiva di f, determina l'area della regione piana compresa tra Γ, l'asse y, l'asse x e la retta di equazione $x = \log(\alpha)$. Che valore deve assumere α perché tale area sia uguale a 1?
3. Dimostra che
$$g(x) = \log\left(\frac{kx}{1-x}\right)$$
è la funzione inversa di f e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione g è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione h definita come
$$h(x) = f(x) + g(x)$$
interseca l'asse x in un unico punto.
4. Considerata, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$
determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di $F(x)$.

Questionario

1. Tre circonferenze di raggio 1 sono tangenti esternamente una all'altra. Qual è l'area della regione interna che esse delimitano?
2. In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere sapendo che estraendo 2 biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è $27/38$.
3. Dato un cilindro equilatero e la sfera ad esso circoscritta, qual è la probabilità che un punto interbo alla sfera cada all'interno del cilindro?
4. Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:
$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$
e l'asse delle x nell'intervallo $[0,3]$; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza kx, con $k \in \mathbb{R}$. Determinare k in modo che il volume del solido sia pari a 2.
5. Il grafico di un polinomio di 3° grado è tangente all'asse x nell'origine e interseca nuovamente l'asse x in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da 0. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse x e il grafico del polinomio, sapendo anche che tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.
6. Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$. Il grafico riportato è simmetrico rispetto all'origine ed ha come asintoti le rette $x = 0$ e $5x + 2y = 0$.



Descrivere le principali caratteristiche relative all'andamento della funzione $f(x)$ e tracciarne, indicativamente, un possibile grafico. Tracciare inoltre il grafico della funzione $f''(x)$.

7. Sono date le funzioni $f(x) = e^{3-x}$ e $g(x) = e^{2x}$. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di f e g.
8. Un giocatore di basket si esercita ai tiri liberi. Normalmente ha una quota di canestri dell'80%. Con quale probabilità va a canestro esattamente due volte su tre tiri?
9. Dati i punti $A(4, 14, 17)$, $B(16, 11, 14)$, $C(16, 2, 23)$:
   a) si dimostri che il traingolo ABC è isoscele e rettangolo;
   b) quali sono le coordinate del punto D tale che $ABCD$ sia un quadrato?
10. Si considerino nello spazio il punto $P(1, 2, -1)$ ed il piano α di equazione $x - 2y + z + 4 = 0$.
   a) Verificare che $P \in \alpha$;
   b) determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad α in P.

7. Prove assegnate a partire dal 2019

Questo capitolo raccoglie le prove e le simulazioni assegnate a partire dall'anno scolastico 2018-2019, quando la seconda prova di matematica è stata sostituita da una prova a carattere pluridisciplinare, riguardante matematica e fisica.

Con quest'anno scolastico sono state anche introdotte delle griglie nazionali di valutazione, fornite alle commissioni per una correzione più omogenea ed equa. Pubblichiamo anche, per completezza, le prove "miste" di matematica e fisica, mentre in una apposita appendice sono raccolte le prove di fisica assieme ad alcune delle prove o simulazioni, sempre di fisica, assegnate in anni precedenti, anche nella sperimentazione cosiddetta "Brocca".

7.1. Anno scolastico 2018-2019

7.1.1. Simulazione di Matematica del 20 dicembre 2018

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la sezione ad indirizzo sportivo.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Fissati due parametri reali $S > 0$, $k > 0$, considera la funzione:

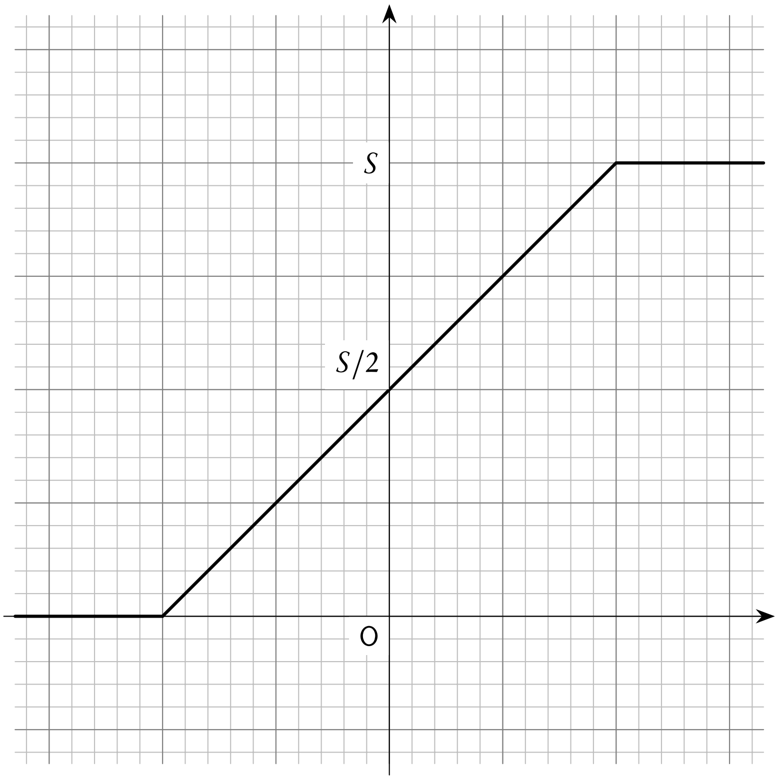
$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k.

La funzione $f_k(x)$ può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.

1. Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore S, dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.
2. Osservando Γ_k, individua la trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.
3. Individua graficamente o analiticamente il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri S e k, il valore di tale velocità massima.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$, il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 a S con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0.

4. Determina, in funzione dei parametri S e k, l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.
5. Illustra il procedimento che adotteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.
6. All'aumentare di k, tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

Problema 2

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata, di volume $10\,\mathrm{dm}^3$, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, tenendo presente la necessità che il volume sia $10\,\mathrm{dm}^3$.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di $-18\,°\mathrm{C}$. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di $10\,°\mathrm{C}$; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di $0\,°\mathrm{C}$

2. Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima dell'inizio della liquefazione ($T_a =$ temperatura ambiente, $T_g =$ temperatura del ghiaccio all'istante $t = 0$, $T(t) =$ temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$
\begin{aligned}
T(t) &= \left(T_a - T_g\right)\mathrm{e}^{-Kt}\,,\\
T(t) &= \left(T_a - T_g\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-Kt}\right) + T_g\,,\\
T(t) &= \left(T_a - T_g\right)\mathrm{e}^{Kt} - T_a\,,
\end{aligned}
$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

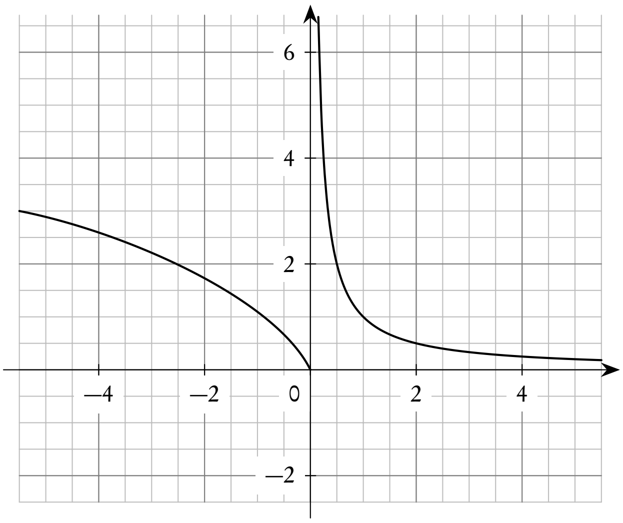
3. Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a $1.5\,\mathrm{dm}$, e altezza eguale a $2\,\mathrm{dm}$.

4. Sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9.05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Questionario

1. In figura è riportato il grafico della funzione $f'(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Il grafico presenta un asintoto verticale per $x = 0$. Supponendo che la funzione f sia definita in $\mathbb{R}$, descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



2. Individua il valore di k per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

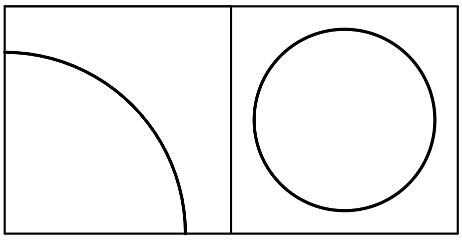
$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

forma un angolo di $\pi/6$ radianti con l'asse delle ascisse.

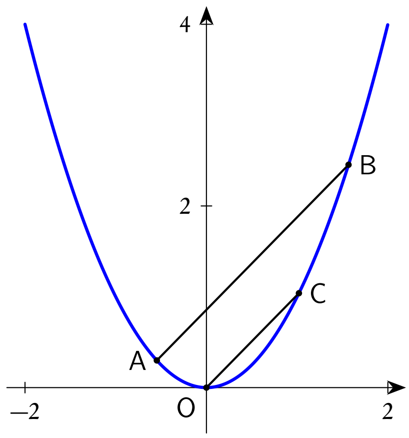
3. Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x-2| > |x-6|.$$

4. Il cerchio di raggio R centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio r centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto R/r.



5. Presi due punti $\mathsf{A}(a, a^2)$ e $\mathsf{B}(b, b^2)$ sulla parabola $y = x^2$, traccia la retta OC, parallela alla retta AB e passante per l'origine e per il punto $\mathsf{C}(c, c^2)$.



Traccia un'altra parallela DE, passante per due punti D e E appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

6. Il grafico della funzione polinomiale cubica $y)f(x)$ intercetta l'asse x nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.
7. Una sfera, il cui centro è il punto $\mathsf{K}(1,1,1)$, è tangente al piano Π avente equazione $x-2y+z+1=0$. Qual è il punto di tangenza. Qual è il raggio della sfera?
8. Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

7.1.2. Simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018

Il testo[1] è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la sezione ad indirizzo sportivo.

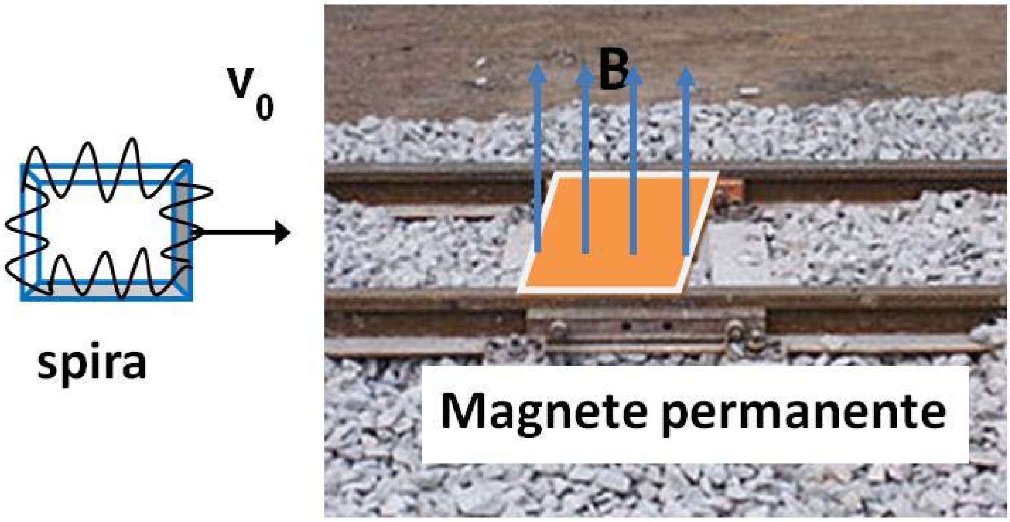
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L=50\,\mathrm{cm}$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R=0.020\,\Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone

[1] Vedi i commenti a questa simulazione pubblicati nella pagine 697 e 699.

passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1. Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.
2. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B = 0.85\,\mathrm{T}$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$
dove $m = 50\,\mathrm{g}$ è la massa del vagone.
3. Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.
4. Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0.20\,\mathrm{m/s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.
5. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

Problema 2

Il 14 ottobre 2012 Felix Baumgartner ha realizzato un lancio storico ottenendo tre record mondiali:

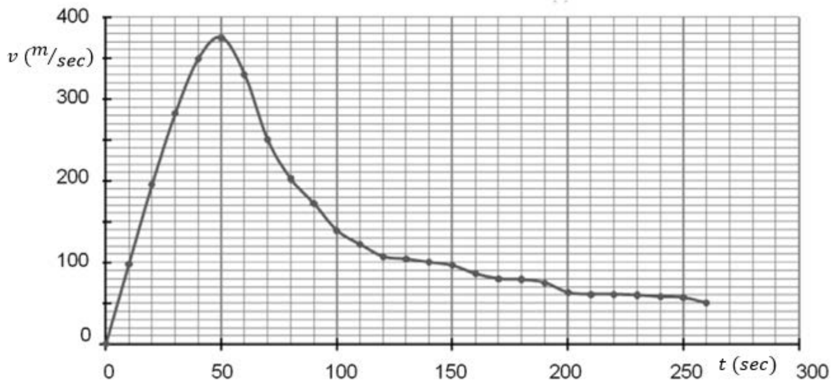
— la maggiore altezza raggiunta da un uomo in una ascesa con un pallone (39045 m);

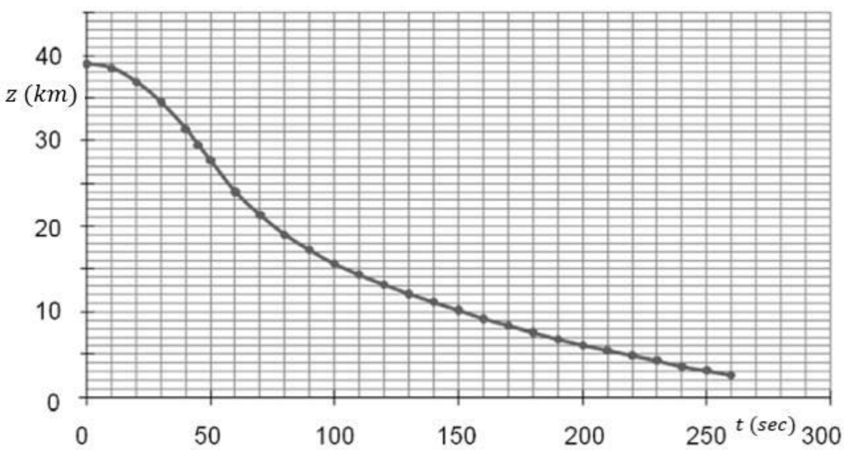
— il lancio più alto in caduta libera;

— la più alta velocità in caduta libera (1341, 9 km/h).

Dopo l'ascesa in un pallone gonfiato a elio, si è lanciato verso la Terra, protetto da una tuta speciale, e ha aperto il suo paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi di caduta libera. Il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi.

Nelle figure seguenti sono riportati gli andamenti della velocità e della quota di Baumgartner durante il lancio, a partire dall'istante del lancio $t = 0$.





Per realizzare l'ascesa è stato necessario utilizzare un enorme pallone deformabile: ciò per fare in modo che all'aumentare della quota e al diminuire della densità dell'aria il volume del pallone possa aumentare, mantenendo così costante la spinta verso l'alto (spinta di Archimede). Su un giornale veniva riportato "*Per assicurare una velocità d'ascesa sufficiente la spinta verso l'alto era circa doppia di quella necessaria per tenere in equilibrio il sistema. In pratica, aggiungendo alla massa di Baumgartner quella del pallone riempito ad elio, era necessario sollevare una massa di circa 3 tonnellate*". La massa di Baumgartner e della sua tuta è pari a circa 120 kg.

Fase di ascesa

1. Disegna il diagramma delle forze subito dopo il decollo, trascurando la forza di attrito. Non è necessario che il disegno sia in scala, deve però essere coerente con la situazione fisica.
2. Dopo qualche minuto di ascensione il moto può essere considerato rettilineo uniforme. In questa situazione, calcola approssimativamente il valore della forza di attrito con l'aria.

Fase di lancio

Scegli un sistema di riferimento e studia la caduta verticale del sistema S costituito da Baumgartner e dalla tuta. In questa fase, si può ritenere trascurabile l'effetto della spinta di Archimede.

3. Utilizzando i grafici, determina l'accelerazione di S per $t < 20\,\mathrm{s}$ e commenta il risultato ottenuto.
4. Il sistema S ha raggiunto velocità supersoniche durante la caduta? Tieni presente la seguente tabella, che riporta la velocità del suono in aria ad altezze diverse:

Altezza (km)	10	20	30	40
Velocità del suono (m/s)	305	297	301	318

5. Calcola la variazione di energia meccanica ΔE_m tra il momento in cui Baumgartner salta e il momento in cui raggiunge la massima velocità; fornisci la tua interpretazione del risultato.
6. Nella figura seguente vengono riportati i diagrammi delle forze applicate al sistema S durante la fase di lancio. $\vec{P}$ rappresenta la forza peso e $\vec{f}$ la forza di attrito con l'aria. Poni in corrispondenza i diagrammi con i tre istanti $t_1 = 40\,\mathrm{s}$, $t_2 = 50\,\mathrm{s}$, $t_3 = 60\,\mathrm{s}$.

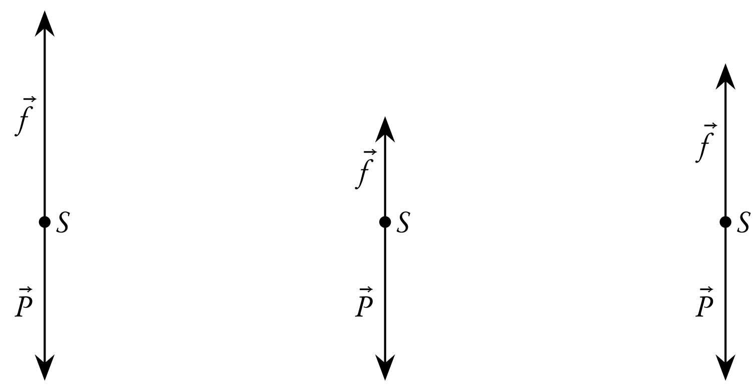


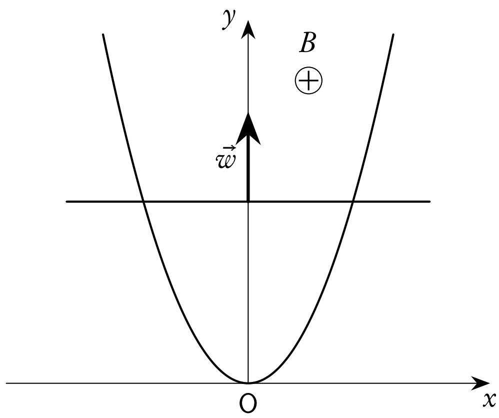
Diagramma A Diagramma B Diagramma C

7. Determina a quale altitudine Baumgartner ha aperto il paracadute. Ricordando che il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi, calcola la velocità media di discesa dopo l'apertura del paracadute, fino all'arrivo al suolo. Ti appare ragionevole considerare il moto in quest'ultima fase come un moto rettilineo uniforme?

8. Per valutare il rischio di traumi derivanti dall'impatto dell'arrivo al suolo, fornisci una stima dell'altezza da cui Baumgartner sarebbe dovuto saltare, senza paracadute, per giungere al suolo con la stessa velocità.

Questionario

1. Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano xy della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y.



2. La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione:

$$x = \alpha\, t(1 - \beta\, t), \quad \text{dove } \alpha \text{ e } \beta \text{ sono due costanti, con} \quad \beta > 0.$$

Determina:

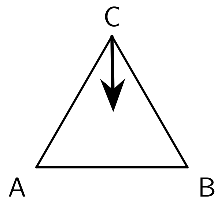
a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;

b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

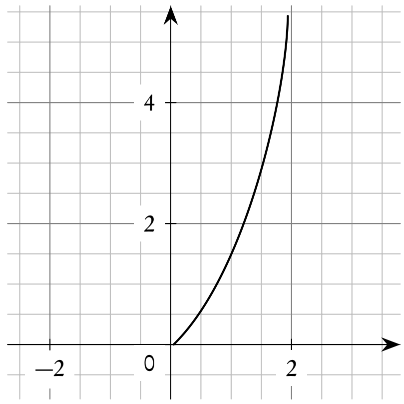
3. Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC, i cui lati misurano 1 m.

a) Determina l'energia potenziale del sistema.

b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento $\overline{AB}$ lungo la perpendicolare ad AB; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento $\overline{AB}$.



4. Un punto materiale si muove nel piano xy secondo la legge oraria:
$$x = a \cdot \sin(\omega t), \quad y = a(1 - \cos(\omega t)),$$
con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.
5. Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10\,\mathrm{kV/cm}$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.
6. Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza ℓ tra i punti A e B se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da $T1$ a $T2$? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge:
$$v = a\sqrt{T}$$
dove a è una costante.
7. Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta[2].



8. Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge:
$$x = a \cdot \sin^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$
con a costante positiva. Determina:

[2] Il quesito è abbastanza ambiguo, in quanto dal grafico non è possibile decidere l'esistenza o meno di un asintoto verticale in corrispondenza di $x = 2$. Inoltre, per poter rappresentare l'andamento della velocità, quest'ultima dovrebbe essere rappresentata sull'asse delle ascisse, cosa poco usuale.

a) l'ampiezza e il periodo di oscillazione;

b) l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

7.1.3. Simulazione di Matematica e Fisica del 28 febbraio 2019

Il testo[3] è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la sezione ad indirizzo sportivo oltreché per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot \mathrm{e}^{bt}.$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $\mathsf{B}(2, 8/\mathrm{e})$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -1/2$, studiare la funzione

   $$q(t) = 4t \cdot \mathrm{e}^{-t/2}$$

   verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto

   $$\mathsf{F}\left(4, \frac{16}{\mathrm{e}^2}\right).$$

   Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.
3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa[4] all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -1/2$, esprimere l'intensità di corrente $(i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.
4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t \to +\infty$.

   Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\,\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo$[0, t_0]$.

[3] Vedi i commenti a questa simulazione pubblicati nella pagina 703.

[4] Come riportato anche nel commento a questa simulazione, nella pagina 703, la domanda così formulata non ha alcun senso: la carica che attraversa la sezione in un dato istante di tempo è necessariamente nulla.

Problema 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$, (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espresse in m). Una seconda carica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.
2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da
$$\mathcal{U}(x) = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$
dove k è una costanete positiva (unità di misura: $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$).
3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?
4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di
$$\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,\mathrm{d}x$$
(dove $m > 0$ indica l'ascissa positiva del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

Quesiti

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$
$$g(x) = \begin{cases} 3-ax^2, & \text{per } x \le 1, \\ \dfrac{b}{x-3}, & \text{per } x > 1, \end{cases}$$
sia derivabile in tutto il dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.
2. Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione
$$y = 2\mathrm{e}^{1-|x|}.$$
Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.
3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
   — Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due numeri minori di 10?

— Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale

$$y = \frac{s(x)}{t(x)},$$

dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione

— incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;

— abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;

— passi per il punti $\mathsf{P}(7, 10)$.

Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0.$$

— Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione

$$3x - 2y + 6z + 1 = 0$$

e la superficie S sono secanti.

— Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da

$$x(t) = \frac{1}{9} t^2 \left(\frac{1}{3} t + 2 \right),$$

dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.

a) Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.

b) Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso il valore dell'energia dissipata.

8. Un campo magnetico, la cui intensità vara secondo la legge

$$B(t) = B_0\big(2 + \sin(\omega t)\big),$$

dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

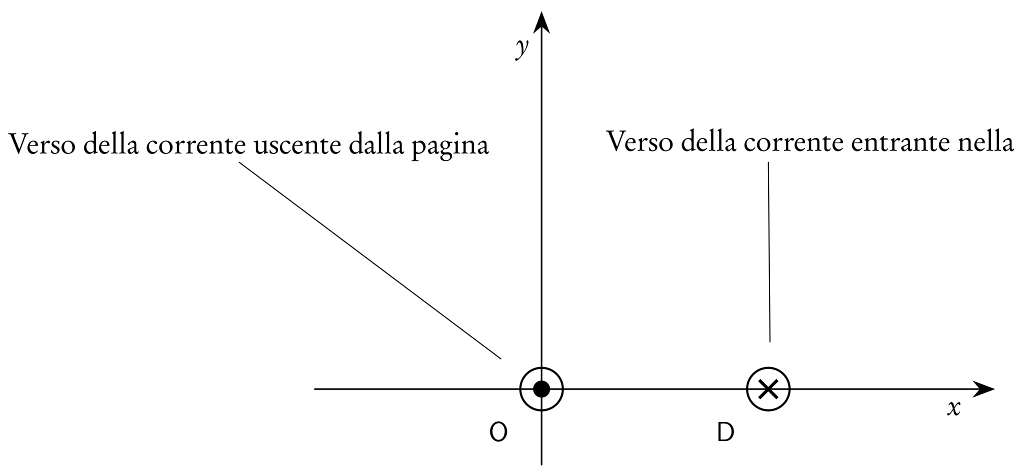
7.1.4. Simulazione di Matematica e Fisica del 2 aprile 2019

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la sezione ad indirizzo sportivo oltreché per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale $\mathsf{O}xy$, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e laltro per il punto $\mathsf{D}(1,0)$, come mostrato in figura.



1. Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in testa (T), in un punto $\mathsf{P}(x,0)$, con $0 < x < 1$, è dato dalla funzione

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right),$$

   dove K è una costante positiva di cui si chiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di x nell'intervallo $]0,1[$. Per quale valore di x l'intensità di $\vec{B}$ è minima?

2. Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme transita, ad un certo istante, per il punto $\mathsf{C}(1/2,0)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = 1/2$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

   Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento $\overline{\mathsf{OD}}$. Esistono punti dell'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

3. Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione

$$f(x)=K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $1/3$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra r e il grafico di f.

4. Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l'integrale

$$g(t)=\int_{2}^{t} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

e calcolare

$$\lim_{t\to+\infty} g(t).$$

Qual è il significato di tale limite?

Problema 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x)=\sqrt{x}(k-x) \qquad g(x)=x^2(x-k).$$

1. Provare che, qualunque sia $k>0$, nell'intervallo $[0,k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $\mathsf{F}(x_\mathsf{F},y_\mathsf{F})$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $\mathsf{G}(x_\mathsf{G},y_\mathsf{G})$. Verificare che si ha $x_\mathsf{G}=2x_\mathsf{F}$ e $y_\mathsf{G}=-(y_\mathsf{F})^2$.
2. Verificare che, qualunque sia $k>0$, i grafici delle funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

D'ora in avanti, assumere $k=1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$, per $x\in[0,1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione delimitata da tale spira.

3. Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0=2.0\cdot10^{-2}\,\mathrm{T}$, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7.0\cdot10^{-3}\,\mathrm{Wb}$.
4. Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\,\Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0=0\,\mathrm{s}$, inizi a variare secondo la legge

$$B(t)=B_0\mathrm{e}^{-\omega t}\cos(\omega t), \quad \text{con} \quad \omega=\pi\,\mathrm{rad/s}$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso. Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che indice la corrente e il verso della corrente indotta.

Quesiti

1. Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita:

$$g(x) = \frac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}.$$

— Come va scelto il valore di k affiché il grafico di g non abbia asintoti?

— Come va scelto il valore di k affiché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?

Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici dele funzioni ottenute.

2. Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f e un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

3. Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) t}{t} \, dt.$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

4. Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2, 0, 1)$ e $B(0, 2, 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5, 1, -2)$ e $D(1, 3, 4)$.

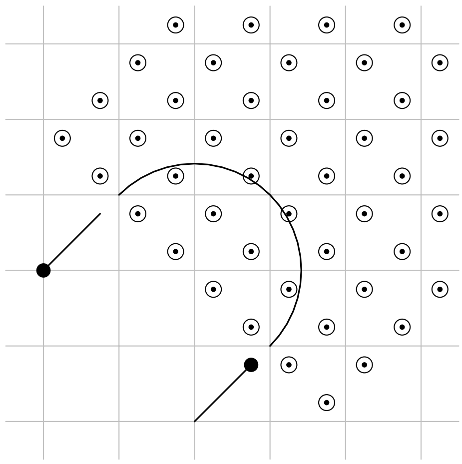
5. Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

— Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?

— Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

6. Ai vertici di un quadrato ABCD, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a −32 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

7. Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità. La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1.00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.



8. Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7.80 \cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i seguenti materiali è l'unico adatto allo scopo.

Materiale	**Lavoro di estrazione**
Argento	4.8 ev
Cesio	1.8 ev
Platino	5.3 ev

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

7.1.5. Sessione ordinaria

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali e internazionali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Si considerino le seguenti funzioni

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}.$$

— Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $\mathsf{A}(2,1)$.

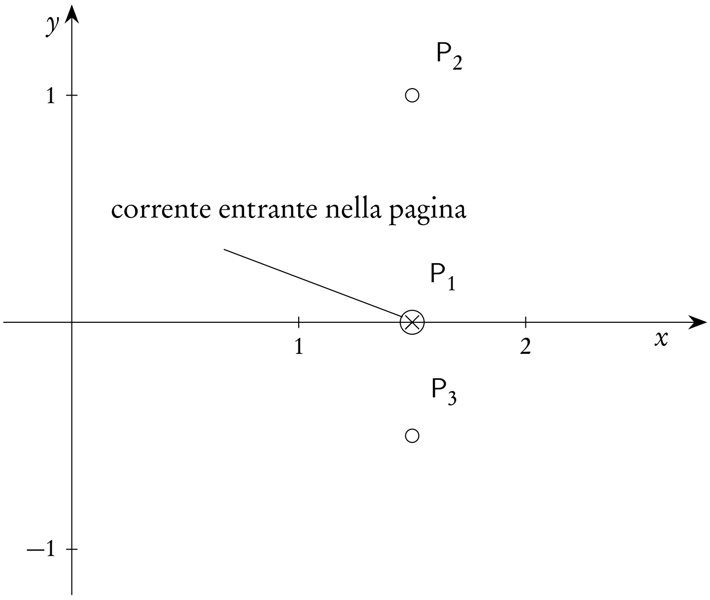
— Si assuma d'ora in avanti di avere $a = 1$ e $b = 1$. Studiare le funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $\mathsf{B}(0,-1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

— Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Siconsiderino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti

$$P_1\left(\frac{3}{2},0\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2},1\right) \quad \text{e} \quad P_3\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

I tre fili sono percorsi da correnti continue $i_1 = 2.0\,\mathrm{A}$, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura, mentre gli altri due versi non sono indicati.

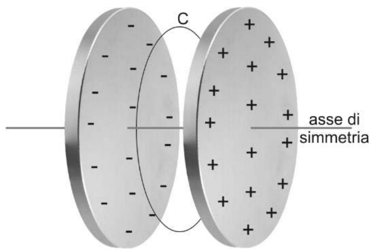
Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



— Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0.20\,\Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$ perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira attorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera un corrente indotta la cui intensità massimo è pari a $5.0\,\mathrm{mA}$. Determinare il valore di ω.

Problema 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in testa (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

— Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

— Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right).$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

— Per $a > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}.$$

Verificare che la funzione

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$$

è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di acsisse

$$t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

— Con le opportune motivazioni dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di

$$\int_{-b}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quesiti

1. Una data funzione è esprimibile nella forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d},$$

dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione f.

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}.$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1.1^x}.$$

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4. Dati i punti $\mathsf{A}(2, 0, -1)$ e $\mathsf{B}(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che

$$|\overline{\mathsf{PA}}| = \sqrt{2}|\overline{\mathsf{PB}}|$$

è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $\mathsf{T}(-10, 8, 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

5. Si lanciano 4 dadi con facce nu erate da 1 a 6.

   — Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi il 5?

   — Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?

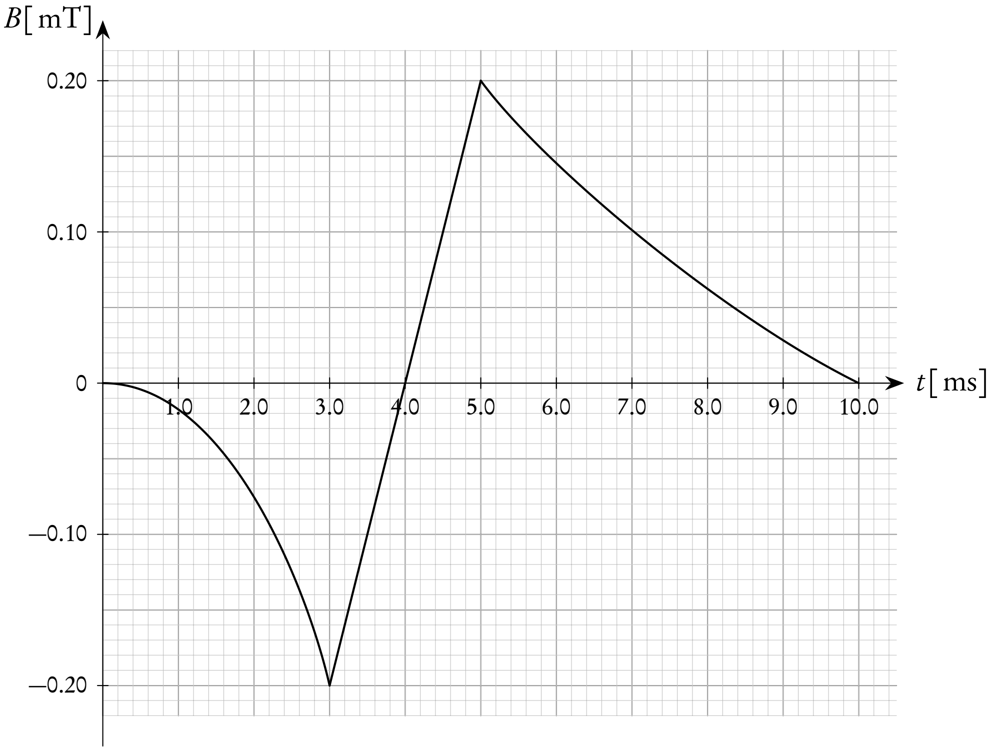
   — Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4.0\,\mathrm{m\Omega}$, racchiude un'area di $30\,\mathrm{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

   a) da $0.0\,\mathrm{ms}$ a $3.0\,\mathrm{ms}$;

   b) da $3.0\,\mathrm{ms}$ a $5.0\,\mathrm{ms}$;

   c) da $5.0\,\mathrm{ms}$ a $10.0\,\mathrm{ms}$.



7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0.80\,c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1.00\,\mathrm{mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 3.81\,\mathrm{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10.5\,\mathrm{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
massa del protone	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
velocità della luce	c	$2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

7.1.6. Sessione suppletiva

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali e internazionali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2}\left(1 + x\mathrm{e}^{a-x}\right), & \text{per } x \geq 0, \\ \dfrac{9a}{4(1-x)^4}, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

— Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.

— Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

$$g(x) = h\left[1 + (3 - kx)\mathrm{e}^{kx-1}\right]$$

si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.

— Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0.24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.

— Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\mathcal{E}(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $\mathrm{d}\mathcal{E}$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto $\mathrm{d}x$. Supponendo che la funzione

$$y = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}x}$$

possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = 9/2$ e $k = 1$, calcolare l'energia $\mathcal{E}$ assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

Problema 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

— Determinare, in un punto C della retta r, l'"intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.

— Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ decresce quando P si allontana dal punto medio di $\overline{\mathsf{AB}}$. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di $\overline{\mathsf{AB}}$, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.

— Fissati i parametri reali e positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

$$f(x)=\frac{h}{\left(x^2+k^2\right)^{3/2}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

— Tra le funzioni del tipo

$$g(x)=\frac{bx}{\left(x^2+k^2\right)^{a}}$$

con a, $b\in\mathbb{R}$, determinare le primitive della f.

Dimostrare che, se $h=k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0,+\infty[$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

Quesiti

1. Fissati i numeri reali e positivi a e b, con $a\geq b$, provare che

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x\left(x^a+x^b\right)=a\,.$$

2. È assegnata la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ così definita:

$$f(x)=\int_1^x e^{t^2}\,dt\,.$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1\frac{f''(x)}{f'(x)}\,dx\,.$$

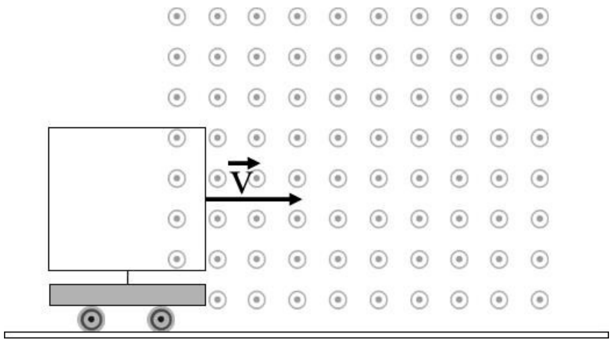
3. Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.

4. Considerati i punti $\mathsf{A}(2,3,6)$, $\mathsf{B}(6,2,-3)$, $\mathsf{C}(3,-6,2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti $\overline{\mathsf{OA}}$, $\overline{\mathsf{OB}}$, $\overline{\mathsf{OC}}$ (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

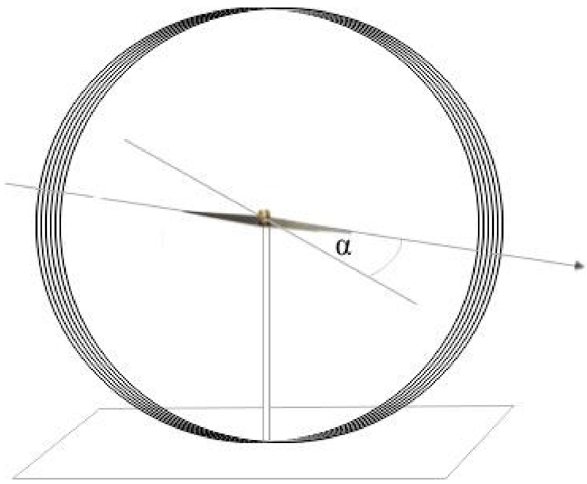
5. Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

6. Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v = 0.90\,c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40\,\mathrm{cm}$, $b = 50\,\mathrm{cm}$ e $h = 20\,\mathrm{cm}$, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0,50\,c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

7. Una bobina è costituita da N spire quadrate di lato l, ha una resistenza elettrica R ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante $\vec{v}$ ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità $\vec{v}$ verso la stessa regione?



8. Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15\,\mathrm{cm}$. Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R, al centro della bobina, come in figura.



Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α. Spiegare la causa di questa deviazione.

In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$
Intensità di corrente	11.4 mA	23.3 mA	36.8 mA	52.4 mA	73.9 mA

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
massa del protone	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
velocità della luce nel vuoto	c	$2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
elettronvolt	eV	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

7.1.7. Sessione straordinaria

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate, per la sezione ad indirizzo sportivo e per le corrispondenti sperimentazioni quadriennali e internazionali.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Dato $k > 0$, si consideri la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{k}{x^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

— Dimostrare che, qualunque sia $k > 0$, la funzione f è continua ma non ovunque derivabile. Studiare l'andamento di tale funzione, specificandone il punto di massimo assoluto. Per quali valori di k le tangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità formano un angolo acuto γ tale che $\tan\gamma = 3$?

— Posto $k = 1$, sia r una retta di equazione $y = t$, con $0 < t < 1$. Detti S e T i punti d'intersezione tra r ed il grafico della funzione f, siano S$'$ e T$'$ le rispettive proiezioni ortogonali sull'asse x. Come deve essere scelto il valore di t in modo che sia massima l'area del rettangolo SS$'$T$'$T?

Nel vuoto, si consideri una distribuzione sferica di carica elettrica, positiva e di raggio R, espresso in metri (m). La densità di carica, indicata con ϱ ed espressa in coulomb al metro cubo (C/m^3), è uniforme.

— Indicata con x la distanza di un punto P dal centro della sfera, provare che l'intensità del campo elettrico generato da tale distribuzione di carica è data da

$$E(x) = \begin{cases} kx, & \text{se } 0 \leq x \leq R, \\ \dfrac{kR^3}{x^2}, & \text{se } x > R, \end{cases}$$

dove k è un'opportuna costante, di cui si chiede l'espressione in funzione della densità di carica ϱ e la dimensione fisica.

— Sia q una carica elementare positiva collocata nel centro della sfera. Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza elettrica per portare la carica q a distanza $2R$ dal centro della sfera. Quale dovrebbe essere il lavoro compiuto dalla stessa forza elettrica per portare la carica q a distanza infinita dal centro della sfera?

Problema 2

In un laboratorio di fisica, si vuole verificare sperimentalmente che un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo magnetico uniforme, è soggetto a una forza. A questo scopo, un filo di rame RS rettilineo, rigido, di lunghezza l, misurata in metri (m), di massa m, misurata in chilogrammi (Kg), viene appeso alle estremità di due fili conduttori. Tali fili, verticali e di massa trascurabile, sono liberi di ruotare, senza attrito, intorno a due ganci metallici, P e Q, posizionati alle altre estremità. Attraverso un interruttore, i ganci P e Q vengono collegati a un generatore di corrente continua e il filo di rame viene posto in un campo magnetico $\vec{B}$, uniforme e costante, perpendicolare al filo (Fig. 1) e la cui intensità è misurata in tesla (T). Quando si chiude l'interruttore, il circuito è percorso da una corrente di intensità i, misurata in ampere (A) e il filo RS si sposta in una nuova posizione di equilibrio, in cui PR forma un angolo ϑ con la direzione verticale (Fig. 2).

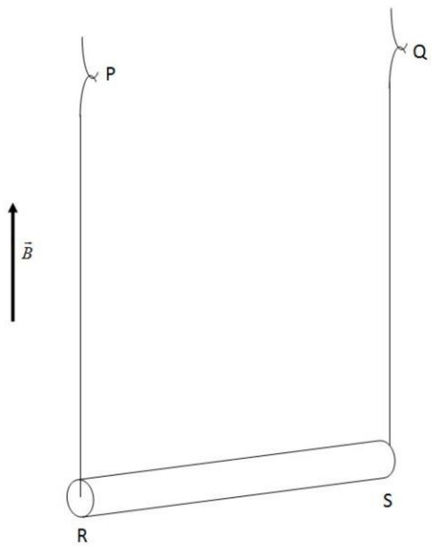


Fig.1

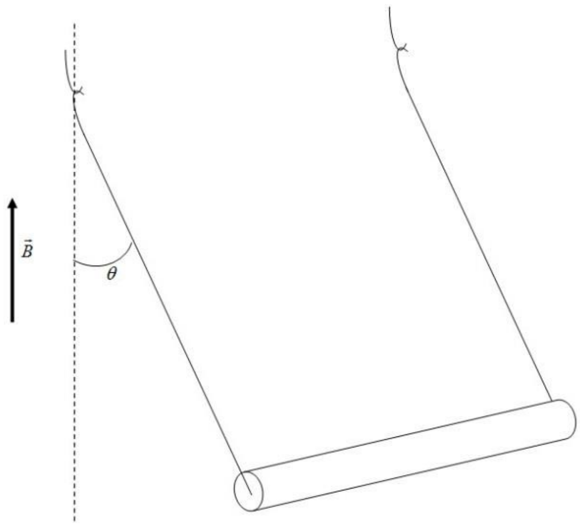


Fig.2

— Descrivere in direzione, verso e intensità, la forza con cui il campo $\vec{B}$ agisce sulla corrente che attraversa il tratto RS. Come varia la posizione di equilibrio del filo di rame al variare dell'intensità e del verso della corrente?

— Rappresentare tutte le forze agenti sul filo RS. Considerando costanti $\vec{B}$, la massa m e la lunghezza l del filo RS, verificare che l'ampiezza dell'angolo ϑ in funzione dell'intensità di corrente i è data da

$$\vartheta(i) = \arctan\left(\frac{Bl}{mg}\cdot i\right),$$

in cui g è l'accelerazione di gravità.

— Posto $\vartheta(x) = \arctan(kx)$, si considerino, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy, le funzioni $y = \vartheta(x)$ e la sua inversa $y = \vartheta^{-1}(x)$. Determinare il valore di $k > 0$, affinché i grafici delle suddette funzioni siano tangenti nell'origine. Successivamente, determinare i valori di k in corrispondenza dei quali le rette tangenti ai grafici delle due funzioni formano un angolo di 30° nell'origine.

— Posto $k = 1$, determinare l'equazione della funzione $F(x)$, primitiva di $\vartheta(x)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento. Tracciare il grafico della funzione $y = \vartheta(x)$ e da esso dedurre il grafico di $y = F(x)$.

Quesiti

1. Determinare il valore di questo limite:

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Data la funzione $f(x) = x\sin x$ e fissato un numero $k > 0$, provare che il valore di

$$\int_0^{x_0} k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

(dove x_0 indica il minimo numero reale positivo per cui $f(kx_0) = 0$) non dipende dalla scelta di k.

3. Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato $\overline{BC}$. Dimostrare che, se la lunghezza di $\overline{AM}$ è la metà di $\overline{BC}$, allora ABC è un triangolo rettangolo.

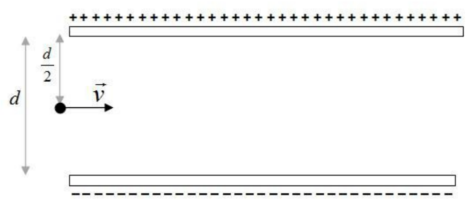
4. Dopo avere verificato che il punto $T(1,0,1)$ appartiene al piano $\pi\colon x-2y+2z=3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1,0,5)$ e tangente in T al piano π.

5. Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

   — Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?

   — Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Un condensatore piano, costituito da due armature quadrate di lato $l = 40\,\mathrm{cm}$, distanti $d = 30\,\mathrm{cm}$, è soggetto a una d.d.p. $\Delta V = 15\,\mathrm{V}$. Un elettrone vi entra perpendicolarmente al campo elettrico, come in figura, con una velocità $v_0 = 2.5\cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$. A quale distanza dall'ingresso del condensatore deve essere posto uno schermo, affinché la deflessione verticale totale sia 20 cm?



7. Un protone viene sparato su una particella α (due protoni e due neutroni) da una distanza di 10 cm (considerare le particelle puntiformi), alla velocità $v_0 = 5.00 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento.
8. Un elettrone entra in una regione di spazio, sede di un campo magnetico di intensità $B = 0.20\,\mathrm{T}$, con velocità di modulo $v_0 = 1.5 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$, che forma un angolo di 10° con la direzione di $\vec{B}$. Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico necessario affinché l'elettrone non subisca deflessione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
massa dell'elettrone	m_e	$9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
massa del protone	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
massa particella alfa	m_α	$6.645 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
costante dielettrica del vuoto	ε_0	$8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$

7.1.8. Sessione ordinaria - Scuole italiane all'estero, calendario australe

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{b}{(1-x)^2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ a + \dfrac{b}{(1-x)^2},, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

in cui a e b sono due costanti positive.

— Studiare $f(x)$, al variare di a e b, scrivendo le equazioni degli asintoti e stabilendo sotto quali condizioni esiste x_0, con $0 \leq x_0 < 1$, in modo che $f(x_0) = 0$. Determinare a e b, affinché si abbia $x_0 = 1/2$ e la retta di equazione $16x + y - 8 = 0$ sia tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(1/2, 0)$.

— Posto $a = 4$ e $b = 1$, determinare l'area della regione R, delimitata dal grafico di $f(x)$ e dagli assi coordinati.

Si consideri una superficie π, piana e infinita, sulla quale è distribuita una carica positiva con densità uniforme σ, espressa in coulomb al metro quadro. Ad una distanza $d = 1\,\mathrm{m}$ da π, è posta una carica q, puntiforme e positiva, espressa in coulomb. Sia s la semiretta passante per la carica a, che ha origine sul piano π ed è ad esso perpendicolare. Si indichi con P un generico punto di s, a distanza $x \geq 0$ dal piano.

— Qual è la direzione del vettore campo elettrico in P? verificare che, per opportuni valori delle costanti fisiche a e b, la funzione $f(x)$ esprime l'intensità e il verso[5] del vettore campo elettrico in P. Effettuare un'analisi dimensionale delle costanti a e b.

— Verificare che esiste un punto, sulla semiretta s, in cui il campo elettrico è nullo. Stabilire se, in tale punto, una carica in quiete, a seconda del suo segno,, si troverebbe in equilibrio stabile oppure instabile.

Problema 2

Un'onda elettromagnetica piana si propaga nel vuoto ed è linearmente polarizzata. il campo elettrico dell'onda varia secondo la legge

$$\vec{E}(x,t)=E_0\sin(kx-\omega t)\hat{y},$$

in cui $\hat{y}$ è il versore dell'asse y.

— Descrivere, in modo qualitativo, il meccanismo di generazione e propagazione di un'onda elettromagnetica e specificare il significato di E_0, k e ω.

— Nel caso in cui l'ampiezza di oscillazione sia $2.0\,\mathrm{V/m}$ e la frequenza di oscillazione sia $5.0\cdot 10^5$ Hz, scrivere l'espressione del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda, individuando la direzione di oscillazione di $\vec{B}$ e la direzione di propagazione. Giustificare le risposte fornite.

Si consideri la funzione $f(x)=A\sin(kx-\omega t)$ dove A e k sono costanti positive, $\omega=10^6\pi$ e $t=5\cdot 10^{-7}$.

— Esprimere il periodo e l'immagine di $f(x)$, specificando le ascisse dei punti di massimo, minimo e flesso. Stabilire per quali valori di A e k l'immaine di $f(x)$ coincide con l'intervallo $[-2,2]$ e il periodo è $\pi/2$.

— Presi $A=2$ e $k=4$, determinare l'area delimitata dal grafico della funzione $g(x)=[f(x)]^2$ e dall'asse delle ascisse in un periodo. Cosa rappresentano, per il grafico della $g(x)$, i punti di flesso della $f(x)$?

Quesiti

1. Determinare, giustificando la risposta, tutti i possibili valori di a, b, c in modo tale che si abbia:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^b+8x^4+cx^3+7}{13x^2+3x^3-5}=0.$$

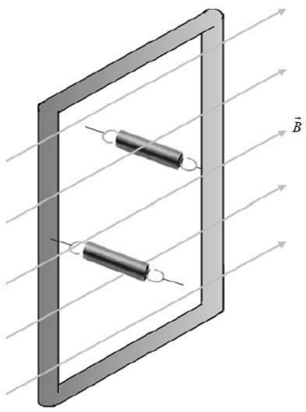
2. Determinare le ascisse dei punti di massimo e di minimo locali della funzione

$$f(x)=\int_4^x\left(3^{5t-2t^2}-1\right)\mathrm{d}t.$$

3. Assegnato un triangolo ABC, ottusangolo in A, siano B′ e C′, rispettivamente, i piedi delle altezze condotte dai vertici B e C. Dimostrare che il quadrilatero BB′C′C è inscrivibile in una circonferenza e che i triangoli ABC e AB′C′ sono simili.

[5]Forse sarebbe stato più opportuno dire: "la componente del campo elettrico in P lungo la direzione orientata di s"

4. Assegnati nello spazio i punti $A(1,0,-1)$ e $B(-3,-2,0)$, sia r la retta passante per A e B. Scrivere l'equazione del piano π, passante per il punto $P(-1,3,4)$ e perpendicolare a r. Determinare le coordinate del punto Q, simmetrico di P rispetto a r.
5. Uja scatola contiene 3 palline gialle e 4 blu; una seconda scatola contiene 2 palline blue e 4 gialle. Una persona estrae a sorte 2 palline dalla prima scatola e le mette nella seconda. A questo punto, un'altra persona estrae a sorte 2 palline dalla seconda scatola e le rimette nella prima. Qual è la probabilità che, alla fine, in ciascuna delle due scatole il numero di palline gialle e blu sia lo stesso che all'inizio?
6. Una particella α (due protoni e due neutroni) entra in un condensatore piano attraverso un foro praticato sull'armatura negativa, perpendicolarmente a questa, con velocità $v_0 = 6.93 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$. La distanza tra le armature è $d = 10.0\,\mathrm{cm}$ ed esse sono soggette ad una d.d.p. di $200\,\mathrm{V}$. Quale distanza percorrerà la particella all'interno del condensatore prima di invertire il suo moto? (considerare la massa del neutrone uguale a quella del protone).
7. Una spira quadrata di lato $l = 20\,\mathrm{cm}$ è percorsa da una corrente di intensità $i = 0.50\,\mathrm{A}$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme di intensità $B = 0.10\,\mathrm{T}$ e direzione parallela al piano della spira stessa. la spira è tenuta in equilibrio da una coppia di molle di costante elastica $K = 2\,\mathrm{N/m}$ come in figura. Determinare l'allungamento delle olle e stabilire il verso della corrente



8. In un dato sistema di riferimento, il potenziale elettrico varia secondo la legge

$$V(x) = Ax^2 e^{-Bx},$$

con A e B costanti fisiche positive, di cui si chiedono le unità di misura. Determinare la posizione in cui il modulo del campo elettrostatico è massimo ed il valore che assume in tale posizione.

COSTANTI FISICHE		
massa del protone	m_p	$1.673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
costante dielettrica del vuoto	ε_0	$8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

A. Prove di Fisica

In questa appendice sono raccolte le prove o simulazioni di fisica assegnate a partire dall'anno scolastico 2018-2019, assieme ad una selezione delle prove e simulazioni assegnate negli anni precedenti, anche nella sperimentazione cosiddetta "Brocca".

A.1. Anno scolastico 1998-1999

A.1.1. Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Si vuole determinare il rapporto e/m, tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico).

Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi fda una differenza di potenziale $\Delta V = 0.78\,\mathrm{kV}$ fino a raggiungere la velocità v. Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio.

Una volta raggiunta la velocità v, gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ e con un angolo α tra i vettori B e v.

Il candidato:

1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone trai due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90°$ e per $\alpha < 90°$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi di un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ e $9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$ è $\alpha = 60°$;
6. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili ΔV, B ed r.

Tema 2

Un condensatore è un sistema elettrico costruito in modo da avere una grande capacità. Più condensatori possono essere collegati tra loro per aumentare o diminuire la capacità complessiva disponibile.

Il candidato:

1. definisca la grandezza fisica “capacità elettrica” di un conduttore, la sua unità di misura nel sistema S.I. e i suoi sottomultipli;
2. calcoli il raggio di un’ipotetica sfera conduttrice che abbia la capacità di un farad e commenti il risultato; come dato di riferimento prenda il raggio medio della Terra di 6370 km;
3. descriva la struttura di un condensatore piano, spiegando perché essa permette d’aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema;
4. ricavi e commenti la formula per calcolare la capacità elettrica di un condensatore piano;
5. descriva almeno una utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico;
6. disegni i simboli grafici di tre condensatori da 100 μF collegati in modo da ottenere le capacità complessive di 150 μF e di 300 μF.

Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Un sistema di condensatori avente la capacità complessiva di 1 mF, a cui è applicata la d.d.p. di 10 kV, è fatto scaricare su un resistore con $R = 100\,\Omega$ immerso in un litro di acqua distillata alla temperatura di 20 °C e contenuta in un recipiente isolato termicamente.

Il candidato calcoli la temperatura finale dell’acqua dopo che il sistema di condensatori si è completamente scaricato e spieghi cosa succederebbe se fosse raddoppiato il valore della resistenza.

A.1.2. Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico “Brocca” - Sessione suppletiva

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

All’inizio di questo secolo i fisici avevano tentato inutilmente di spiegare l’effetto fotoelettrico basandosi sulla natura ondulatoria delle radiazioni elettromagnetiche. L’interpretazione proposta da Einstein nel 1905 con il nuovo concetto di fotone provocò, però, varie resistenze che furono definitivamente vinte con la scoperta, nel 1923, dell’effetto Compton.

Il candidato

1. descriva sinteticamente la natura e le caratteristiche di un’onda elettromagnetica e come essa si propaghi;
2. spieghi il concetto di fotone e la differenza con il quanto di energia proposto da Planck;
3. spieghi, con un esempio, le leggi fisiche dell’effetto fotoelettrico;
4. motivi l’impossibilità di spiegare l’effetto fotoelettrico con la teoria ondulatoria delle radiazioni elettromagnetiche;

5. descriva l'effetto Compton commentando la formula

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}(1 - \cos\vartheta)$$

che mette in relazione le grandezze fisiche interessate;

6. calcoli l'angolo di diffusione di un fotone che, avendo un'energia iniziale di 1 MeV, ne perda la metà per effetto Compton; si ricordi che:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \quad , \quad m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad , \quad c = 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}.$$

Tema 2

Si desidera progettare una stufa elettrica per riscaldare una stanza di $80\,\mathrm{m}^3$. Si hanno i seguenti dati:

a) la resistenza della stufa è costituita da filo di nichel-cromo con una sezione di $1.3\,\mathrm{mm}^2$ e una resistività $\varrho = 1.18\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ alla temperatura di funzionamento;

b) per riscaldare l'ambiente sono necessari circa $25\,\mathrm{W/m}^3$;

c) il costo dell'energia elettrica è di 195 Lire/kWh;

d) la tensione di rete è di 220 V.

Il candidato, dopo avere spiegato l'effetto *Joule*, calcoli:

1. quanti metri di filo di nichel-cromo sono necessari per costruire la resistenza della stufa;
2. l'intensità di corrente assorbita dalla stufa, in modo da dimensionare lapresa di corrente;
3. la quantità di calore sviluppata per ogni ora di funzionamento;
4. la spesa da sostenere in un bimestre, prevedendo in media un funzionamento di quattro ore al giorno.

Il candidato commenti le formule utilizzate e i calcoli effettuati.

A.2. Anno scolastico 1999-2000

A.2.1. Tema di Fisica e Laboratorio - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Nella prima metà del secolo XX, dopo la scoperta che la radiazione elettromagnetica ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare, fu formulata l'ipotesi che anche la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie.

Il candidato:

1. spieghi il significato dell'espressione "*la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare*" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;

2. spieghi il significato dell'espressione "*fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie*" e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;

3. calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99 MHz con una potenza di uscita di 20 kW;

4. calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200 V;

5. calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm:

   — velocità della luce: $c = 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$;

   — costante di Planck: $h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$;

   — massa dell'elettrone: $m = 9.11 \cdot 10{-}31\,\mathrm{kg}$;

   — carica dell'elettrone: $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Tema 2

Sono disponibili una pila di forza elettromotrice $f.e.m. = 4.5\,\mathrm{V}$ e due lampadine, A e B, costruite per essere utilizzate con una differenza di potenziale $\Delta V = 45\,\mathrm{V}$ e aventi, rispettivamente, le potenze $P_A = 3\,\mathrm{W}$ e $P_B = 5\,\mathrm{W}$.

La pila eroga una corrente di intensità $I = 6\,\mathrm{A}$ se è posta in condizione di cortocircuito per un breve istante.

Il candidato:

1. spieghi i concetti di forza elettromotrice di una pila e di differenza di potenziale disponibile ai suoi morsetti, proponendo anche la relazione matematica tra le due grandezze;

2. descriva una procedura di laboratorio per misurare ognuna delle due grandezze fisiche;

3. tratti il concetto di potenza associato ad una corrente elettrica e ricavi l'espressione della potenza dissipata in una resistenza;

4. calcoli la resistenza interna della pila in condizioni di cortocircuito, trascurando la resistenza del filo di collegamento;

5. calcoli la potenza dissipata sulle due lampadine quando vengono collegate, separatamente, alla pila;

6. calcoli, in percentuale, il rendimento delle due lampadine in rapporto alla loro reale capacità di funzionamento e commenti il risultato indicando quale lampadina ha la luminosità più vicina al valore massimo possibile, in base alle sue caratteristiche, e spiegando il perché.

A.3. Anno scolastico 2001-2002

A.3.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

L'effetto fotoelettrico rimase per lunghi anni un mistero fino alla scoperta delle sue leggi da parte di Albert Einstein e le attività sperimentali di Robert Andrews Millikan. Nel 1905, Einstein riuscì a fornire un'interpretazione del fenomeno introducendo il concetto di fotone, la cui esistenza fu poi confermata dalla scoperta dell'effetto Compton nel 1923. Einstein, Millikan e Compton ebbero il premio Nobel per la fisica rispettivamente negli anni 1921, 1923 e 1927.

Il candidato:

1. scriva e commenti le leggi fisiche dell'effetto fotoelettrico, descriva il fenomeno e proponga un esempio di applicazione tecnologica;
2. spieghi perché non è stato possibile interpretare l'effetto fotoelettrico utilizzando le caratteristiche di un'onda elettromagnetica;
3. descriva somiglianze e differenze tra il fotone di Einstein e il quanto di energia proposto da Planck nella radiazione del corpo nero;
4. descriva l'effetto Compton e commenti la formula:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}(1 - \cos\vartheta)$$

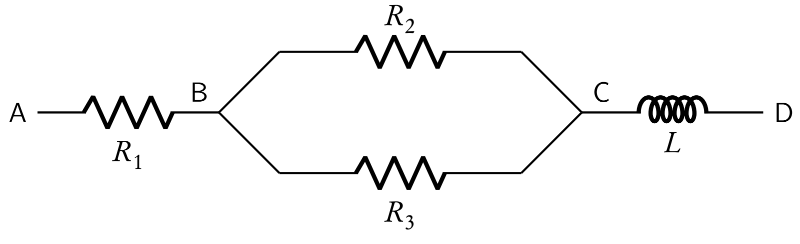
   che mette in relazione le grandezze fisiche interessate;

5. calcoli l'angolo di diffusione di un fotone che, avendo un'energia iniziale di $0.8\,\text{MeV}$, ne perde un terzo per effetto Compton.

$$(h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s} \quad , \quad m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \quad , \quad c = 3.00 \cdot 10^{8}\,\text{m/s})$$

Tema 2

Una parte di un circuito (in figura) è costituita da tre resistori ($R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$) e da un solenoide posto in aria. Questo è lungo 5 cm, ha una sezione circolare di $16\,\text{cm}^2$ ed è formato da 1000 spire di resistenza trascurabile.



All'interno del solenoide si trova un piccolo ago magnetico che, quando non vi è passaggio di corrente, è perpendicolare all'asse del solenoide perché risente soltanto del campo magnetico terrestre ($B_t = 2 \cdot 10^{-5}$ T).

Il candidato:

1. esponga le sue conoscenze riguardo al campo magnetico terrestre e all'uso della bussola magnetica;
2. spieghi il concetto di resistenza elettrica, descriva il tipo di collegamento dei tre resistori R_1, R_2 e R_3 e ne calcoli la resistenza totale;
3. spieghi il concetto di induttanza e calcoli l'induttanza del solenoide, dopo aver dimostrato come si ricava la formula per il suo calcolo;
4. avendo osservato che l'ago magnetico ha subito una deviazione, con un angolo di 30° rispetto alla direzione originaria, calcoli, in µA, l'intensità della corrente che attraversa ognuna delle tre resistenze e il solenoide;
5. nelle stesse condizioni precedenti, calcoli il potenziale elettrico nei punti A, B e C, sapendo che il punto D è collegato a massa;
6. sapendo che tra A e D è mantenuta la differenza di potenziale già calcolata, ricavi l'angolo di deviazione dell'ago magnetico che si ottiene eliminando il resistore R_2 e interrompendo, perciò, quel tratto di circuito.

A.4. Anno scolastico 2003-2004

A.4.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, motivando i passaggi intermedi e prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Se si scalda l'estremità di una barra di ferro, si nota che essa emette inizialmente una radiazione termica che è percepita dalla pelle ma non dagli occhi. Se si continua a far aumentare la temperatura, l'estremità della barra diventa luminosa; il colore è prima rosso e poi, aumentando ancora la temperatura, tende al bianco.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Analizzare il fenomeno descritto e fornire una spiegazione fisica delle varie fasi che portano dalla iniziale emissione termica a quella luminosa, prima rossa e poi bianca.
2. Collegare il fenomeno descritto alle ricerche riguardanti la curva d'emissione della radiazione elettromagnetica del corpo nero che portarono Planck, nel 1900, a formulare l'ipotesi del quanto di energia. Descrivere il problema affrontato da Planck e la sua ipotesi finale.
3. Descrivere l'evoluzione del concetto di quanto di energia fino ad arrivare al concetto di fotone, introdotto da Einstein, e utilizzato nel 1905 per spiegare l'effetto fotoelettrico e, successivamente, l'effetto Compton. Fornire una spiegazione fisica dei due effetti.

4. Calcolare, in eV e in J, l'energia trasportata da un fotone proveniente da una lampada che emette luce gialla di lunghezza d'onda $\lambda = 600\,\text{nm}$.
5. Una piccola lastra di rame, di massa $m = 20\,\text{g}$ e calore specifico $c = 0.092\,\text{kcal}/(\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C})$, aumenta la sua temperatura di $2\,{}^\circ\text{C}$ perché investita dalla radiazione infrarossa proveniente da una stufa. Sapendo che la frequenza della radiazione è $\nu = 3\cdot 10^{13}\,\text{Hz}$, calcolare il numero dei fotoni che hanno interagito con il rame provocandone il riscaldamento.

(Si ricordano i seguenti valori approssimati della velocità della luce e della costante di Planck: $c = 3\cdot 10^8\,\text{m/s}$; $h = 6.6\cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$).

Tema 2

Le immagini che si formano sullo schermo di un apparecchio televisivo sono generate dall'interazione tra un fascio di elettroni veloci e i fosfori depositati sulla superficie interna dello schermo stesso. Gli elettroni provengono dalla sezione posteriore del tubo catodico dove un filamento metallico è portato all'incandescenza.

Il candidato risponda alle seguenti domande.

1. Spieghi perché l'alta temperatura del filamento favorisce l'emissione di elettroni.
2. Spieghi perché i fosfori depositati sulla superficie dello schermo emettono luce quando interagiscono con gli elettroni veloci del tubo catodico.
3. Nella figura 1*a* è schematicamente rappresentato un tubo catodico nel quale sono visibili: due generatori di tensione continua ($G1$ per l'alta tensione e $G2$ per la bassa tensione), il filamento riscaldato (*Fil*), il collimatore del fascio elettronico (*Coll*) formato da due piastrine metalliche forate e parallele, lo schermo S, la zona Z dove gli elettroni sono deviati da un campo magnetico. Il candidato descriva e commenti:
   a) le funzioni e le polarità dei generatori $G1$ e $G2$;
   b) in quale zona del tubo catodico l'intensità del campo elettrico è elevata e dove, invece, è trascurabile.

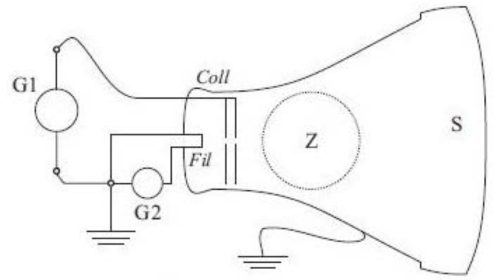


Figura 1*a*

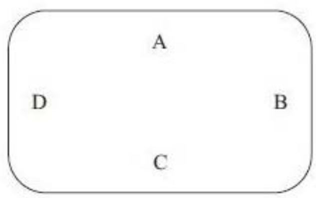


Figura 1*b*

4. Nell'ipotesi che la differenza di potenziale tra il filamento e il collimatore sia $\Delta V = 30\,\text{kV}$, il candidato calcoli:

a) l'energia cinetica acquistata dagli elettroni nel loro percorso tra *Fil* e *Coll*, espressa in elettronvolt e in joule;

b) la velocità degli elettroni al loro passaggio attraverso il collimatore (ipotesi classica), commentando il risultato per quanto riguarda gli eventuali effetti relativistici.

5. Con riferimento alla figura $1b$, che rappresenta la vista anteriore dello schermo, e nell'ipotesi che il campo magnetico nella zona Z sia uniforme, il candidato disegni il vettore necessario, ogni volta, per far raggiungere al fascio di elettroni i punti A, B, C, D sullo schermo.

6. Il candidato si riferisca ora alla figura 2 dove tt è la traiettoria del fascio elettronico, r è il raggio dell'arco di traiettoria compiuto all'interno di Z, δ è l'angolo di deviazione del fascio elettronico. Si supponga che l'angolo di deviazione sia $\delta = 30°$ e che il campo magnetico sia uniforme all'interno della zona sferica Z, di raggio $R_Z = 4\,\text{cm}$, e nullo altrove. Il candidato calcoli l'intensità del vettore che porta a tale angolo di deviazione e ne indichi la direzione e il verso, osservando che lo schermo è perpendicolare al piano del foglio.
Nella figura 2 l'angolo δ è stato disegnato più grande di 30° con lo scopo di rendere l'immagine più compatta per facilitarne lo studio.

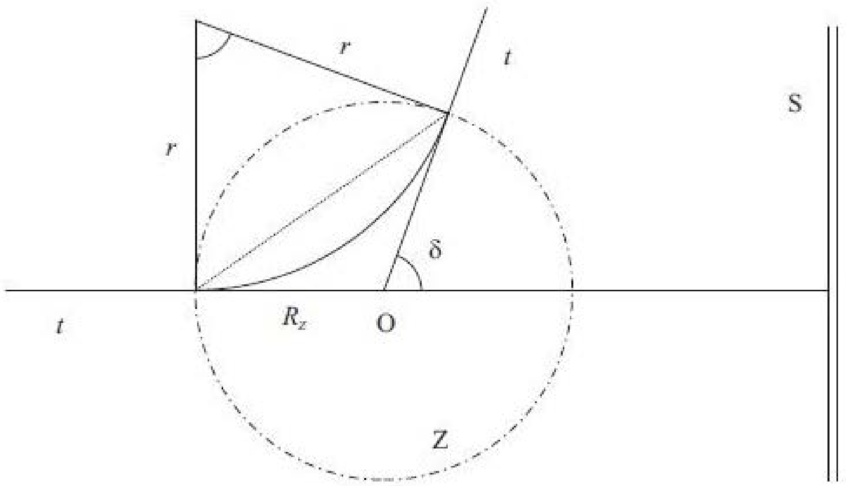


Figura 2

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

— carica dell'elettrone: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$;

— massa dell'elettrone: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$;

— velocità della luce: $c = 3.0 \cdot 10^8\,\text{m/s}$.

A.5. Anno scolastico 2005-2006

A.5.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

L'effetto fotoelettrico, che presenta oggi tante applicazioni tecnologiche, si basa su una fondamentale interpretazione teorica che ha contribuito in modo essenziale allo sviluppo della Fisica contemporanea.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti e, dove è necessario effettuare calcoli, descriva i passaggi intermedi e commenti le conclusioni.

1. Relazionare sulla spiegazione teorica dell'effetto fotoelettrico proposta da Albert Einstein, confrontandola con i falliti tentativi d'interpretazione basati sulla Fisica classica.
2. Dopo avere scritto e commentato le leggi che governano l'effetto fotoelettrico, proporre un esempio pratico descrivendo un'applicazione tecnologica e spiegandone il funzionamento.
3. Calcolare la lunghezza d'onda corrispondente alla frequenza di soglia per l'estrazione di fotoelettroni dal potassio, sapendo che il suo lavoro di estrazione è $2.21\,\mathrm{eV}$.
4. Calcolare, in J e in eV, la massima energia cinetica e la corrispondente quantità di moto degli elettroni estratti da una superficie ricoperta di potassio irradiata con raggi ultravioletti di lunghezza d'onda $\lambda = 248.2\,\mathrm{nm}$ e calcolare la corrispondente lunghezza d'onda di de Broglie.

Si ricordano i seguenti valori approssimati:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad , \quad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad ; \quad h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \quad ; \quad c = 3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/s}.$$

Tema 2

L'effetto Joule ha tantissime applicazioni pratiche, anche all'interno delle nostre case. Il candidato risponda ai seguenti quesiti e, dove è necessario effettuare calcoli, descriva i passaggi intermedi e commenti le conclusioni.

1. Descrivere e spiegare l'effetto Joule con una breve relazione scientifica
2. Spiegare perché la resistenza di un conduttore aumenta con l'aumento della temperatura. Cosa succede, invece, nel caso di un semiconduttore?
3. Rappresentare graficamente e commentare l'andamento dell'intensità di corrente nel filamento di una lampada, in funzione del tempo, da quando è freddo a quando è diventato incandescente (si supponga costante la ddp applicata al filamento).
4. Spiegare il significato dell'espressione "corto circuito" che si sente qualche volta come causa d'incendio in un appartamento.
5. Spiegare il concetto di "potenza elettrica" e ricavare le formule che permettono di calcolare sia l'energia e sia la potenza in corrente continua e alternata. Ricavare anche le rispettive unità di misura come grandezze derivate del Sistema SI.

6. Uno scaldabagno elettrico, con una potenza di 12 kW, contiene 80 litri d'acqua alla temperatura di 18 °C. Ammettendo che vi sia una dispersione di energia del 5%, calcolare:

   a) l'intensità di corrente che attraversa la resistenza, sapendo che la tensione di rete è 220 V;

   b) quanto tempo è necessario, approssimando al minuto, perché il termostato interrompa l'alimentazione elettrica sapendo che esso è predisposto per interromperla quando l'acqua ha raggiunto la temperatura di 40 °C;

   c) la spesa da sostenere per portare l'acqua da 18 °C a 40 °C, sapendo che il costo del servizio è di 0.13 Euro/kWh;

   d) la spesa sostenuta inutilmente a causa della dispersione di energia nello scaldabagno.

A.6. Anno scolastico 2007-2008

A.6.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

All'inizio del secolo scorso il fisico tedesco Max Planck interpretò i risultati sperimentali relativi alla radiazione del corpo nero introducendo l'ipotesi della quantizzazione dell'energia. Questa ipotesi, intesa inizialmente solo come uno stratagemma matematico utile per far coincidere i risultati teorici e quelli sperimentali, apparve invece come una realtà fisica pochi anni dopo, con l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico fatta da Einstein e con la successiva conferma dovuta all'effetto Compton.

Il candidato spieghi:

1. che cosa si intende per corpo nero e come lo studio della sua radiazione ha portato Planck ad avanzare l'ipotesi dei quanti di energia;
2. la differenza fra il concetto di "fotone" utilizzato da Einstein per spiegare l'effetto fotoelettrico e quello del "quanto di energia" proposto pochi anni prima da Planck;
3. i fenomeni fisici dell'effetto fotoelettrico e di quello Compton, descrivendo anche le leggi che permettono di interpretarne i risultati sperimentali.

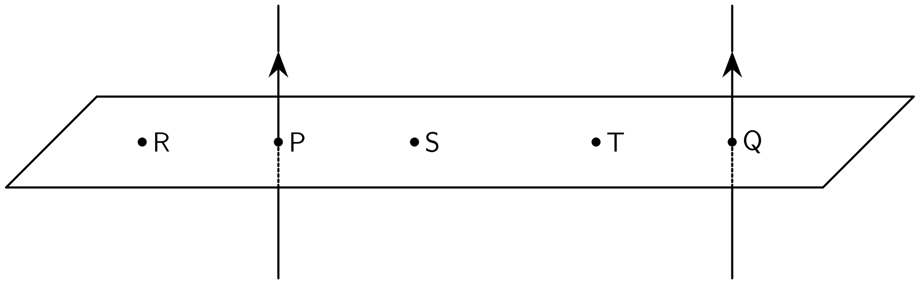
Il candidato risolva infine il seguente problema.

Un fotone, con energia 0.1 MeV, interagisce con un elettrone la cui velocità può essere considerata trascurabile. Calcolare, sempre in MeV, l'energia finale del fotone sapendo che il suo angolo di deviazione dovuto all'effetto Compton è di 30°. Commentare il risultato ottenuto.

Si ricorda che l'elettrone ha carica elettrica negativa $1.60 \cdot 10^{-19}$ C e massa $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg. Inoltre, i valori della costante di Planck e della velocità della luce sono $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s e $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

Tema 2

Si abbiano due fili conduttori paralleli percorsi nello stesso verso dalla corrente elettrica d'intensità 1 A e posti alla distanza di 10 cm l'uno dall'altro. Calcolare il modulo del vettore $\vec{B}$ nei punti R, S, T distanti rispettivamente 3 cm, 3 cm, 7 cm dal punto P, mettendo in evidenza i passaggi matematici necessari a ricavare l'unità di misura dell'induzione magnetica. Disegnare le linee di forza passanti nei punti R, S, T, mettendo in evidenza la direzione e l'orientamento del vettore $\vec{B}$ negli stessi punti.



Ricavare l'espressione matematica che descrive l'andamento del modulo di $\vec{B}$ tra i punti P e Q e disegnarne il grafico sul piano cartesiano.

In ognuno dei punti S e T passa un protone con velocità $v = 2 \cdot 10^4$ m/s con la traiettoria parallela ai fili e con verso uguale a quello convenzionale della corrente elettrica. Ricavare il modulo, la direzione e il verso della forza di Lorentz che agisce su ognuno dei due protoni e rappresentarne la traiettoria con un disegno, anche se in maniera approssimata. Si ricorda che il protone ha la stessa carica dell'elettrone, ma con segno positivo ($1.60 \cdot 10^{-19}$ C).

A.7. Anno scolastico 2009-2010

A.7.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle elettroni.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2.1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad ; \quad m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad ; \quad h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \quad ; \quad c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

Tema 2

Alla fine del Settecento il medico bolognese Galvani propose una sua interpretazione sull'origine della corrente elettrica. L'ipotesi di Galvani non fu, però, accettata dal fisico Alessandro Volta, dell'Università di Pavia, che propose un"ipotesi alternativa e costruì nel 1800 il primo generatore elettrico in corrente continua: la cosiddetta pila di Volta. Nell'Ottocento seguirono poi le ricerche dei fisici tedeschi Ohm e Kirchhoff che scoprirono le leggi dei circuiti elettrici. Il candidato:

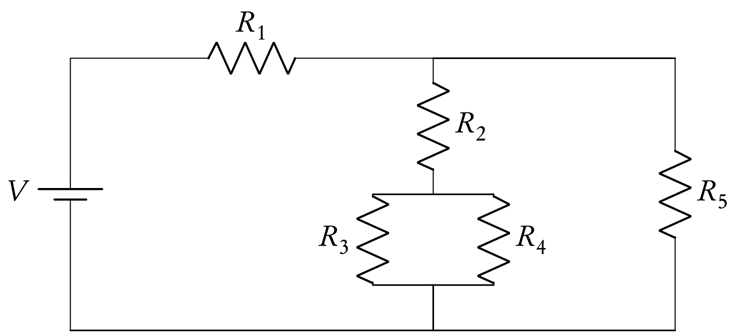
a) spieghi il principio di funzionamento della pila di Volta;

b) spieghi il significato di circuito elettrico e si soffermi sulla natura e le unità di misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un circuito elettrico in corrente continua;

c) descriva teoricamente e graficamente come si collocano in un circuito elettrico gli strumenti di misura amperometro e voltmetro, con le necessarie considerazioni riguardanti la resistenza interna di questi strumenti confrontata con le resistenze presenti nel circuito;

d) spieghi perché in ogni misura è necessario scegliere nello strumento la portata minima possibile;

e) dato il seguente circuito in corrente continua, alimentato da una pila da 4.5 V, calcoli:



— l'intensità della corrente erogata dalla pila;

— la d.d.p. ai capi di R_1 e di R_3;

— l'energia dissipata, per effetto Joule, da R_1 e da R_3 in 2 secondi.

l valori delle resistenze elettriche sono: $R_1 = 1.5\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 3\,\Omega$, $R_5 = 3\,\Omega$,

A.8. Anno scolastico 2011-2012

A.8.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, delle cifre significative e delle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Con la storica memoria dal titolo "*Teoria della legge di distribuzione dell'energia dello spettro normale*" presentata all'Accademia delle Scienze di Berlino il 14 dicembre 1900, Max Planck introdusse il concetto di *quantizzazione dell'energia*, presentando una formula matematica che forniva risultati coerenti con i dati sperimentali ricavati dall'analisi dello spettro del *corpo nero*. Prendendo spunto dai risultati teorici di Planck, Einstein riuscì a spiegare il fenomeno dell'effetto fotoelettrico che appariva incomprensibile utilizzando la teoria elettromagnetica di Maxwell.

Il candidato spieghi:

a) che cosa s'intende per *corpo nero* e descriva sinteticamente le deduzioni teoriche di Planck;

b) la differenza tra la produzione e la propagazione di un'onda elettromagnetica secondo la teoria quantistica di Planck e la successiva ipotesi dei fotoni avanzata da Einstein;

c) il fenomeno dell'effetto fotoelettrico, come oggi lo conosciamo grazie ad Einstein, descrivendone almeno un'applicazione.

Risolva, infine, il seguente problema.

Sopra una lastra di metallo fotosensibile incide un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda $\lambda = 200\,\mathrm{nm}$ e sugli elettroni estratti per effetto fotoelettrico agisce un campo magnetico caratterizzato da un vettore induzione magnetica di modulo $B = 25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$, perpendicolare alla loro direzione di propagazione. Risentendo l'effetto del campo magnetico, gli elettroni si muovono su una traiettoria circolare con un raggio massimo di $20\,\mathrm{cm}$.

Il candidato calcoli in eV il lavoro di estrazione da questo metallo ed esprima poi la sua opinione sulla possibilità di ottenere l'effetto fotoelettrico utilizzando con lo stesso metallo un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda $\lambda = 400\,\mathrm{nm}$. Si trascurino gli effetti relativistici.

Si ricordano i seguenti valori:

Velocità della luce: $c = 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$; Costante di Planck: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$; Massa a riposo dell'elettrone: $m_e = 9.108 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; Carica dell'elettrone: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

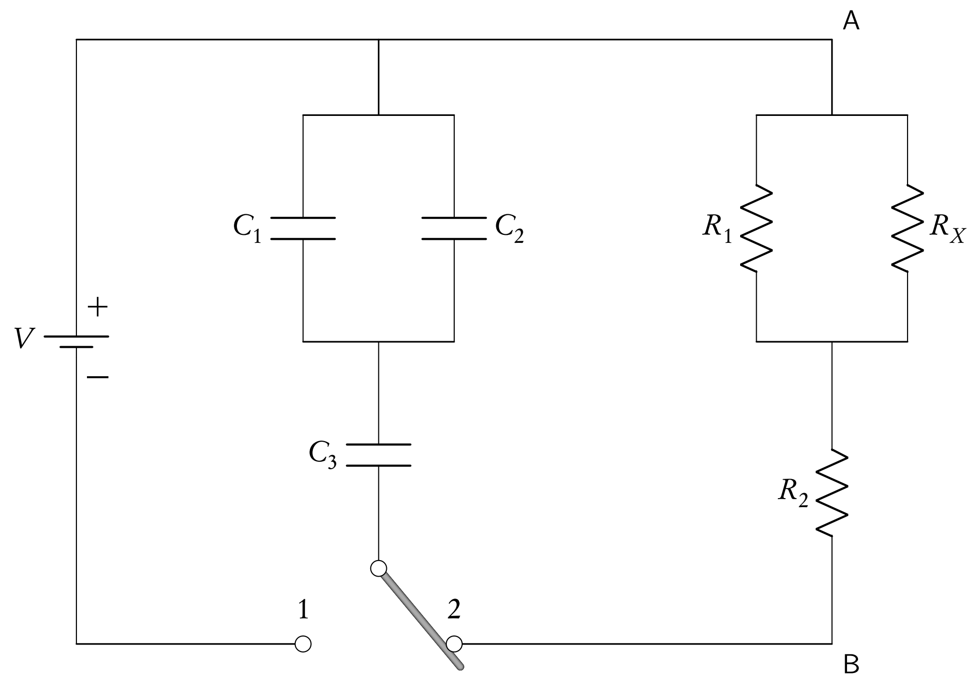
Tema 2

Il candidato, dopo aver spiegato il concetto di capacità elettrica e il funzionamento di un condensatore, ne descriva i processi di carica e di scarica attraverso un resistore trattando, in particolare, le relazioni matematiche che regolano tali processi e le trasformazioni energetiche in gioco.

Risolva poi il problema che segue.

Nel circuito riportato in figura l'interruttore T può essere spostato nelle posizioni 1 e 2. Inizialmente T si trova nella posizione 1 e il sistema costituito dai tre condensatori di capacità $C_1 = 10\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 14\,\mu\mathrm{F}$ e $C_3 = 8\,\mu\mathrm{F}$ è caricato da un generatore fino a raggiungere ai suoi capi la d.d.p. di $10\,\mathrm{V}$. Successivamente, T è spostato nella posizione 2 e i condensatori si scaricano attraverso i tre resistori R_1, R_2, e R_X.

Conoscendo i valori delle resistenze $R_1 = 3\,\mathrm{M\Omega}$ e $R_2 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, il candidato calcoli il valore di R_X in modo che la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del sistema di resistori sia il 36.8% del suo valore massimo dopo 18 secondi dall'inizio del processo di scarica. Calcoli, inoltre, l'energia dissipata per effetto Joule dall'insieme dei tre resistori e, in particolare, quella dissipata dal resistore R_X.



A.8.2. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione suppletiva

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, delle cifre significative e delle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

La scoperta dell'elettrone da parte di Sir John Thomson, nel 1897, rappresentò per i fisici un elemento fondamentale per la ricerca scientifica finalizzata a comprendere la composizione dell'atomo.

Il candidato esponga le sue conoscenze riguardo:

1. l'evoluzione del modello atomico,
2. la composizione del nucleo atomico,
3. l'emissione di radiazioni elettromagnetiche di varie frequenze e in particolare di raggi X,
4. l'emissione di radiazioni nucleari.

Infine, dopo aver spiegato che cosa s'intende per lunghezza d'onda di de Broglie, calcoli quella associata ad un elettrone dopo che esso ha superato lo spazio tra due griglie metalliche distanti una dall'altra 0.5 cm, dove è stato accelerato dalla d.d.p. di 60 V. Trascuri la velocità iniziale dell'elettrone e gli eventuali effetti relativistici.

Supponendo ora di non conoscere la distanza tra le due griglie metalliche, risolva lo stesso problema con considerazioni energetiche e confronti i risultati ottenuti.

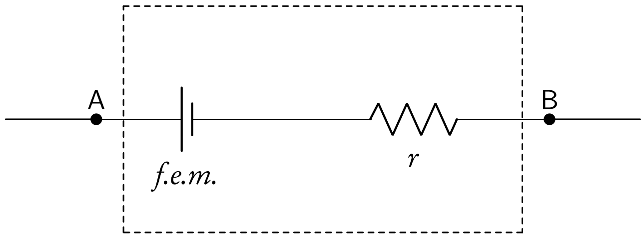
Si ricordano i seguenti dati:

Costante di Planck: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$

Massa a riposo dell'elettrone: $m_e = 9.108 \cdot 10^{-31}$ kg;
Carica dell'elettrone: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

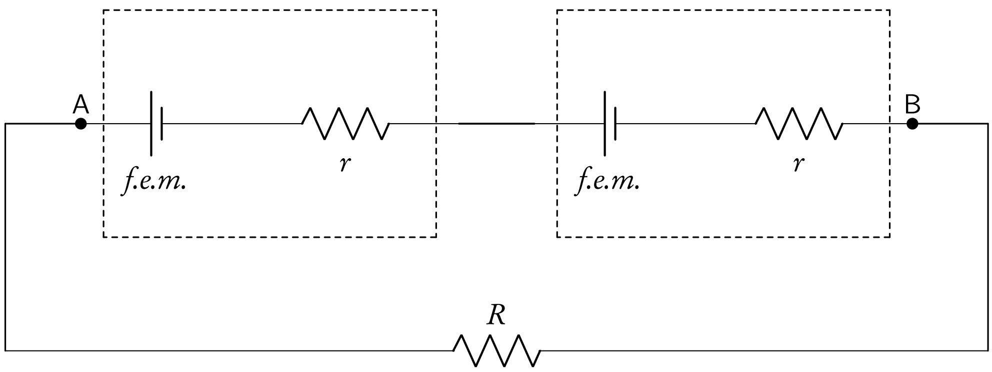
Tema 2

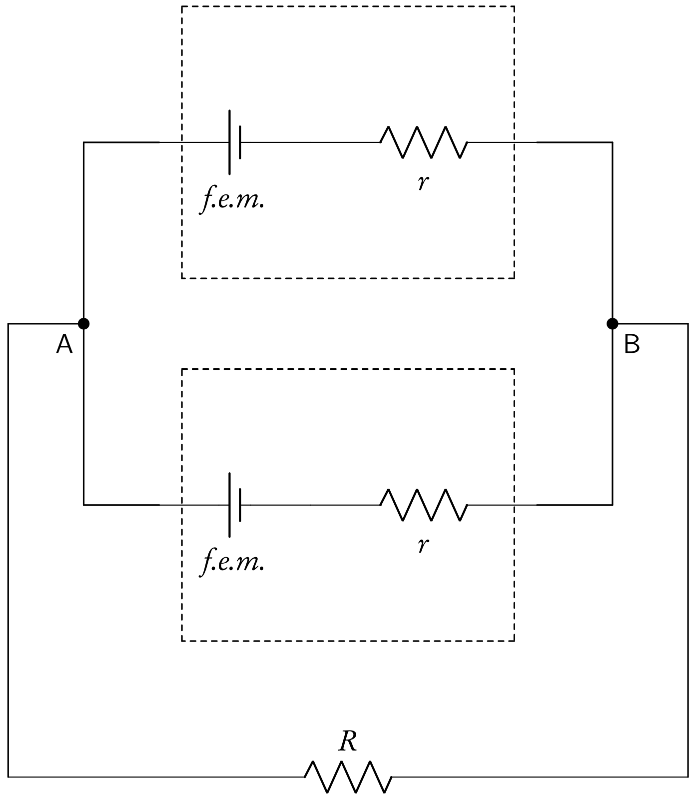
Un generatore elettrico è un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale tra due punti A e B ai quali è collegtao. Esso è schematizzato con una sorgente di forza elettromotrice (*f.e.m.*) più una resistenza interna, come mostrato nella figura.



Il candidato:

1. spieghi il significato di *forza elettromotrice* e ne proponga una definizione;
2. spieghi qual è la condizione necessaria perché la misura della differenza di potenziale V_{AB} misurata ai capi di un resistore R, collegato agli estremi A e B del generatore elettrico, sia accettabile come misura approssimata della *f.e.m.* del generatore stesso;
3. fornisca e commenti un possibile metodo sperimentale per la misura della *f.e.m* di un generatore elettrico;
4. ricavi l'espressione della corrente I che attraversa un resistore esterno R nei due circuiti rappresentati nella figure sottostanti, dove due generatori identici di forza elettromotrice *f.e.m.* e resistenza interna r sono collegati al resistore prima in serie e poi in parallelo.





Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Si hanno 200 piccoli generatori elettrici, ciascuno di *f.e.m.*= 1 V e resistenza interna $r = 0.2\,\Omega$. Questi generatori sono suddivisi in gruppi ("x" gruppi) di un ugual numero di elementi collegati in serie. Gli "x" gruppi sono poi collegati in parallelo e il sistema di generatori ottenuto è collegato ad un resistore estern0, di resistenza $R = 10\,\Omega$, ottenendo un circuito chiuso.

Il candidato calcoli per quale valore di "x" è massima la corrente I che attraversa il resistore esterno.

A.9. Anno scolastico 2013-2014

A.9.1. Tema di Fisica - Scientifico Tecnologico "Brocca" - Sessione ordinaria

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, delle cifre significative e delle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Tema 1

Arthur Compton vinse nel 1927 il premio Nobel per la Fisica per la scoperta dell'effetto che porta il suo nome.

Il candidato:

1. descriva l'effetto Compton ed analizzi le equazioni che lo caratterizzano;
2. esponga il concetto di lunghezza d'onda di Compton;

3. si soffermi sul motivo per cui l'effetto in esame è considerato una delle più importanti prove sperimentali dell'interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche;
4. esponga, quindi, cosa si intende per aspetto corpuscolare delle radiazioni elettromagnetiche;
5. risolva infine il seguente problema:

   Un fotone urta un elettrone libero che ha una velocità iniziale che può essere considerata trascurabile. Dopo l'urto si rileva un fotone diffuso che ha un'energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all'effetto Compton di 30° 00′.

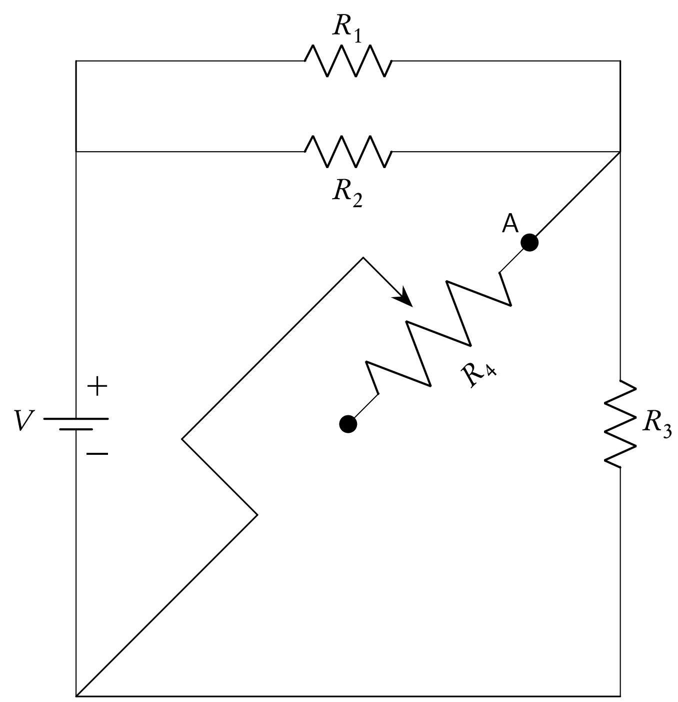
   Ricavare l'energia del fotone incidente e l'energia cinetica dell'elettrone di rimbalzo sempre espresse in eV.

Si ricorda che:
$1\,\mathrm{eV} = 1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$
$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ (costante di Planck)
$m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ (massa a riposo dell'elettrone)
$c = 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ (velocità deella luce)

Tema 2

Nel circuito riportato in figura $V = 3.60 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $R_1 = 1.20 \cdot 10^2\,\Omega$, $R_2 = 2.40 \cdot 10^2\,\Omega$, $R_3 = 3.60 \cdot 10^2\,\Omega$, R_4 è un resistore variabile di resistenza massima pari a $1.80 \cdot 10^2\,\Omega$.

Considerando il potenziometro costituito da un conduttore omogeneo di sezione costante e di lunghezza ℓ calcolare quale deve essere la posizione del cursore, espressa come frazione di ℓ, per far sì che sul resistore R_3 vengano dissipati 40.0 W per effetto Joule. La posizione deve essere valutata considerando A come punto di inizio del potenziometro.



Il candidato inoltre:

1. descriva i concetti di tensione e di corrente;
2. dia una definizione delle unità di misura delle grandezze utilizzate per risolvere il problema proposto;
3. descriva la prima e la seconda legge di Ohm;
4. descriva l'effetto Joule dandone anche una interpretazione microscopica;
5. descriva il fenomeno della conduzione nei metalli e lo metta a confronto con il comportamento degli isolanti.

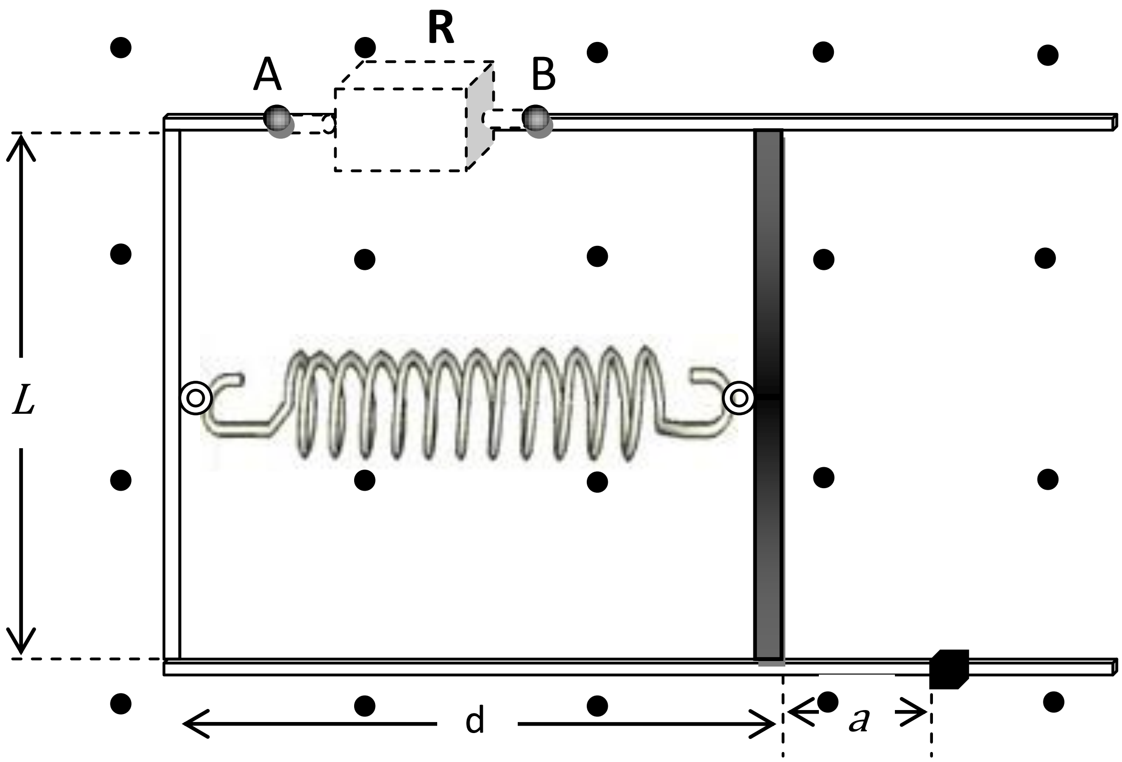
A.10. Anno scolastico 2014-2015

A.10.1. Simulazione di Fisica del 11 marzo 2015

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova tre ore.

Problema n.1: Un generatore "IDEALE"

Il tuo amico Luigi pensa di aver avuto un'idea geniale: ha progettato un generatore di tensione alternata che, una volta avviato, non necessita di ulteriore apporto di energia per il suo funzionamento se non quel poco che serve a vincere gli esegui attriti del dispositivo. Ti mostra la rappresentazione schematica sotto raffigurata descrivendola così:



Una barretta metallica, di massa m, può scorrere lungo i due binari paralleli di una guida ad U anch'essa metallica. La barretta, di lunghezza L, è collegata al lato della guida parallelo ad essa mediante una molla fissata con materiale isolante. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$, ortogonale al piano della guida.

La barretta viene spostata di un tratto a e poi bloccata in modo da mantenere la molla allungata. Una volta tolto il blocco la barretta inizierà ad oscillare generando tra i poli A e B una differenza di potenziale alternata che potrebbe essere utilizzata, ad esempio collegando ai poli una resistenza R, fin quando la barretta si muove.

Volendo presentare la sua idea in un concorso scolastico, Luigi chiede a te di:

1. preparare una descrizione qualitativa e quantitativa del fenomeno fisico che determina la differenza di potenziale tra i poli A e B, e calcolando il valore della costante elastica della molla che consente di produrre una tensione di frequenza pari a quella della rete domestica di 50.0 Hz, nell'ipotesi che la massa m abbia il valore $2.0 \cdot 10^{-2}$ kg.
2. valutare il valore massimo f_{max} della forza elettromotrice indotta $f_{e.m.}$ che tale generatore produce nel caso $a = 1.0 \cdot 10—2\,\mathrm{m}$, $L = 1.0 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$, $B = 0.30\,\mathrm{T}$.

Tu non sei convinto che il generatore ideato da Luigi una volta avviato possa fornire per sempre energia elettrica ad una utenza, senza ulteriore apporto di energia; per capire meglio cerchi di ottenere energia dal generatore e colleghi la resistenza elettrica R, come mostrato in figura, tra i poli A e B, misuri la differenza di potenziale tra i poli in funzione del tempo e ne tracci un grafico.

3. Che tipo di grafico ottieni?
4. Che tipo di moto ha la barretta e perché?
5. Come spiegheresti a Luigi cosa avviene dal punto di vista energetico e perché la sua idea non è poi così geniale come lui immagina?

Problema n.2: Una missione spaziale

Nel 2200 il più moderno razzo vettore interplanetario costruito dall'uomo può raggiungere il 75.0% della velocità della luce nel vuoto. Farai parte dell'equipaggio della missione che deve raggiungere un pianeta che orbita intorno alla stella Sirio, che dista 8.61 anni-luce e si avvicina con velocità di 7.63 km/s al sistema solare, effettuare ricerche lì per 2.00 anni e poi rientrare sulla Terra. Devi contribuire alla programmazione di tutti i dettagli della missione, come ad esempio le scorte di cibo e acqua; prendendo come istante di riferimento $t = 0$ il momento della partenza dalla Terra, considerando che viaggerai sempre alla massima velocità possibile e trascurando tutti gli effetti dovuti alla accelerazione del moto nella fase di partenza e di arrivo, fatte tutte le ipotesi aggiuntive che ritieni necessarie, devi valutare:

1. quanto tempo durerà la missione per un osservatore sulla terra;
2. quanto tempo durerà il viaggio di andata e quello di ritorno secondo i componenti dell'equipaggio;
3. quanto tempo durerà complessivamente la missione secondo i componenti dell'equipaggio.

Alcuni test effettuati nei laboratori della Terra sui componenti elettronici simili a quelli utilizzati sull'astronave, indicano che è necessario effettuare alcuni interventi di manutenzione sull'astronave. Dopo 1.00 anni dalla partenza (tempo terrestre) viene quindi inviato un segnale alla navicella. Quando il capitano riceve il segnale,

4. quanto tempo è trascorso sulla navicella dall'inizio del viaggio?

Ricevuto il segnale, il capitano invia immediatamente la conferma alla Terra;

5. dopo quanto tempo dall'invio del segnale alla navicella la base terrestre riceve la conferma della ricezione?

Durante il viaggio di andata, il ritardo nelle comunicazioni con l'astronave aumenta con l'aumentare della distanza; per illustrare al pubblico questo effetto

6. disegna su un piano cartesiano i grafici che mostrino rispetto al riferimento terrestre la distanza dalla Terra dell'astronave e dei due segnali di comunicazione, in funzione del tempo.

Il responsabile della sicurezza della missione ti comunica una sua preoccupazione: teme che, a causa della contrazione relativistica delle lunghezze, il simbolo della flotta terrestre riportato sulla fusoliera del razzo, un cerchio, possa apparire deformato agli occhi delle guardie di frontiera, che potrebbero quindi non riconoscerlo, e lanciare un falso allarme. Pensi che sia una preoccupazione fondata?

7. Illustra le tue considerazioni in merito a questa preoccupazione e dai una risposta al responsabile della sicurezza, corredandola con argomenti quantitativi e proponendo una soluzione al problema.

Indicatori di valutazione portati a conoscenza dello studente:

— Osservare criticamente i fenomeni e formularne ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi.

— Formalizzare situazioni problematiche e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione.

— Interpretare e/o elaborare i dati proposti, anche di natura sperimentale, secondo un'ipotesi, valutando l'adeguatezza di un processo di misura e/o l'incertezza dei dati, verificando la pertinenza dei dati alla validazione del modello interpretativo.

A.11. Anno scolastico 2015-2016

A.11.1. Simulazione di Fisica del 25 gennaio 2016

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e tre quesiti a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova sei ore.

Problema n.1: Il metodo delle parabole di Thomson

Navigando in Internet per una ricerca sugli isotopi hai trovato il seguente articolo di J. J. Thomson pubblicato sui "Proceedings of The Royal Society" nel 1913.

PROCEEDINGS OF

THE ROYAL SOCIETY.

Section A.—Mathematical and Physical Sciences.

Bakerian Lecture :—*Rays of Positive Electricity.*
By Prof. Sir J. J. Thomson, O.M., F.R.S.

(Lecture delivered May 22,—MS. received June 4, 1913.)

[Plates 1—3.]

In 1886, Goldstein observed that when the cathode in a vacuum tube was pierced with holes, the electrical discharge did not stop at the cathode; behind the cathode, beams of light could be seen streaming through the holes in the way represented in fig. 1. He ascribed these pencils of light to rays

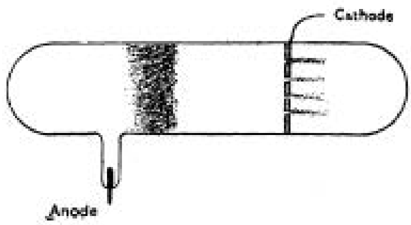


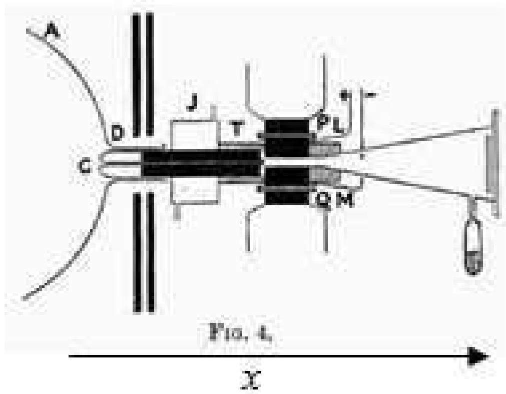
Fig. 1.

passing through the holes into the gas behind the cathode; and from their

L'esperimento a cui l'articolo fa riferimento può essere considerato come uno tra i più importanti del secolo ventesimo, nel passaggio dalla Fisica cosiddetta Classica alla Fisica Moderna, più precisamente l'inizio della Fisica Subatomica.

Nell'articolo Thomson descrive le sue osservazioni sui cosiddetti "raggi canale", formati da quelli che noi oggi chiamiamo ioni, quando attraversano un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ e un campo magnetico, pure uniforme, $\vec{B}$ paralleli tra loro e perpendicolari alla velocità delle particelle $\vec{v}$.

Nel disegno riprodotto qui di seguito ed estratto dall'articolo originale, le particelle entrano attraverso l'ugello C e, con velocità parallele tra loro, attraversano il campo elettrico e quello magnetico nella regione identificata dalle lettere PLQM. I campi sono paralleli tra di loro e perpendicolari al piano della pagina.



Nell'articolo Thomson scrive:

"Supponi che un fascio di queste particelle si muova parallelamente all'asse x, colpendo un piano fluorescente perpendicolare al loro cammino in un punto O. Se prima di raggiungere il piano agisce su di esse un campo elettrico parallelo all'asse y, il punto ove le particelle raggiungono il piano è spostato parallelamente all'asse y di una distanza pari a:

$$y = \frac{q}{mv_0^2} A_1 ,$$

dove q, m e v_0 sono rispettivamente la carica, la massa e la velocità delle particelle e A_1 è una costante dipendente dal campo elettrico e dal cammino della particella ma indipendente da q, m, v_0. Se invece sulle particelle agisce un campo magnetico anch'esso parallelo all'asse y, le particelle vengono deflesse parallelamente all'asse z e il punto ove le particelle raggiungono il piano è spostato parallelamente all'asse z di una distanza pari a:

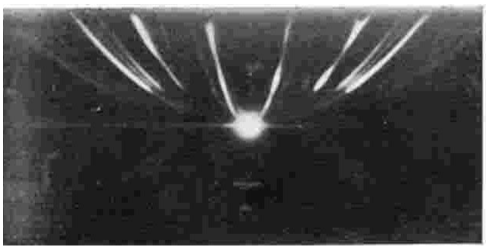
$$z = \frac{q}{mv_0} A_2 ,$$

dove A_2 è una costante dipendente dal campo magnetico e dal cammino della particella ma indipendente da q, m e v_0".

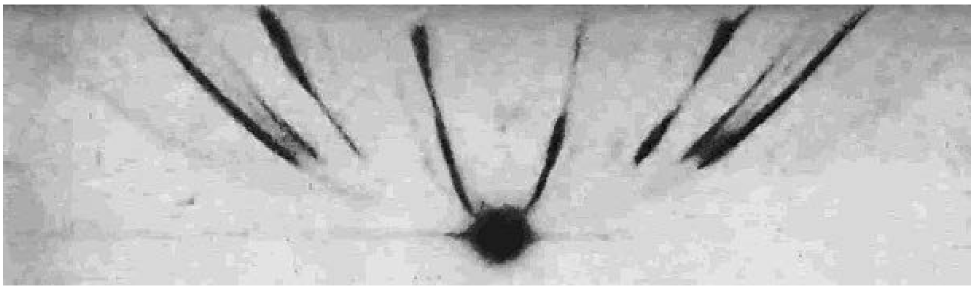
E più oltre continua: "Così, tutte le particelle con lo stesso rapporto q/m in presenza di campo elettrico e magnetico colpiscono il piano su una parabola che può essere visualizzata facendo incidere le particelle su una lastra fotografica."

E ancora: "Poiché la parabola corrispondente all'atomo di idrogeno è presente in praticamente tutte le foto ed è immediatamente riconoscibile [...] è molto facile trovare il valore di q/m per tutte le altre."

Un esempio di queste foto è riportato nella figura seguente:



che viene riportata, ingrandita e invertita in colore, nella figura seguente:



1. Fissando un sistema di riferimento con origine nel punto O ove le particelle colpiscono il piano fluorescente in assenza del campo elettrico e di quello magnetico, l'asse x nella direzione del moto delle particelle e l'asse y nella direzione comune dei campi elettrico e magnetico, dimostra dalle informazioni date la validità delle formule riportate da Thomson per le deflessioni nelle direzioni y e z dovute al campo elettrico e al campo magnetico. Nella dimostrazione assumi che gli effetti di bordo siano trascurabili e che la forza di Lorentz sia sempre diretta nella direzione z.

2. Dimostra che le particelle con lo stesso rapporto q/m formano sul piano $x=0$ una parabola quando è presente contemporaneamente sia il campo elettrico sia quello magnetico; determina l'equazione della parabola in funzione del rapporto q/m e dei parametri A_1 e A_2.

3. Ricordando che gli ioni di idrogeno hanno il massimo rapporto q/m, individua la parabola dovuta agli ioni di idrogeno. Scegli poi un'altra parabola delle foto e determina il rapporto q/m relativo a questa parabola, in unità dello stesso rapporto q/m per l'idrogeno. Descrivi dettagliatamente il procedimento seguito.

4. Immagina ora di ruotare il campo elettrico in modo che sia diretto nella direzione z e con verso tale da deflettere le particelle in verso opposto alla deflessione dovuta al campo magnetico. Disegna la direzione e verso del campo elettrico e di quello magnetico affinché essi operino come descritto e determina la condizione che deve essere verificata affinché la deflessione totale sia nulla. Ipotizzando di utilizzare il dispositivo come strumento di misura, quale grandezza potrebbe misurare?

Problema n. 2: Uno strumento rinnovato

Nel laboratorio di Fisica, durante una lezione sul magnetismo, scorgi in un angolo un vecchio strumento che avevi utilizzato qualche anno fa per lo studio del moto uniformemente accelerato (Fig.1):

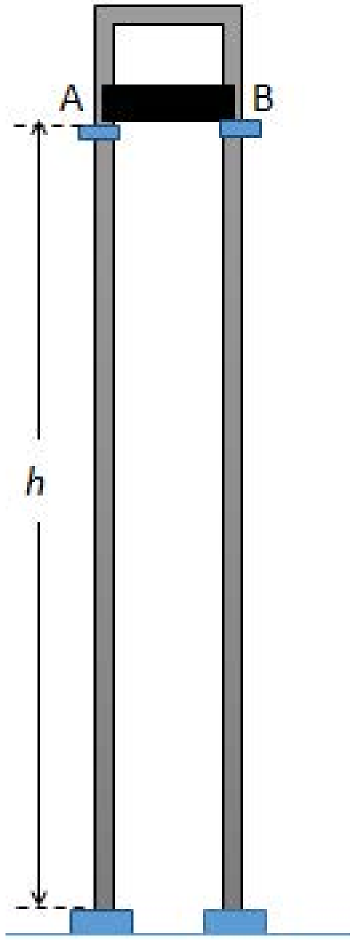


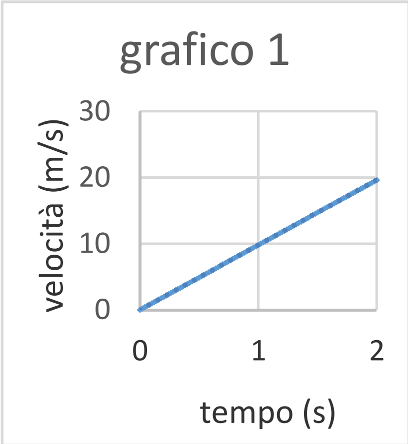
Figura 1

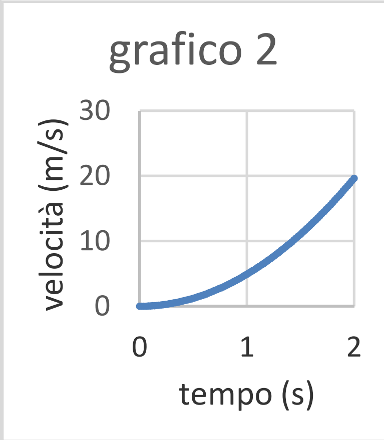
una barretta metallica poggia su due blocchi A e B ancorati ad una guida ad U anch'essa metallica; la guida si trova su un piano perpendicolare al pavimento con il quale è in contatto attraverso due piedini di materiale isolante. La barretta si trova ad un'altezza h dal pavimento e, una volta eliminati i blocchi, scivola verso il basso lungo i binari della guida con attrito trascurabile.

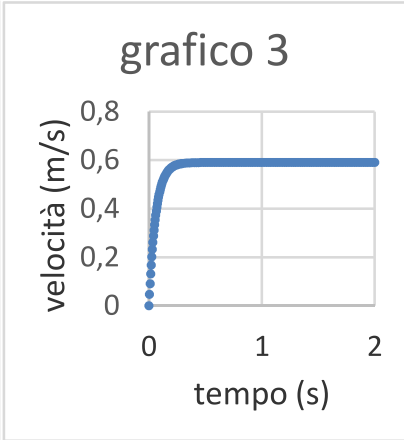
Pensando a ciò che hai studiato recentemente ti viene in mente di utilizzare lo strumento per effettuare misure in campi magnetici. Immagini così di immergere completamente lo strumento in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della guida.

In questa condizione:

1. Rappresenta ed esamina la nuova situazione descrivendo i fenomeni fisici coinvolti e le forze alle quali è sottoposta la barretta durante il suo moto verso il basso.
2. Individua quale tra i seguenti grafici rappresenta l'andamento nel tempo della velocità della barretta giustificando la scelta fatta.







3. Calcola il valore v_{MAX} della velocità massima della barretta assumendo per essa una massa pari a 30 g, una lunghezza di 40 cm, una resistenza elettrica di 2.0 Ω (supponi trascurabile la resistenza elettrica della guida ad U) ed un campo magnetico applicato di intensità 2.5 T.
4. Determina l'equazione che descrive il moto della barretta e verifica che la funzione

$$v(t) = v_{\text{MAX}}\left(1 - e^{t/\tau}\right), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{v_{\text{MAX}}}{g},$$

ne è soluzione; definisci il significato dei simboli presenti nella funzione servendoti, eventualmente, di un grafico.

Indicatori per la valutazione del problema

— Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.

— Formalizzare situazioni problematiche e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione.

— Interpretare e/o elaborare i dati proposti, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto.

— Descrivere il processo risolutivo adottato e comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.

Quesiti

Costanti utili:
$c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s (velocità della luce nel vuoto)
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m (costante dielettrica del vuoto)
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (permeabilità magnetica del vuoto)
$q = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C (carica elettrone)

1. Una lampadina ad incandescenza, alimentata con tensione alternata pari a 220 V, assorbe una potenza elettrica media pari a $1.0 \cdot 10^2$ W ed emette luce grazie al surriscaldamento di un filamento

di tungsteno, con

$$\frac{\text{Potenza media luminosa emessa}}{\text{Potenza media elettrica assorbita}} = 2\%.$$

Ipotizzando per semplicità che la lampadina sia una sorgente puntiforme che emette uniformemente in tutte le direzioni, e che la presenza dell'aria abbia un effetto trascurabile, calcolare ad una distanza $d = 2.0\,\text{m}$ dalla lampadina:

a) l'intensità media della luce;

b) i valori efficaci del campo elettrico e del campo magnetico.

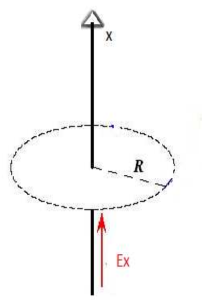
Ritieni che le ipotesi semplificative siano adeguate alla situazione reale? Potresti valutare qualitativamente le differenze tra il caso reale e la soluzione trovata nel caso ideale?

2. Un condensatore è costituito da due armature piane e parallele di forma quadrata separate da aria, di lato $\ell = 5.0\,\text{cm}$, distanti $1.0\,\text{mm}$ all'istante $t = 0$, che si stanno allontanando tra loro di un decimo di millimetro al secondo. La differenza di potenziale tra le armature è $1.0 \cdot 10^3\,\text{V}$. Calcolare la corrente di spostamento che attraversa il condensatore nell'istante $t = 0$, illustrando il procedimento seguito.

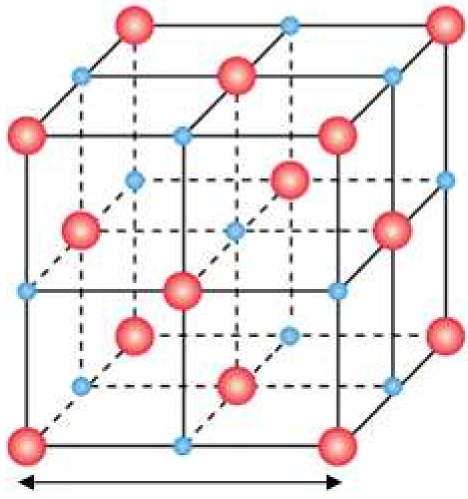
3. Una radiolina può ricevere trasmissioni radiofoniche sintonizzandosi su frequenze che appartengono ad una delle tre seguenti bande: *FM* (Frequency Modulation): $88 - 108\,\text{MHz}$; *MW* (Medium Waves): $540 - 1600\,\text{KHz}$; e *SW* (Short Waves): $6.0 - 18.0\,\text{MHz}$. Quali sono le lunghezze d'onda massime e minime delle tre bande di ricezione? In quale delle tre bande la ricezione di un'onda elettromagnetica è meno influenzata dalla presenza degli edifici?

4. Nello spazio vuoto è presente un campo elettrico $\vec{E}_x$, la cui variazione media nel tempo, lungo una direzione individuata dalla retta orientata x, è di $3.0 \cdot 10^6\,\text{V}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Determinare l'intensità del campo magnetico medio indotto, a una distanza R di $3.0\,\text{cm}$ dalla retta x.

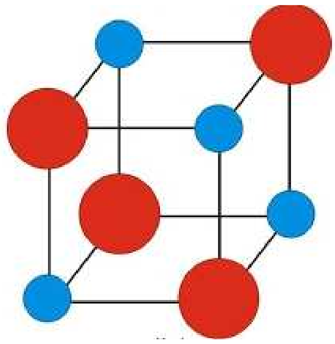
   Cosa accade all'aumentare di R?



5. Nel cristallo di sale (NaCl) gli ioni positivi e negativi Na+ e Cl- si dispongono, alternandosi, ai vertici di celle cubiche, con una distanza tra due consecutivi ioni Na+ (o Cl-) pari ad $\ell = 0.567\,\text{nm}$.



In questo cristallo l'energia di legame è dovuta in buona parte all'interazione coulombiana tra gli ioni. Considerando una cella cubica contenente quattro ioni positivi e quattro ioni negativi,



calcolare l'energia coulombiana per ione del cristallo, e determinare quale percentuale essa rappresenta del valore sperimentale dell'energia di legame, pari a 4.07 eV.

6. Un'onda luminosa non polarizzata incide su un polarizzatore P_1 e la radiazione da esso uscente incide su un secondo polarizzatore P_2 il cui asse di trasmissione è posto a 90° rispetto a quello del primo. Ovviamente da P_2 non esce nessuna radiazione.

   Dimostrare che ponendo un terzo polarizzatore P_3 tra P_1 e P_2, che forma un angolo α con P_1, ci sarà radiazione uscente da P_2.

   Trovare:

   — l'angolo α per cui l'intensità della radiazione uscente è massima;

   — il valore di tale intensità rispetto a quella (I_0) dell'onda non polarizzata.

Indicatori per la valutazione dei quesiti.

1. Comprensione e conoscenza

- Comprende la richiesta.
- Conosce i contenuti.

2. Abilità logiche e risolutive
   - È in grado di separare gli elementi dell'esercizio evidenziandone i rapporti.
   - Usa un linguaggio appropriato.
   - Sceglie strategie risolutive adeguate.
3. Correttezza dello svolgimento
   - Esegue calcoli corretti.
   - Applica Tecniche e Procedure, anche grafiche, corrette.
4. Argomentazione
   - Giustifica e Commenta le scelte effettuate.
5. Valutazione
   - Formula autonomamente giudizi critici di valore e di metodo.

A.12. Anno scolastico 2016-2017

A.12.1. Simulazione di Fisica del 25 ottobre 2016

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e tre quesiti a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova sei ore.

Problema 1

In laboratorio è stato preparato il dispositivo rappresentato in Figura 1. La bobina è costituita da 100 spire rettangolari di rame i cui lati misurano 25 cm e 30 cm. La bobina può ruotare con attrito trascurabile intorno al suo asse e durante la rotazione le estremità del filo strisciano su due anelli conduttori, mantenendo con essi un contatto elettrico. La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme e costante.

Sull'asse della bobina è montato un cilindro intorno al quale è avvolto un filo. All'estremità del filo è sospeso un pesetto. Quando il pesetto viene lasciato libero, esso cade verso il basso mettendo in rotazione la bobina. Alla partenza del pesetto il piano della spira è perpendicolare alla direzione del campo magnetico.

Durante la rotazione della bobina, alle sue estremità, che restano aperte in modo che non circoli corrente, si produce una *f.e.m.* il cui valore viene rilevato da un sistema di acquisizione automatico che acquisisce 1000 valori al secondo.

In Figura 2 sono stati riportati i dati sperimentali acquisiti dal sistema. Questo grafico rappresenta in ordinata la *f.e.m.* prodotta alle estremità della bobina durante la caduta del pesetto ed in ascissa il tempo.

La Figura 3 rappresenta lo stesso grafico di Figura 2. In quest'ultimo grafico i punti sperimentali sono stati uniti da segmenti per migliorarne la leggibilità.

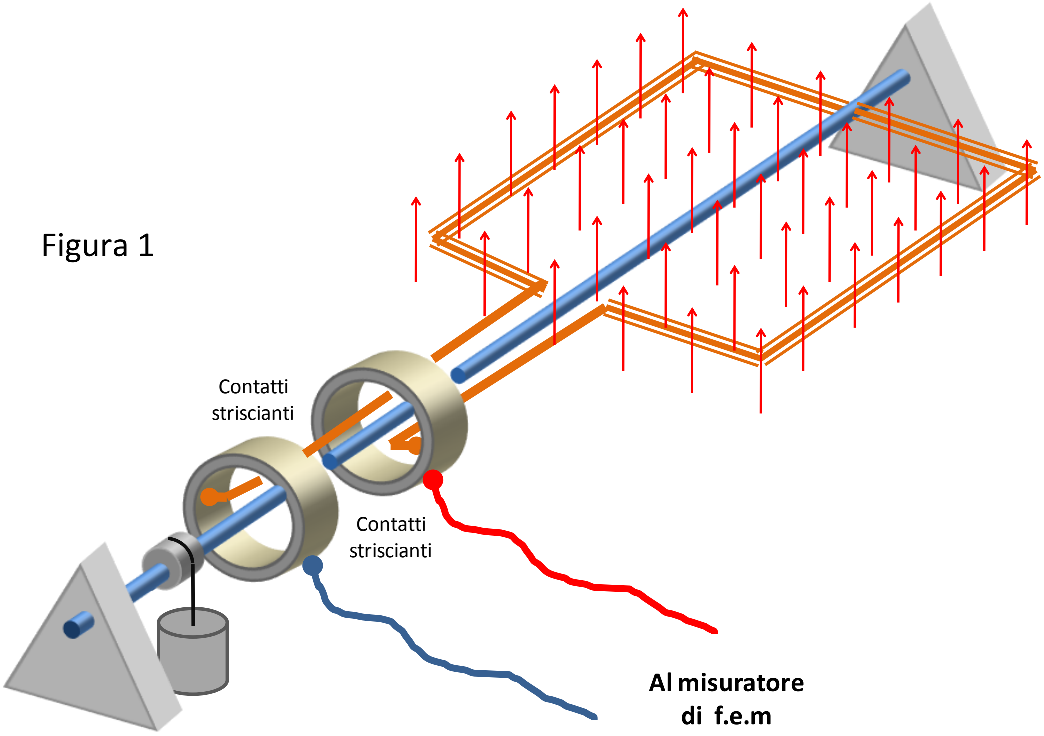


Figura 1

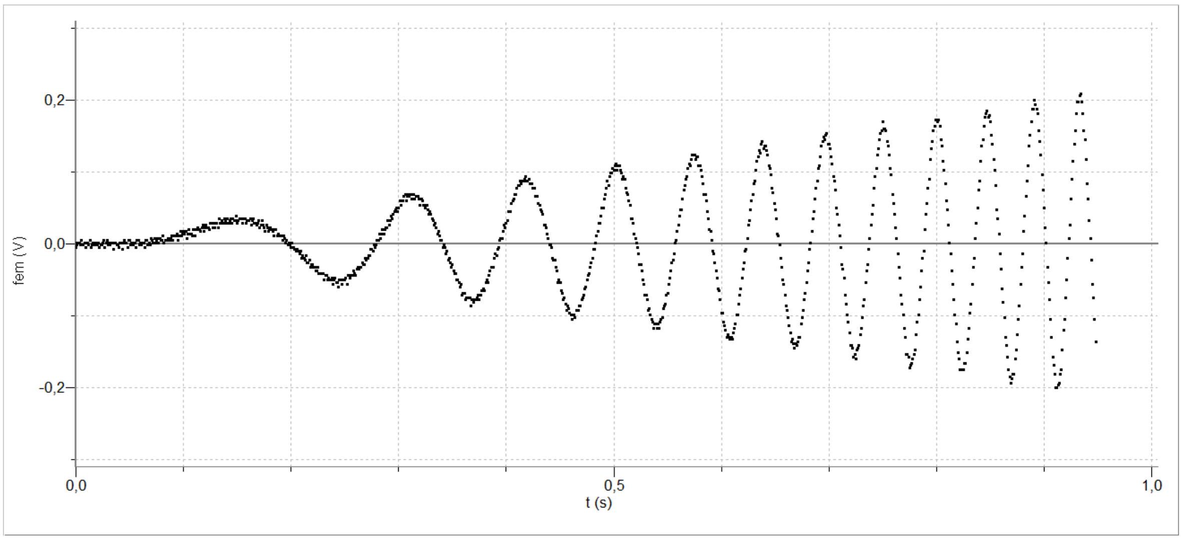


Figura 2

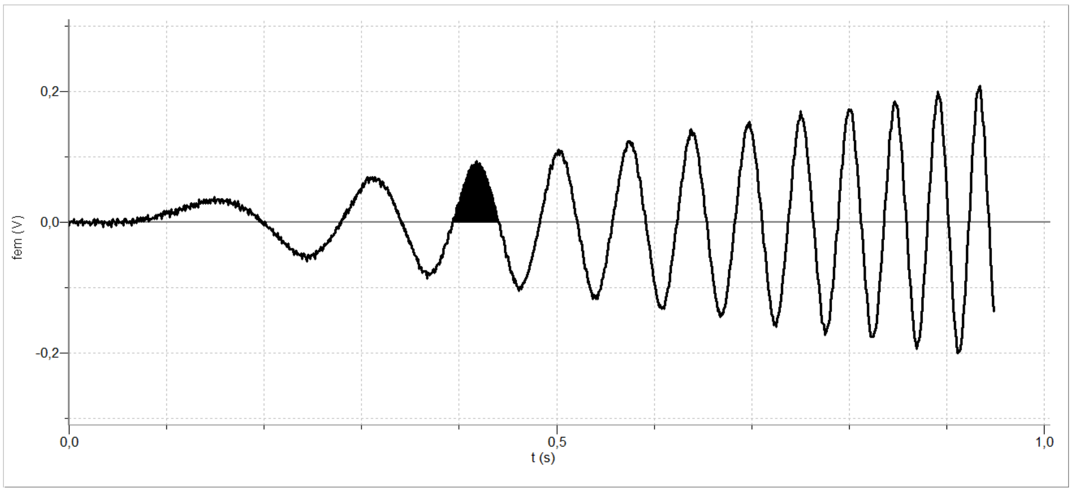


Figura 3

1. Spiega il fenomeno fisico che produce la *f.e.m.* alle estremità della bobina e, sulla base di esso, spiega il particolare andamento del grafico sperimentale.
2. Utilizza la legge del fenomeno fisico per dedurre teoricamente la funzione matematica $y = f(t)$ che descrive la *f.e.m.* alle estremità della bobina in funzione del tempo e verifica che la funzione ottenuta, coerentemente con il grafico sperimentale, abbia ampiezza crescente e periodo decrescente. Considera l'intensità del campo magnetico B e l'accelerazione angolare α della bobina come parametri. Considera inoltre aperte le estremità della bobina.
3. Deduci dal grafico sperimentale le informazioni quantitative necessarie per determinare il valore dell'accelerazione angolare della bobina e l'intensità del campo magnetico in cui ruota la bobina.
4. Spiega qual è il significato fisico dell'area, evidenziata in Figura 3, compresa tra ogni semiperiodo e l'asse dei tempi. Verifica, utilizzando la funzione $y = f(t)$, che queste aree hanno, in modulo, tutte lo stesso valore.

Problema 2

Negli anni 1963-1964 il fisico W. Bertozzi con la sua equipe realizzò un esperimento al MIT di Boston verificando l'esistenza di una velocità limite, pari a quella della luce nel vuoto.

Secondo la fisica classica è possibile accelerare un corpo dalla quiete fino a una velocità qualunque, per quanto grande essa sia, mentre per la relatività questo non è possibile.

L'esperimento consiste nell'accelerare elettroni attraverso opportuni campi elettrici prodotti da una un acceleratore di Van de Graaff e da un acceleratore lineare a radiofrequenza (LINAC). Il fascio di elettroni è prodotto da un catodo caldo, sotto forma di impulsi della durata di 3 ns ($3 \cdot 10^{-9}$ s) e viene accelerato dall'acceleratore di Van de Graaff attraverso differenze di potenziale variabili fino a un massimo di 1.5 milioni di volt.

Gli elettroni, usciti dall'acceleratore di Van de Graaff, attraversano un tubicino metallico posto in A nel quale inducono un impulso di corrente che viene inviato all'oscilloscopio (vedi Figure 1 e 2). Il tragitto da A e B è lungo 8.40 m ed è privo di aria e di campi elettrici che possano modificare la velocità degli elettroni (l'acceleratore LINAC è spento in una prima fase dell'esperimento e in particolare non è utilizzato nelle prime tre misure di sotto riportate). Arrivati in B gli elettroni urtano un disco di alluminio nel quale provocano un impulso di corrente che viene inviato anch'esso all'oscilloscopio. Sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi dà la misura del tempo impiegato dagli elettroni per andare da A a B e quindi, nota la distanza $|\overline{AB}|$, è possibile calcolare la loro velocità.

Ogni quadretto del reticolo dell'oscilloscopio (divisione) corrisponde ad un tempo di circa $0.98 \cdot 10^{-8}$ s.

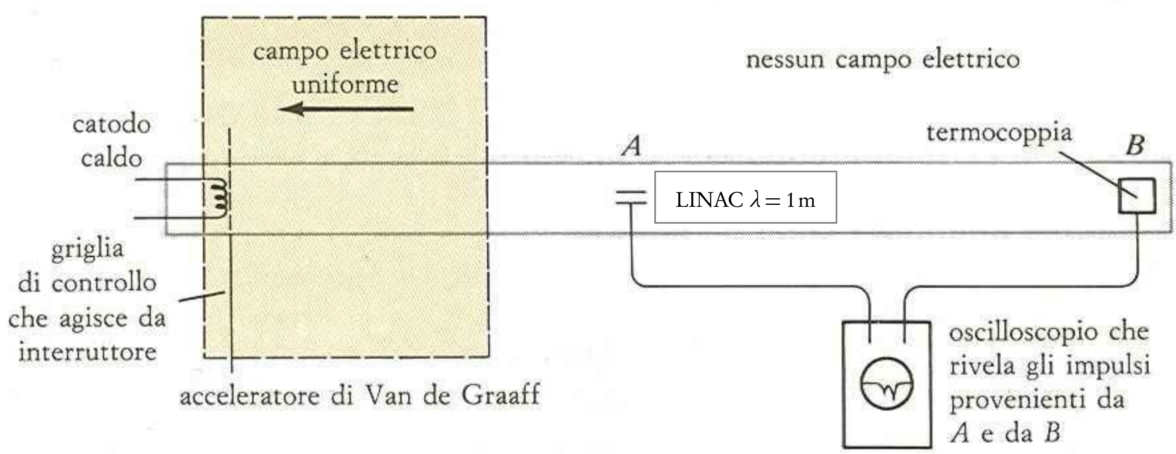


Figura 1

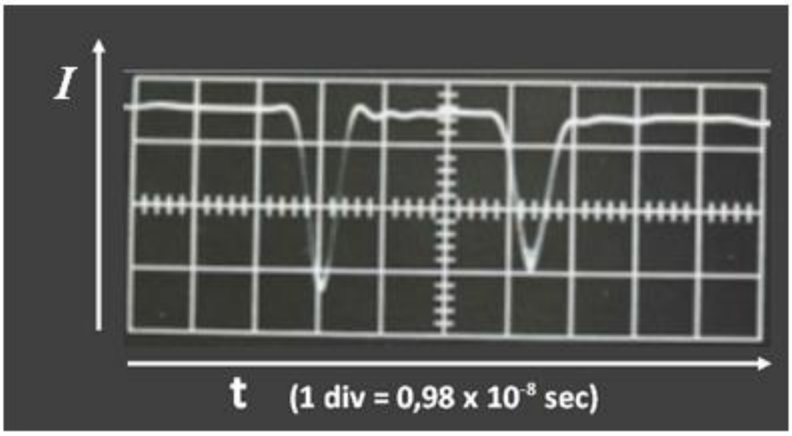


Figura 2: Impulsi provenienti da A e B

Leggendo sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi, al variare della differenza di potenziale applicata dall'acceleratore agli elettroni, si ottengono i seguenti valori.

Differenza di potenziale (10^6 V)	10.5	1.0	1.5
N° divisioni tra i due impulsi	3.30	3.10	2.95

In una seconda fase dell'esperimento, per aumentare ulteriormente l'energia degli elettroni viene utilizzato anche l'acceleratore lineare (LINAC) presente nel primo metro successivo al punto A, nel quale gli elettroni vengono accelerati da ulteriori 3.0 milioni di volt.

Nell'esperimento viene anche misurato il calore prodotto dagli elettroni sul disco B adoperando una termocoppia, e la carica incidente sullo stesso disco B, per mezzo di un misuratore di cariche. I risultati ottenuti per due diversi valori di differenza di potenziale complessiva sono:

Differenza di potenziale (10^6 V)	1.5	4.5
Energia del fascio in B (J)	10.0	29.2
Carica del fascio in B (μC)	6.1	6.1

Dopo questa breve esposizione, ti viene richiesto di:

1. Analizzare l'esperimento descritto e rappresentare in un piano cartesiano l'andamento div^2/c^2, dove v è la velocità degli elettroni nel punto B e c è la velocità della luce nel vuoto, in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore, sia per i valori di velocità previsti dal modello classico che per i valori effettivamente misurati nell'esperimento.
2. Individuare il modello fisico più adatto a descrivere la situazione sperimentale, relativamente all'andamento di v^2/c^2 in funzione del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore.
3. Calcolare i valori di v^2/c^2 attesi in base al modello fisico individuato, confrontandoli con quelli sperimentali e discutere l'andamento atteso.
4. Verificare, utilizzando i dati della seconda tabella nei casi di differenza di potenziale 1.5 e 4.5 milioni di volt, che l'energia cinetica posseduta dagli elettroni quando arrivano in B è circa uguale a quella fornita dall'acceleratore, giustificando così la seguente affermazione: "Il fatto che il valore della velocità misurata sia inferiore a quello previsto dalla fisica classica non è dovuto a perdite di energia nell'apparato".

Questionario

1. Una lampadina a incandescenza di potenza $P = 100\,\text{W}$ emette luce in maniera isotropa. Se viene posta al centro di una stanza cubica di lato $L = 7\,\text{m}$, quanta energia arriverà in 10 minuti sul soffitto della stanza?
2. Un elettrone e un positrone (antiparticella dell'elettrone con la stessa massa dell'elettrone, ma con carica opposta) si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità. L'energia posseduta da entrambe le particelle è di 1.51 MeV. Sapendo che la loro massa a riposo è di 0.511 MeV/c^2, qual è la velocità del positrone nel sistema di riferimento dell'elettrone?
3. Un atomo di idrogeno si trova in uno stato eccitato dopo aver assorbito un fotone ultravioletto di lunghezza d'onda $\lambda = 97.2\,\text{nm}$.

   Questo atomo può riportarsi allo stato fondamentale seguendo diverse transizioni a ognuna delle quali corrisponde la emissione di luce di una particolare lunghezza d'onda.

   Quante sono le transizioni possibili che provocano emissione di fotoni con lunghezza d'onda diversa da quella del fotone assorbito?

Quali tra queste transizioni provocano emissione nel visibile?

(*costante di Rydberg*: $R = 1.0974 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^{-1}$)

4. Un'antenna ricevente semplificata è costituita da una spira di rame di forma quadrata. Il lato della spira misura 20 cm e le sue estremità sono collegate ad un voltmetro. Quest'ultimo è impostato in modo da fornire il valore efficace della *f.e.m.* ai capi della spira, ovvero

$$(f.e.m.)_{eff} = \frac{(f.e.m.)_{\max}}{\sqrt{2}}$$

dove $(f.e.m.)_{\max}$ è il valore massimo di una *f.e.m.* alternata.

L'antenna ricevente è posta a 100 m dall'antenna di una radio ricetrasmittente. Quest'ultima è del tipo utilizzato dai radioamatori.

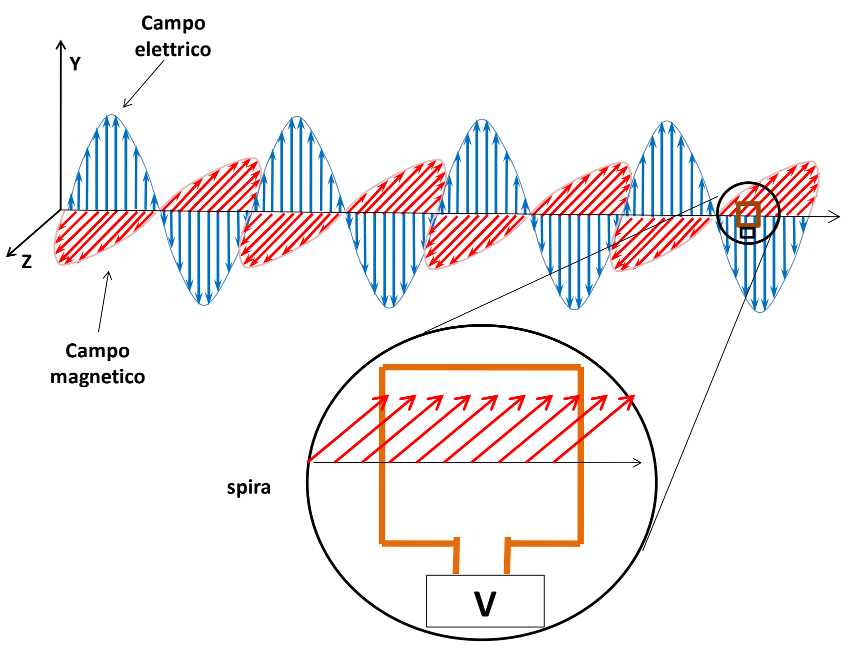
Queste radio trasmettono ad una frequenza di 27 MHz e la legge impone loro di trasmettere con una potenza non superiore a 4 W per non disturbare la ricezione delle trasmissioni radiofoniche e televisive. Talvolta i radioamatori non rispettano questo limite e trasmettono con potenze che possono arrivare a 200 W.

Si vuole stabilire se la ricetrasmittente in esame rispetta il limite di potenza imposto dalla legge.

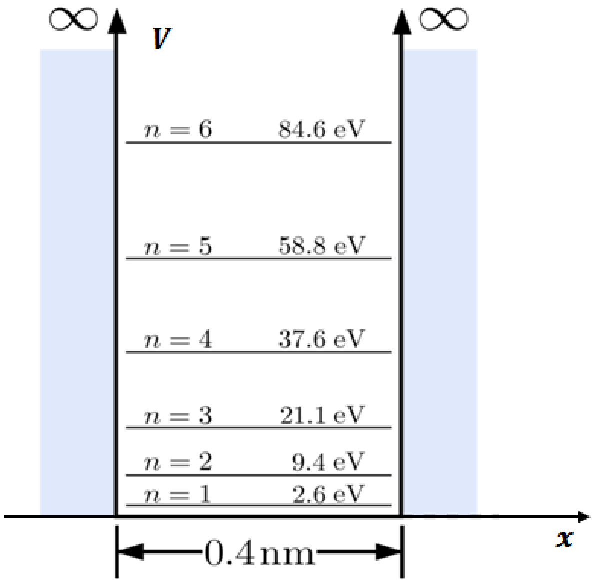
Il nostro voltmetro misura il massimo della *f.e.m.* quando il piano della spira è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda e perpendicolare al campo magnetico, come mostrato in figura.

Il valore efficace di questa *f.e.m.* è di 12.5 mV.

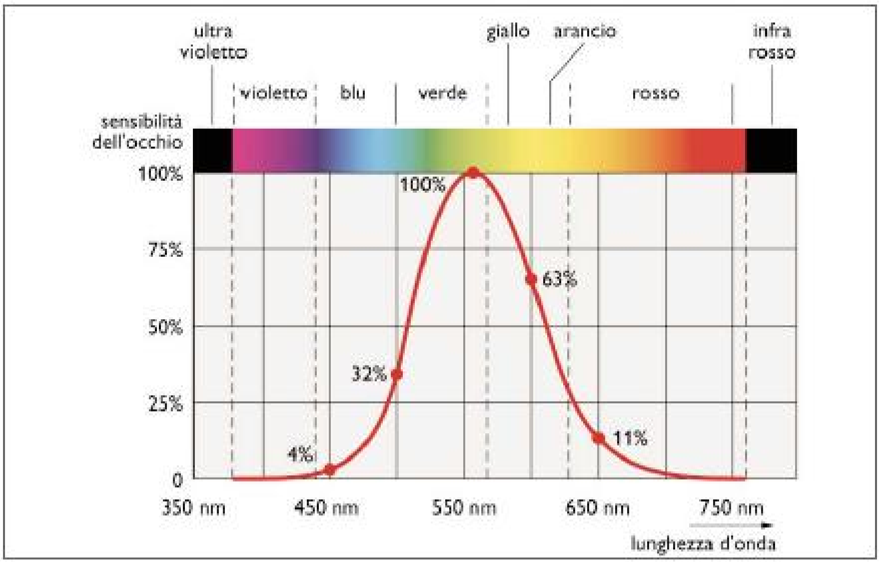
Qual è la potenza emessa dall'antenna della ricetrasmittente?



5. Nel grafico sono rappresentati i livelli energetici di una particella di massa m confinata in una buca di potenziale infinita unidimensionale (detta anche pozzo). Utilizzando il principio di de Broglie e assumendo che la funzione d'onda stazionaria si annulli sui bordi della buca, determina la massa della particella.



6. La figura riportata di seguito mostra come varia la sensibilità relativa percentuale del nostro occhio al variare della lunghezza d'onda nello spettro visibile. Il massimo della sensibilità (posto pari a 100%) si ha per $\lambda = 555\,\text{nm}$.



NOTA: *La sensibilità assoluta del nostro occhio per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra l'energia che viene inviata dalla retina al cervello (ad esempio sotto forma di* *corrente elettrica) e l'energia dell'onda elettromagnetica incidente sulla retina. La sensibilità relativa percentuale per una particolare lunghezza d'onda è definita come il rapporto tra la sensibilità assoluta a quella lunghezza d'onda e la sensibilità assoluta alla lunghezza d'onda* $\lambda = 555\,\mathrm{nm}$*, il tutto moltiplicato per* 100.

Utilizzando i dati del grafico di figura (usa solo le lunghezze d'onda per cui sono riportati i valori della sensibilità relativa percentuale in forma numerica) traccia un grafico approssimativo che indichi di quanto deve aumentare l'intensità della radiazione incidente sulla retina dell'occhio, in modo che l'energia inviata dalla retina al cervello alle varie lunghezze d'onda sia la stessa (si ponga uguale a 1 l'intensità pari alla massima sensibilità relativa).

Determina, inoltre, quanti fotoni a $\lambda = 650\,\mathrm{nm}$ devono giungere sulla retina affinché essa invii al cervello la stessa energia che invia quando su di essa giungono 1000 fotoni di lunghezza d'onda $\lambda = 555\,\mathrm{nm}$.

A.12.2. Simulazione di Fisica del 12 gennaio 2017

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e tre quesiti a sua scelta. Tempo massimo assegnato alla prova sei ore.

Problema 1

Un piccolo magnete permanente di massa viene lasciato cadere liberamente in un tubo verticale e fisso, di materiale isolante come il plexiglas; si osserva che esso cade con la stessa accelerazione con cui cadrebbe nel vuoto.

Se lo stesso magnete viene lasciato cadere in un tubo di rame di identiche dimensioni, si osserva che la velocità acquistata è inferiore a quella di caduta libera: il magnete si muove molto più lentamente, come se fosse sostenuto da un invisibile paracadute, come illustrato in Fig. 1 per due magneti lasciati cadere nello stesso istante dall'estremo superiore dei due tubi.

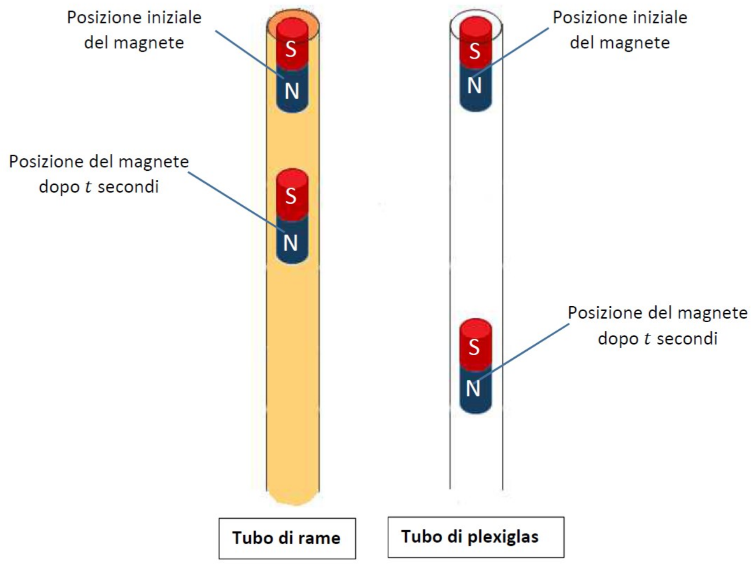


Figura 1

Infatti sul magnete in aggiunta alla forza peso agisce una forza diretta in verso opposto al moto che dipende dalla sua velocità.

Per capire quello che sta succedendo supponi, a un dato istante, di sostituire il tubo metallico con un tubo di plexiglas e di porre due spire conduttrici chiuse di resistenza elettrica R pari a $1.0 \cdot 10^{-3}\,\Omega$, una sopra e l'altra sotto il magnete come illustrato in Fig. 2.

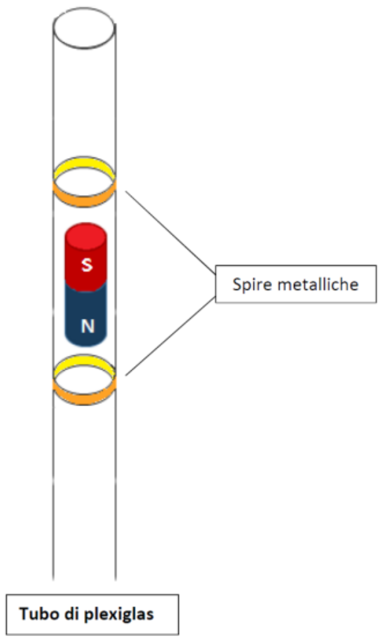


Figura 2

1. Mostra che anche in questo caso il moto del magnete è influenzato da una forza di resistenza passiva come quando cade nel tubo di rame. Spiega qualitativamente l'origine della forza di resistenza passiva e giustifica perché essa dipende dalla velocità. Individua e illustra con un disegno il verso delle correnti indotte nelle spire, spiegando inoltre come variano nel tempo a causa del moto del magnete. Discuti i cambiamenti che si producono se il magnete viene capovolto, in modo che il polo Nord e il polo Sud risultino scambiati.

In laboratorio, studi la velocità di caduta di un magnete di massa $m = (2.35 \pm 0.01)\,\mathrm{g}$ nel tubo di rame misurando con un cronometro il tempo di caduta da diverse altezze.

I dati sperimentali sono riportati nella tabella, nella quale h è l'altezza di caduta e Δt il tempo di caduta. L'incertezza sui valori delle distanze è di 0.1 cm e sui valori dei tempi dell'ordine di 0.1 s.

h [cm]	Δt [s]
80.0	5.7
70.0	5.0
60.0	4.3
50.0	3.6
40.0	2.9
30.0	2.2
20.0	1.5
10.0	0.9
5.0	0.5

1. Deduci, dai dati riportati in tabella, i valori delle velocità medie di caduta dalle diverse altezze. Adoperando tali valori costruisci un grafico della velocità media in funzione dell'altezza, discutine qualitativamente l'andamento e determina il valore limite della velocità. Assumendo che la forza di resistenza passiva F_r possa essere approssimata con una forza proporzionale alla velocità v, cioè $F_r = -kv$. Considerando la forza totale agente sul magnete, illustra perché durante il moto la sua velocità aumenta fino a raggiungere una velocità limite. Determina infine il valore numerico di k, utilizzando il valore della velocità limite trovata dal grafico.
2. Discuti il bilancio energetico della situazione problematica proposta, sia nella fase di accelerazione sia quando il magnete raggiunge la velocità limite. Calcola al termine della caduta quanta energia meccanica è stata trasformata in altre forme di energia, specificando in quali forme.
3. Considera ora la situazione semplificata proposta precedentemente al punto 1 in cui il tubo di rame viene sostituito da un tubo di plexiglas e da due spire conduttrici di resistenza elettrica R pari a $1.0 \cdot 10^{-3}\,\Omega$.

   A partire da considerazioni sulla potenza dissipata determina il valore della corrente che circolerebbe nelle spire se il magnete raggiungesse la stessa velocità limite che raggiunge nel tubo di rame e se la corrente fosse la stessa in entrambe le spire. Utilizza questo valore per determinare la variazione di flusso del campo magnetico nell'unità di tempo che il moto del magnete indurrebbe sulle spire.

   Spiega inoltre perché se il tubo di rame (resistività $\varrho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}$) viene sostituito con un tubo di alluminio (resistività $\varrho = 2.75 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}$), il magnete raggiunge una velocità limite maggiore.

Problema 2

Nel 1896 l'astronomo Edward Charles Pickering, analizzando lo spettro di emissione della stella Zeta Puppis, scoprì la presenza di alcune righe con lunghezza d'onda uguale a quella prevista dalla serie di

Balmer e per questo da lui attribuite alla presenza di idrogeno nella stella. Scoprì inoltre la presenza di altre tre righe spettrali, chiamate righe di Pickering, di lunghezza d'onda rispettivamente pari a

$$455.1\,\mathrm{nm} \quad , \quad 541.1\,\mathrm{nm} \quad \mathrm{e} \quad 1012.3\,\mathrm{nm}.$$

1. Utilizzando il modello atomico di Bohr, descrivi l'origine delle righe dello spettro dell'idrogeno e in analogia formula una possibile spiegazione della origine delle righe di Pickering presenti nello spettro della stella Zeta Puppis. Indica quali informazioni fisiche puoi ricavare dal loro valore numerico.

Pickering dedusse che i valori numerici delle lunghezze d'onda delle righe che portano il suo nome potevano essere ricavati dalla formula di Balmer,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3, 4, \ldots$$

valida per le righe spettrali dell'idrogeno, utilizzando, però, a differenza di queste, valori di n seminteri.

2. Utilizzando i valori sperimentali dello spettro dell'idrogeno, riportati nella seguente tabella

n	λ (nm)
3	656.3
4	486.1
5	434.1
6	410.2
7	397.0

determina graficamente o analiticamente il valore sperimentale della costante R_H, nota come costante di Rydberg, e calcola poi i valori dei numeri n seminteri a cui corrispondono le righe di Pickering, verificando così la correttezza della sua deduzione.

Le righe di Pickering possono essere ricavate anche da una formula dello stesso tipo di quella di Rydberg, utilizzando un valore diverso per il parametro R_H, che indichiamo con R'_H.

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right)$$

in cui gli indici n_1 e n_2 sono numeri interi con

$$n_1 = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad n_2 = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad n_2 > n_1.$$

3. Dimostra che con $n_1 = 4$ e $R'_H = 4R_H$ si possono determinare valori interi di n_2 che corrispondono a tutte le righe osservate, cioè sia alle righe di Pickering sia a quelle di Balmer dello spettro dell'idrogeno.

Successivamente fu mostrato che l'intero spettro della stella Zeta Puppis era dovuto alla presenza di ioni idrogenoidi (ioni con un solo elettrone esterno e nucleo formato da protoni) e non all'idrogeno, e che a questi ioni si poteva applicare il modello atomico di Bohr.

4. Il modello di Bohr fornisce per la costante di Rydberg R_H dell'atomo di idrogeno l'espressione:

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 c}.$$

Considerando le modifiche da introdurre nel modello di Bohr per uno ione idrogenoide, ricava l'espressione della costante R'_H. Confrontando inoltre il valore sperimentale R'_H con il valore ricavato da tale relazione individua il valore di Z e determina così lo ione la cui emissione dà origine allo spettro di Zeta Puppis.

Questionario

1. Dimostra che per immagazzinare una quantità di energia U in un solenoide ideale di volume V nel vuoto, occorre generare al suo interno un campo magnetico B di intensità pari a:

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 U}{V}},$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto. Calcola l'intensità della corrente elettrica che deve scorrere in un solenoide composto da $N = 500$ spire, di lunghezza $L = 5.0\,\mathrm{cm}$ e volume $V = 20\,\mathrm{cm}^3$ affinché l'energia in esso immagazzinata sia $U = 1.5\,\mathrm{mJ}$.

2. Un solenoide L_1 ideale si trova all'interno di un secondo solenoide L_2, anch'esso ideale. Quest'ultimo viene alimentato con una corrente I che cresce linearmente nel tempo nell'intervallo $0 - 30\,\mu\mathrm{s}$ secondo l'equazione:

$$I = kt,$$

con $k = 0.50\,\mathrm{A/s}$. Ai capi del solenoide interno L_1, durante un intervallo di tempo in cui la corrente varia, si misura una forza elettromotrice.

   a) Spiega l'origine della forza elettromotrice e dimostra che essa risulta costante;

   b) calcola il valore del modulo di tale forza elettromotrice nel caso in cui i solenoidi L_1 e L_2 abbiano entrambi un numero di spire pari a 500, lunghezza pari a 5.0 cm, sezione $S_1 = 1.0\,\mathrm{cm}^2$ e $S_2 = 4.0\,\mathrm{cm}^2$ rispettivamente.

3. Per eseguire analisi spettrometriche di alcune particolari sostanze si utilizzano laser ad argon, che emettono un fascio luminoso verde di lunghezza d'onda 514.5 nm, potenza pari a 1.0 W e sezione di $2.0\,\mathrm{mm}^2$. Ipotizzando che il fascio sia cilindrico, determina:

   a) quanta energia è contenuta in un metro di lunghezza del fascio;

   b) il valore massimo del campo elettrico e di quello magnetico associati al fascio;

   c) quanti fotoni al secono vengono emessi dal laser.

4. In una cella fotoelettrica viene generata una corrente di saturazione $I = 15\,\mu\text{A}$ sfruttando l'effetto fotoelettrico. Come catodo viene utilizzato un materiale metallico il cui lavoro di estrazione è di $5.15\,\text{eV}$.

   a) Determina la lunghezza d'onda massima della radiazione incidente sul catodo capace di estrarre elettroni da esso;

   b) calcola il numero minimo di fotoni che ogni secondo devono incidere sul catodo, nell'ipotesi che solo il 75% di essi riescano ad estrarre un elettrone.

5. L'astronave Millennium Falcon della Trilogia originale di Guerre Stellari ha una lunghezza a riposo pari a $34.5\,\text{m}$. L'astronave, in viaggio con velocità $0.90\,c$ rispetto a un sistema di riferimento inerziale, incrocia una seconda astronave identica che viaggia in direzione opposta con velocità $0.75\,c$ rispetto allo stesso sistema di riferimento inerziale.

   Qual'è la lunghezza della seconda astronave misurata da un passeggero della prima astronave?

6. Dimostra che a un elettrone non relativistico, accelerato da fermo mediante una differenza di potenziale ΔV misurata in volt, si può associare un'onda di de Broglie la cui lunghezza d'onda λ può essere espressa dalla formula:
$$\lambda = \sqrt{\frac{1.504}{\Delta V}}\,\text{nm}.$$
   Calcola tale lunghezza d'onda per $\Delta V = 50.0\,\text{V}$.

A.13. Anno scolastico 2018-2019

A.13.1. Simulazione di Fisica del 20 dicembre 2018

Il testo è valevole per il Liceo Scientifico, per il Liceo Scientifico - opzione scienze applicate e per la sezione ad indirizzo sportivo.

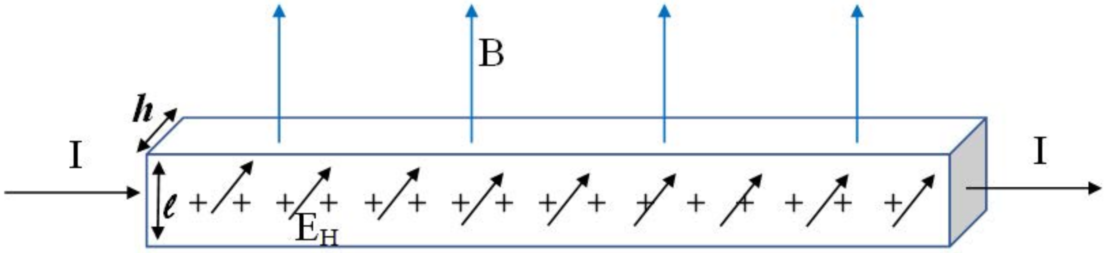
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario. La durata complessiva della prova è di 6 ore.

Problema 1

Nel laboratorio di fisica l'insegnante ha illustrato l'andamento del campo magnetico generato da una bobina percorsa da corrente utilizzando della limatura di ferro per visualizzarne le linee di forza e uno strumento che ha chiamato "magnetometro ad effetto Hall" per misurarne la intensità in vari punti.

L'effetto Hall, che fu scoperto nel 1879 dal fisico statunitense Edwin Herbert Hall, consente di misurare l'intensità di un campo magnetico a partire dalla misura di una differenza di potenziale ΔV_H detta appunto "di Hall". In rete, oltre a queste informazioni, hai trovato la seguente descrizione schematica di funzionamento dello strumento:

"*Una lastrina di rame, di sezione rettangolare $S = \ell \cdot h$ è percorsa da una corrente elettrica costante I. Se si immerge questa lastrina in un campo magnetico uniforme B diretto come in figura, la faccia anteriore della lastrina si carica positivamente e quella posteriore (non visibile) si carica negativamente. Tra le due facce quindi si genera una differenza di potenziale ΔV_H (la differenza di potenziale di Hall) e tra di esse è presente un campo elettrico E_H (detto campo di Hall) diretto come indicato in figura.*"



1. Spiega l'origine del campo elettrico E_H e della differenza di potenziale ΔV_H.
2. L'effetto Hall può essere usato per individuare il segno della carica in moto nei conduttori metallici. Illustra qualitativamente come cambia il fenomeno a seconda del segno delle cariche in moto.
3. Dimostra l'esistenza di una relazione lineare $\Delta V_H = kB$ tra la differenza di potenziale che si instaura tra le facce della lastrina e l'intensità del campo magnetico B, quando si è raggiunta la condizione di equilibrio tra le forze che agiscono sulle cariche in moto.
4. Perché il dispositivo possa essere usato come magnetometro, è necessario procedere alla sua taratura, cioè alla misurazione di ΔV_H in presenza di valori noti del campo magnetico B. La seguente tabella mostra i dati sperimentali di una taratura effettuata in laboratorio:

$B\,[\mathrm{mT}]$	100	200	300	400	500
$\Delta V_H\,[10^{-7}\mathrm{V}]$	0.70	1.5	2.3	34	4.3

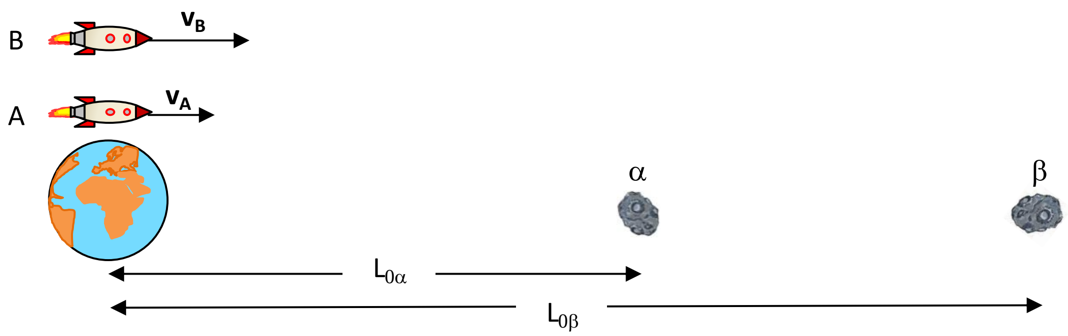
   Mostra che tali dati sono compatibili con una relazione di proporzionalità diretta tra ΔV_H e B, traccia il grafico di taratura e fornisci una stima del valore della costante di proporzionalità k. Come valuteresti l'incertezza della stima effettuata?

5. Dati $h = 0.10\,\mathrm{cm}$ e $\ell = 2.0\,\mathrm{cm}$ e adoperando $9.1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V/T}$ come valore della costante k, ricava il valore della velocità degli elettroni di conduzione del rame (detta anche "velocità di deriva"). A partire da questo valore, e dalla conoscenza del valore della corrente $I = 1.0\,\mathrm{A}$, come determineresti la densità di carica per unità di volume presente nella lastrina?

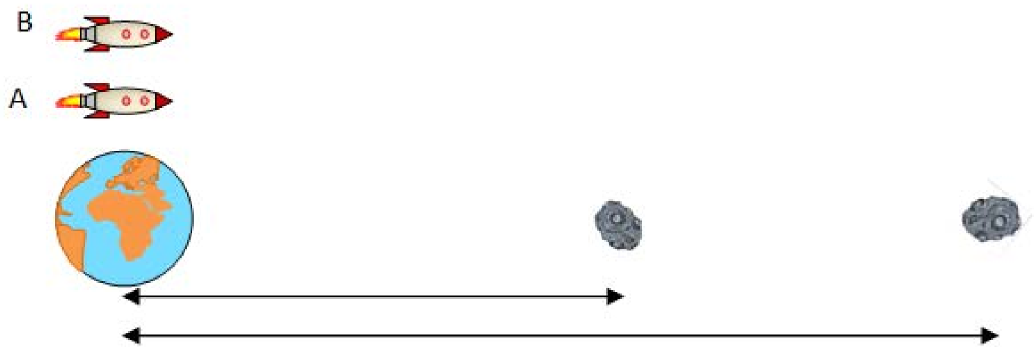
Problema 2

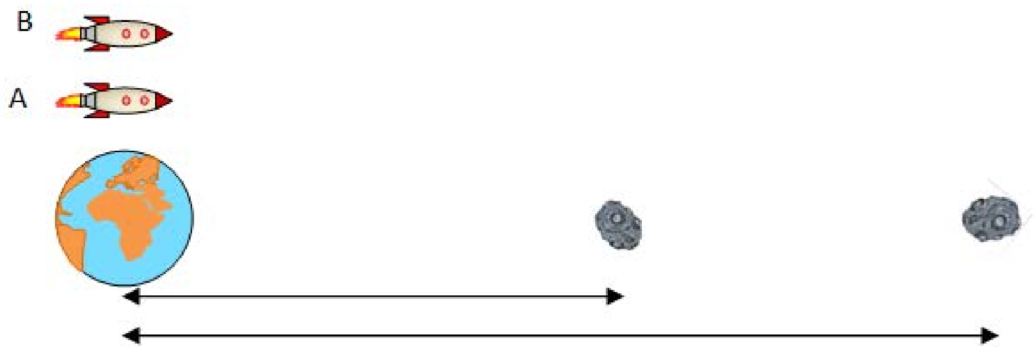
Due asteroidi, denominati α e β, sono stati individuati a distanze $L_{0\alpha} = 4$ oreluce (pari a $4.317 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$) e $L_{0\beta} = 7.5$ oreluce (pari a $8.094 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la Terra e la loro velocità rispetto alla Terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β.

Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A. Nel sistema di riferimento della Terra, all'istante iniziale $t = 0$, la situazione è quella rappresentata nella figura seguente:



Le due figure seguenti illustrano invece la situazione all'istante $t = 0$ nei sistemi di riferimento dell'astronave A e dell'astronave B.





1. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame e scrivendo in corrispondenza di ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due sistemi di riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

Il comandante della missione decide di premiare l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

2. Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide α il suo orologio di bordo indica un tempo $t'_\alpha = 9\,\mathrm{h}\,9\,\mathrm{min}\,54\,\mathrm{s}$ (pari a $3.299 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$) e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β, il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo $t'_\beta = 9\,\mathrm{h}\,9\,\mathrm{min}\,54\,\mathrm{s}$. Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità c) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide β, ritiene di aver vinto e di avere quindi diritto al premio.

3. Dalle trasformazioni di Lorentz o dalle relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, deduci il tempo t'_β di arrivo di B sull'asteroide β come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.
4. Ma anche l'astronauta B ritiene di aver vinto, in base alla sua misura del tempo t'_α impiegato da A. Utilizzando ancora una volta le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, verifica la giustezza delle conclusioni tratte da B.

Il comandante della missione, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li premia entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.

5. Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la ragione del contenzioso tra i due astronauti.

Questionario

1. In un solenoide cilindrico ideale nel vuoto, costituito da 400 spire e lungo $10.0\,\mathrm{cm}$ viene fatta passare una corrente alternata $i(t) = 0.50 \sin(63t)\,\mathrm{A}$. Sull'asse del solenoide è posta una spira circolare, coassiale con il solenoide, in modo che si possa considerare che tutto il campo magnetico uscente dal solenoide attraversi la sezione della spira. La spira ha un raggio di $5.0\,\mathrm{cm}$ e una resistenza ohmica di $0.20\,\Omega$. Determina il valore massimo della forza elettromotrice indotta nella spira e la corrente indotta che la percorre.
2. Una lampadina ad incandescenza, alimentata con tensione alternata pari a $220\,\mathrm{V}$, assorbe una potenza elettrica media pari a $1.0 \cdot 10^2\,\mathrm{W}$ ed emette luce grazie al surriscaldamento di un filamento di tungsteno, con
$$\frac{\text{Potenza media luminosa emessa}}{\text{Potenza media elettrica assorbita}} = 2\%.$$
Ipotizzando per semplicità che la lampadina sia una sorgente puntiforme che emette uniformemente in tutte le direzioni, e che la presenza dell'aria abbia un effetto trascurabile, calcolare ad una distanza $d = 2.0\,\mathrm{m}$ dalla lampadina:
   a) l'intensità media della luce;
   b) i valori efficaci del campo elettrico e del campo magnetico.
3. In un tubo a raggi catodici gli elettroni prodotti dal catodo vengono accelerati da una differenza di potenziale di $1.00 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$. Sapendo che la distanza tra catodo e anodo è di $20.0\,\mathrm{cm}$, determina la velocità degli elettroni (in metri al secondo) in prossimità dell'anodo tenendo conto degli effetti relativistici.

4. Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato 1 m; dopo aver determinato l'energia potenziale del sistema, stabilisci come essa varia se una delle cariche cambia segno e fornisci la tua interpretazione qualitativa del risultato, con riferimento al cambiamento determinatosi rispetto alla situazione iniziale.
5. Dimostra che a un elettrone non relativistico, accelerato da fermo mediante una differenza di potenziale ΔV misurata in volt, si può associare un'onda di de Broglie la cui lunghezza d'onda λ può essere espressa dalla formula:
$$\lambda = \sqrt{\frac{1.504}{\Delta V}}\ \text{nm}.$$
6. Si osserva che illuminando un catodo di argento con luce ultravioletta di lunghezza d'onda 100 nm occorre applicare un potenziale ritardante di 7.7 V per arrestare completamente i fotoelettroni. Qual è il lavoro di estrazione dell'argento?
7. Un carro merci di 3000 Kg viene fermato da un respingente formato da sistema combinato di molle; la prima, che ha una costante elastica $k_1 = 1500\,\text{N/m}$, agisce non appena il carro merci viene in contatto con il respingente; la seconda, che ha una costante elastica $k_2 = 3500\,\text{N/m}$, inizia ad agire quando il respingente è compresso di 20 cm. Si osserva che il carro merci si ferma quando il respingente è compresso di 50 cm. Determina la velocità iniziale del carro merci.
8. Ti trovi di fronte a due altoparlanti uguali $A1$ e $A2$, distanti 2 metri uno dall'altro, che emettono un suono monocromatico; osservi che quando sei equidistante da entrambi gli altoparlanti l'intensità sonora che percepisci ha un minimo e che quando, partendo dalla posizione di uno dei due altoparlanti (ad esempio $A1$) ti muovi lungo la retta perpendicolare alla congiungente i due altoparlanti, l'intensità sonora che percepisci è massima quando sei a distanza di 2 metri da $A1$. Determina la lunghezza d'onda del suono emesso dagli altoparlanti.

B. Esami di Licenza Liceale

Per un utile confronto riportiamo anche alcune delle prove dell'esame di Licenza Liceale[1], istituito dalla legge Casati del 1859 e rimasto sostanzialmente invariato fino alla riforma Gentile.

Valgono, maggiorate, anche per questi testi le osservazioni sulle difficoltà, in particolare di corretta datazione, già segnalate per i testi degli esami di licenza di Istituto Tecnico, Sezione Fisico-Matematica, a cui si rimanda.

Questi temi sono stati reperiti sul *Periodico di Matematica*, [17], ad eccezione di quelli degli anni scolastici 1874-1875 e 1875-1876, reperiti sulla *Rivista di Matematica Elementare*, [16].

B.1. Anno scolastico 1874-1875

Problema

Due mobili corrono con velocità costanti date su due rette che si segano ad angolo retto. Conoscendo le loro posizioni in un dato istante si domanda: Dopo quanto tempo disteranno di una lunghezza data? Il problema è sempre possibile?

Il candidato potrà anche determinare le condizioni di incontro dei due mobili, e ricercare quando sarà minima la distanza.

B.2. Anno scolastico 1875-1876

B.2.1. Sessione estiva

Problema

1. Essendo la proporzione
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
e K un numero qualunque, la proporzione
$$\frac{a+K}{b+K}=\frac{c+K}{d+K}$$
sarà vera?
2. Essendo
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad ; \quad \frac{m}{n}=\frac{r}{s};$$
la proporzione
$$\frac{a+m}{b+n}=\frac{c+r}{d+s}$$

[1] Naturalmente il Liceo era soltanto Classico.

è vera?

Quale connessione esiste fra i due quesiti?

B.2.2. Sessione autunnale

Problema

Da un punto dato sopra uno dei lati di un angolo si abbassa una perpendicolare all'altro lato, dal piede di questa retta una perpendicolare al primo lato, di nuovo dal piede di questa una perpendicolare al secondo lato, e così di seguito.

Dimostrare che le grandezze di quelle successive perpendicolari formano una progressione geometrica decrescente e trovare la somma dei termini di questa progressione.

B.3. Anno scolastico 1888-1889

B.3.1. Sessione estiva

Il candidato ha la scelta fra i due temi qui sotto proposti.

Geometria

Costruire un triangolo di cui siano date la lunghezza della base e le lunghezze delle perpendicolari tirate da un punto assegnato della base su ciascuno degli altri due lati.

Algebra

Di due cilindri circolari retti è conosciuta la somma V dei volumi, la somma k^2 dei quadrati del loro raggi, e si sa inoltre che le loro superficie laterali sono equivalenti ognuna ad una data superficie S.

Calcolare il raggio e l'altezza di ciascuno dei due cilindri.

B.4. Temi pubblicati sul Periodico di Matematiche, V.5 (1890)

Non sono riportate informazioni relative né all'anno scolastico né alla sessione estiva o autunnale in cui le prove sono state proposte: possiamo solo affermare che si tratta di problemi dell'anno scolastico 1889-1890 o precedenti.

Problemi dal Regio Liceo di Benevento

1. Dati i quadrati q_1, q_2, q_3 delle bisettrici degli angoli d'un triangolo e i rettangoli r_1, r_2, r_3 dei segmenti in cui ciascun lato è diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto, calcolare la lunghezza dei tre lati e dimostrare che in ogni triangolo rettangolo, la somma del quadrato della bisettrice dell'angolo retto, col rettangolo dei segmenti in cui l'ipotenusa resta divisa è doppia dell'area del rettangolo.

2. Valendosi della nota proprietà delle radici dell'equazione di secondo grado, si dimostri che la somma ed il prodotto delle radici dell'equazione

$$qx^2 - p(1-q)x + q^2 = 0$$

sono rispettivamente la somma delle radici delle equazioni

$$x^2 + px + q = 0$$
$$qx^2 - px + 1 = 0$$

e il prodotto delle radici di questa, per le terze potenze delle radici dell'altra.

3. Se da un punto di un cerchio si calano le perpendicolari su due tangenti che si tagliano e la perpendicolare sulla retta che passa per i punti di contatto, questa terza perpendicolare è media proporzionale tra le altre due.
4. I centri delle facce d'un cubo, son vertici d'un ottaedro regolare, e viceversa i piani condotti per due vertici opposti d'un ottaedro e paralleli al piano degli altri quattro vertici, sono facce di un cubo.

   Un cubo è equivalente a sei volte l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di esso.

Problemi dal Regio Liceo di Brescia

1. Descrivere con raggio dato un circolo tangente ad una retta e a una circonferenza data.
2. Costruire un triangolo conoscendosi un lato, un angolo ed un'altezza.
3. Un corriere percorre nel tempo t e colla velocità costante v il perimetro di un triangolo rettangolo di cui si conosce l'ipotenusa. Calcolare i cateti.
4. Segare una sfera con un piano tale che l'area del circolo massimo sia media proporzionale fra le calotte determinate dal piano.

Problemi dal Regio Liceo di Casale Monferrato

1. Dimostrare che prolungando i lati $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ di un rettangolo dato $ABCD$, di una medesima lunghezza x ed i lati $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$ di una medesima lunghezza y, si ottengono quattro punti che sono vertici di un parallelogrammo, e determinare la relazione che deve esistere fra x e y perché il parallelogrammo diventi una losanga.
2. Determinare il numero dei termini di una progressione aritmetica nella quale il primo termine vale 10, la ragione 5 e la somma dei termini 175.

Problemi dal Regio Liceo di Ferrara

1. Inscrivere in un quadrato dato un quadrato, il cui lato sia eguale ad un dato segmento.

   Il candidato può risolvere il problema anche con l'aiuto dell'algebra, e ricavare dal risultato ottenuto una costruzione geometrica.

Problemi dal Regio Liceo di Foggia

1. Un numero è formato di 3 cifre che sono in progressione geometrica. La somma delle cifre è 13 e se al numero maggiore si aggiunge 792 si ottiene il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate nell'ordine inverso.
2. Data l'equazione

   $$x^2 - px + 6 = 0,$$

   si determini p in modo che sia

   $$x_1^2 + x_2^2 = 24.$$

3. Essendo R il raggio di una sfera, calcolare l'altezza x di un cono la cui base è un parallelo della sfera, il vertice è il centro della sfera e la superficie laterale la decima parte della superficie della sfera.

4. Tagliare una sfera con due piani paralleli ed egualmente lontani dal centro della sfera in modo che la somma delle aree delle due sezioni sia uguale all'area della zona compresa fra i due piani.

Problemi dal Regio Liceo di Mondovì

1. In un cerchio dato si inscriva un quadrangolo convesso e tale che due lati opposti siano uguali a due segmenti dati e che i lati rimanenti siano proporzionali a due altri segmenti dati.

2. Due punti partono in uno stesso istante dal vertice di un angolo retto e ne percorrono i lati con moto uniforme e con le velocità rispettive di a e b metri al secondo.

   Si dimostri che le distanze dei due punti dopo uno, due, tre, quattro, ...secondi formano una progressione per differenza e si calcoli la somma dei primi n termini di questa progressione.

Problemi dal Regio Liceo di Novara

1. Se si inscrive in un triangolo equilatero di lato a un circolo, in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo equilatero di nuovo un circolo e così di seguito indefinitamente, si domanda qual'è la somma dei perimetri di tutti i triangoli descritti, escluso quello del triangolo dato.

2. Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezza stesse.

Problemi dal Regio Liceo G. Garibaldi di Palermo

1. Costruire un cerchio che passi per due punti dati e tocchi una retta data.

2. Dato un cerchio di centro O, se si denotano con A e B i punti d'intersezione di una tangente qualunque con due tangenti parallele fisse, dimostrare che l'angolo $A\widehat{O}B$ è retto.

3. Di 20 termini consecutivi di una progressione aritmetica, si conosce la somma dei termini di posto dispari e la somma dei termini di posto pari. Determinare la progressione.

4. Calcolare il volume di una piramide di altezza h, sapendo che la base è un decagono regolare di lato uguale ad a.

Problemi dal Regio Liceo V. Emanuele di Palermo

1. I segmenti che uniscono il punto di mezzo di un lato d'un triangolo con le proiezioni degli estremi di esso sulla bisettrice dell'angolo opposto sono uguali alla semidifferenza degli altri due lati del triangolo e comprendono un angolo uguale alla somma degli altri due del triangolo.

2. Costruire un parallelogrammo che abbia un angolo e le distanze dei lati adiacenti dal punto d'incontro delle diagonali eguali, rispettivamente, ad un angolo e a due segmenti dati.

3. La superficie d'un rettangolo è uguale alla m-esima parte del quadrato della diagonale ed il perimetro del rettangolo è di a m; calcolare i lati del rettangolo.

4. La superficie totale di un cono è equivalente a quella d'una sfera che ha il raggio di a m e la somma del lato col diametro della base è b m. Calcolare lato e raggio della base del cono.

Problemi dal Regio Liceo di Pavia

1. Per un estremo A di un diametro $\overline{AB}$ di un cerchio dato, condurre uaa secante ACD tale che la porzione $\overline{CD}$ di essa, che è compresa fra il secondo punto C in cui essa taglia la circonferenza ed il punto D in cui essa taglia la tangente in B, sia uguale alla corda $\overline{BC}$.
2. Se in un triangolo isoscele ABC, avente il vertice in A, si conducono le tre altezze $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, le quali si incontrano in K, la retta DF sarà tangente alla circonferenza circoscritta al quadrilatero AFKE.
3. In un cerchio dato si inscrive un quadrato, in questo si inscrive un cerchio, in quest'ultimo un quadrato, e così di seguito. Dimostrare che le aree di questi cerchi formano una serie geometrica, e trovare la somma di questa serie.
4. Trovare due numeri, sapendo che la loro somma, il loro prodotto e la differenza dei loro quadrati sono uguali.

Problemi dal Regio Liceo di Pesaro

1. Di un triangolo rettangolo si conosce l'area a^2 e il raggio r del cerchio inscritto. Calcolare i lati.
2. Costruire un triangolo, dato un angolo, l'altezza che parte dal suo vertice e una delle altre due.

Problemi dal Regio Liceo di Salerno

1. Data l'equazione
$$\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$
calcolare, senza risolverla, la somma e la differenza delle terze potenze delle radici, e cercare di qual numero bisogna aumentare le radici affinché l'equazione che ha le medesime radici della data aumentate del detto numero, manchi del secondo termine.
2. Dimostrare algebricamente che l'area di un triangolo rettangolo eguaglia il semiperimetro moltiplicato per il semiperimetro diminuito dell'ipotenusa; e dedurre la risoluzione del problema seguente: Calcolare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo conoscendo l'area ed il perimetro.
3. Costruire sopra una data base un triangolo isoscele che abbia gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice, e calcolare le altezze del detto triangolo in funzione della base data.
4. Per un punto situato nel piano di un angolo condurre una trasversale tale che il rettangolo dei segmenti di questa retta, intercetti tra il punto dato e i lati dell'angolo, sia equivalente ad un quadrato dato.

Problemi dal Regio Liceo di Senigallia

1. Se le basi e le altezze di due piramidi rette sono uguali, saranno rispettivamente uguali anche le facce laterali; e, se queste sono similmente disposte, saranno eguali anche le piramidi.
2. Dividere una dato segmento di retta in due parti tali che il quadrato di una sia il doppio del quadrato dell'altra.
3. Calcolare i lati di un triangolo rettangolo conoscendo il perimetro p e l'area A.
4. Cercare le relazioni che devono sussistere fra i coefficienti A, B, C, D dell'equazione:
$$Ax+By+Cz+D=0,$$

perché questa sia soddisfatta da tutte le terne di valori di x, y, z che verificano le equazioni

$$x = mz + a, \quad y = nz + b.$$

Problemi dal Regio Liceo di Taranto

1. Dimostrare che la differenza dei quadrati descritti sopra due lati di un triangolo qualunque, è uguale alla differenza dei quadrati dei segmenti del terzo lato, determinati dalla perpendicolare abbassata su di esso dal vertice dell'angolo opposto.
2. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati ed abbia il centro in una retta data.
3. Il quadrato del maggiore di tre numeri consecutivi eguaglia la somma dei quadrati degli altri due numeri. Trovare i tre numeri.
4. Le differenze fra l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo sono 3 e 6. Calcolare i lati.

B.5. Anno scolastico 1889-1890

B.5.1. Sessione estiva

Problemi dal Regio Liceo di Bari

1. Per un punto assegnato condurre una retta la quale seghi un cerchio dato in punti tali che la somma delle loro distanze da una retta data sia uguale a un segmento dato.
2. Se due cerchi si segano, formando un angolo di 75°, e la distanza dei loro centri è doppia dell'apotema del dodecagono regolare inscritto nel minore di essi, dimostrare che la corda comune a questi due cerchi è lato dell'esagono regolare inscritto nel cerchio maggiore ed è lato del quadrato inscritto nel cerchio minore
3. Supposto che le lettere dell'alfabeto italiano abbiano rispettivamente per valori i numeri che indicano l'ordine con cui si seguono, si determini un nome (a noi tutti caro) sapendo che esso è composto da sei lettere e che i valori numerici di queste adempiono alle seguenti condizioni:

   — la somma dei valori della terza e della sesta è uguale a 19;

   — la somma dei valori della seconda e della quinta è uguale a 10;

   — la somma dei quadrati dei valori delle quattro predette lettere è uguale a 407;

   — i valori della quinta, della sesta e della terza hanno per quarto proporzionale il doppio del valore della seconda;

   — di questi quattro valori il maggiore è quello della terza e poi segue quello della quinta;

   — i valori delle altre due lettere sono dati dalle radici reali dell'equazione

   $$x^2 - 18x - 3\sqrt{x^2 - 30x + 228} = 12x - 230,$$

   la minore delle quali esprime il valore della prima lettera.

   N.B. Dall'alfabeto vanno escluse le lettere k, j, x, y, w.

4. Di due coni circolari retti aventi il lato uguale, il vertice in comune ed i piani delle basi paralleli, son date: la somma $2a$ del raggio di uno di questi colla sua altezza; la somma $2b$ del raggio e dell'altezza dell'altro cono; e la somma $2S$ delle aree dei triangoli che si ottengono segando i due coni con un piano passante per i loro centri. Il primo dei nominati coni ha il raggio minore dell'altezza; ed il secondo ha invece il raggio maggiore dell'altezza.

   Determinare i volumi di questi due coni.

Problemi dal Regio Liceo e Ginnasio di Carmagnola

1. Condurre una retta in modo che i segmenti di essa, compresi in due cerchi dati, siano uguali rispettivamente a due segmenti determinati.
2. Descrivere con raggio dato una circonferenza che sia tangente ad un lato di un angolo, e tagli l'altro di un segmento dato.
3. Data l'area di un triangolo, determinare il valore dei tre lati del medesimo, nell'ipotesi che i lati siano proporzionali ai numeri m, n, p.
4. Calcolare il raggio di un circolo, essendo nota la differenza fra le aree del triangolo e dell'esagono regolari circoscritti al circolo.

Problemi dal Liceo Pareggiato di Chiavari

1. In una progressione aritmetica crescente la somma del diciannovesimo e del trentunesimo termine è 42 e il loro prodotto è 425. Trovare il primo termine e la ragione.
2. In un triangolo rettangolo la somma dell'ipotenusa e di un cateto è a; quella dell'ipotenusa e dell'altro cateto è b. Calcolare i tre lati e l'area del triangolo.
3. Se si congiungono tra loro i punti di mezzo dei successivi lati di un quadrilatero convesso, e i punti di incontro delle congiungenti con le diagonali del quadrilatero si uniscono ancora fra loro, si ha un quadrilatero simile al dato ed equivalente alla quarta parte di esso.
4. Se si congiungono tra loro i vertici alterni di un esagono regolare, si ha un altro esagono regolare. I lati di questo nuovo esagono sono uguali al terzo delle rette che congiungono i vertici alterni del primo.

Problemi dal Regio Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli

1. Due piramidi sono eguali, se hanno eguali la base, l'altezza ed una delle facce laterali, purché la posizione relativa di tali elementi sia *precisamente* la stessa.
2. La base di un triangolo isoscele è media proporzionale tra la sua proiezione sul lato ed il doppio di questo.
3. Di un trapezio isoscele sono date l'area, l'altezza e la lunghezza dei lati eguali: determinare le basi e le diagonali.
4. Il peso nell'acqua (distillata a 4°) di una massa contenente a kg di un certo metallo e b kg di un altro metallo è c, ed il peso nell'acqua di una massa contenente a' kg del primo metallo e b' kg del secondo metallo è c': determinare il peso specifico di ciascuno dei due metalli.

Problemi dal Regio Liceo di Reggio Emilia

1. Un numero N è il prodotto di tre numeri $(2x-1)$, $(2x+1)$, $(2x+3)$; dividendolo per ciascuno di essi, e sommando i quoti, si ottiene 239. Calcolare il numero N.

2. Cercare due numeri tali, che 12 ne sia la differenza, e $5/4$ sia il rapporto tra il medio aritmetico e il medio geometrico dei medesimi.

3. Il raggio del circolo circoscritto ed il raggio del circolo inscritto in un triangolo rettangolo, sono uguali rispettivamente a 7.5 m ed a 3 m.

   Calcolare:

   a) i tre lati;
   b) le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa;
   c) l'altezza corrispondente all'ipotenusa;
   d) l'area;
   e) le mediane, le bisettrici degli angoli interni ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati;
   f) gli angoli acuti;
   g) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono generato dal suddetto triangolo in una rotazione attorno al cateto maggiore;
   h) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono che si ottiene, segando il soprannominato cono con un piano parallelo alla base e distante un metro dal vertice;
   i) il volume e l'area della superficie della sfera il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, il quale abbia la base doppia del cateto minore del surripetuto triangolo rettangolo e abbia gli altri due lati eguali ciascuno a 15 metri;
   j) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cilindro il cui raggio ed altezza siano rispettivamente eguali al raggio ed al diametro della sfera di cui sopra.

4. I valori dei lati di un triangolo rettangolo sono rispettivamente uguali a tre numeri interi consecutivi.

   Calcolare:

   a) i tre lati;
   b) le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa;
   c) l'altezza corrispondente all'ipotenusa;
   d) l'area;
   e) il raggio del circolo circoscritto, ed il raggio del circolo inscritto;
   f) le mediane, le bisettrici degli angoli interni ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati;

g) gli angoli acuti;

h) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono che si ottiene facendo ruotare il triangolo rettangolo in parola, attorno al cateto maggiore;

i) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono, che si ottiene segando il suaccennato cono con un piano parallelo alla base, e distante un metro dalla base;

j) il volume e l'area della superficie della sfera, il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, che abbia la base eguale al doppio del cateto minore del triangolo rettangolo un questione, e che abbia due lati eguali ciascuno all'ipotenusa;

k) l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale, ed il volume del cilindro , che abbia il raggio e l'altezza rispettivamente uguali al raggio ed al diametro della sfera suddetta.

Problemi dal Regio Liceo di Bologna

1. Si costruisca un rettangolo di cui sono date le tre altezze.
2. Si determini l'equazione di condizione che deve vincolare i coefficienti delle due equazioni

$$x^2+px+q=0 \quad , \quad y^2+p'y+q'=0$$

affinchè una delle due radici di una sia reciproca di una delle due radici dell'altra.

B.5.2. Sessione autunnale

Problemi dal Regio Liceo di Bari

1. Essendo $\mathsf{ABC'}$, $\mathsf{ACB'}$, $\mathsf{BCA'}$ tre triangoli equilateri, costruiti sui lati del triangolo qualunque ABC dalla parte esterna di esso, si dimostri che i segmenti $\overline{\mathsf{AA'}}$, $\overline{\mathsf{BB'}}$, $\overline{\mathsf{CC'}}$ sono fra loro uguali e passano per uno stesso punto.
2. Costruire un triangolo di cui son dati il perimetro, un angolo ed un'altezza. Si prenda in esame ciascuno dei casi che può presentare questo problema.
3. S_n, S_{n-1}, S_{n-2} denotando rispettivamente le somme delle potenze n-esime, $(n-1)$-esime, $(n-2)$-esime delle radici dell'equazione

$$ax^2+bx+c=0,$$

dimostrare che si deve avere

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0.$$

4. Facendo ruotare un triangolo rettangolo prima attorno alla ipotenusa e poi attorno ad un suo cateto si ottengono due solidi di cui i volumi sono rispettivamente espressi da

$$\frac{1}{3}\pi a^3 \quad , \quad \frac{1}{3}\pi b^3.$$

Determinare i tre lati di questo triangolo, e dimostrare quale di questi due volumi debba essere maggiore.

Problemi dal Regio Liceo Ruggero Settimo di Caltanisetta

1. Inscrivere in un triangolo un rettangolo del quale è dato il rapporto dei lati.
2. Le bisettrici degli angoli esterni di un quadrilatero qualunque formano un quadrilatero iscrittibile.
3. Dividere un cono con un piano parallelo alla base in modo che la superficie laterale del cono superiore sia media proporzionale fra la superficie dell'intero cono e la superficie laterale del tronco di cono. (Risolvere questo problema algebricamente, supposto noti il raggio della base e il lato del dato cono).
4. Un aeronauta tira un colpo di fucile verso terra, dirigendo l'arma verticalmente. Supposta nota la velocità iniziale del proiettile di $300\,\mathrm{m/s}$; l'accelerazione $g = 9.809\,\mathrm{m/s^2}$ e la velocità del suono $340\,\mathrm{m/s}$: si domanda a quale altezza dovrà trovarsi il pallone, perché la palla giunga a terra contemporaneamente al rumore dell'esplosione.

Problemi dal Regio Liceo e Ginnasio di Carmagnola

1. Da un punto preso fuori di un angolo condurre una retta la quale tagli i lati del medismo in modo che i segmenti di essa, compresi fra il punto ed i lati, siano proporzionali ai numeri interi m, n.
2. Trovare il luogo dei punti dai quali conducendo le due tangenti ad un cerchio, queste comprendono un angolo dato.
3. Scomporre in fattori di primo grado rispetto ad x, il polinomio
$$3x^3 - 3x^2\sqrt{a} + ax^2 - x\sqrt{a^3}.$$
4. Calcolare il valore numerico del lato di un cono di rivoluzione nel caso in cui si conoscono il raggio della base, e la somma delle superficie laterali del cono e della piramide esagonale regolare inscritta nel medesimo.

Problemi dal Regio Liceo di Cremona

1. Costruire un triangolo rettangolo conoscendone l'ipotenusa e l'altezza.
2. Trovare tre numeri in progressione geometrica tali che la loro somma sia $13a$ e la somma dei loro quadrati sia $91a^2$.

Problemi dal Regio Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli

1. Un poligono convesso di numero pari di lati, se ha gli angoli opposti eguali, ha i lati opposti paralleli.
2. Se le tre facce laterali di un prisma triangolare hanno un angolo della stessa grandezza, il prisma deve essere retto.
3. Un parallelogrammo circoscrittibile ad un cerchio non può essere che *rombo*.
4. Determinare le quattro radici dell'equazione:
$$(x^2 - 11x + 24)^2 - 2(x^2 - 11x + 24) - 24 = 0.$$
5. Se l'area di un triangolo isoscele è terza parte del quadrato della base, il raggio del cerchio inscritto nel triangolo è la quarta parte della base.

   Il candidato può, se crede, giovarsi del teorema: L'area di un triangolo è data dal prodotto del perimetro per la metà del raggio del cerchio inscritto.

Problemi dal Regio Liceo V. Emanuele di Palermo

1. Descrivere un cerchio che sia tangente ad una retta data in un punto dato e che sia pure tangente ad una data circonferenza.
2. La circonferenza che passa per gli estremi d'un lato d'un triangolo isoscele e per un punto della base e quella passante per questo medesimo punto e per gli estremi dell'altro lato sono eguali tra loro; le minori di tali circonferenze passano per il baricentro della base ed hanno per diametro il lato del triangolo, quelle tangenti alla base sono maggiori di quelle che la tagliano, internamente, ed hanno per diametro il segmento che è terzo proporzionale dopo l'altezza ed il lato del triangolo isoscele.
3. La somma delle circonferenze di tre cerchi è a m, la somma delle superfici dei cerchi stessi è b m^2 e sono in progressione aritmetica i loro raggi: si domandano le lunghezze di questi.
4. Da un punto del primo lato d'un angolo acuto si conduce la perpendicolare sul secondo lato; dal piede di questa si conduce la perpendicolare sul primo lato, dal piede di questa la perpendicolare sul secondo lato, e si continua così indefinitamente; la somma delle infinite perpendicolari così condotte è a m ed è b m la somma delle prime due: si domandano le lunghezze di queste.

Problemi dal Regio Liceo di Bologna

1. Si abbassi di grado l'equazione
$$4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 6x + 18 = 0$$
sapendosi che ha una coppia di radici uguali.
2. Si calcoli la somma delle quinte potenze delle radici dell'equazione
$$x^2 + px + q = 0.$$
3. Si calcoli la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno d'un esagono regolare ai lati di esso, noto essendone il perimetro.
4. Noto il diametro della sfera che circoscrive un esaedro regolare, si determini la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno di esso esaedro alle sue facce.

B.6. Temi pubblicati sul Periodico di Matematiche, V.6 (1891)

Non sono riportate informazioni relative all'anno scolastico, alla sessione estiva o autunnale e al Liceo in cui le prove sono state proposte. Tenendo comunque conto del fatto che nel precedente volume erano state pubblicate numerose prove dell'anno scolastico 1889-1890, si può desumere che queste prove siano state assegnate, in diversi Licei, nell'anno scolastico 1890-1891.

1. Inscrivere in un cerchio dato un triangolo di cui son dati un angolo e la lunghezza della bisettrice di quest'angolo.
2. Dimostrare che, affinché le due equazioni
$$x^3 + px + q = 0 \quad , \quad x^3 + p'x + q' = 0$$

abbiano una radice di comune, è necessario e sufficiente che fra i coefficienti p, q, p', q' abbia luogo la relazione

$$(q-q')^3=(p-p')^2(pq'-p'q);$$

e quindi risolvere le due equazioni

$$x^3-19a^2x+30a^3=0 \quad , \quad x^3-39a^2x+70a^3=0.$$

3. Costruire un triangolo tale che un suo lato e la bisettrice dell'angolo opposto a questo lato siano eguali a due segmenti dati, e che il rapporto degli altri due lati sia eguale a quello di altri due segmenti dati.
4. Si è costruito un tronco di cono circolare retto avente per altezza e per raggi delle sue basi (fra loro parallele) i raggi dei cerchi ex-inscritti corrispondenti all'ipotenusa ed ai due cateti di un triangolo rettangolo. Essendo S l'area di questo triangolo, ed m il rapporto tra il volume del nominato tronco di cono ed il cubo della sua altezza, calcolare i raggi del cerchio inscritto e dei cerchi ex-inscritti al triangolo rettangolo di area S.
5. Se in un triangolo rettangolo si descrivono i due archi che sono tangenti all'ipotenusa e sottendono i cateti, essi archi sono fra loro tangenti e le proiezioni d'un punto qualunque dei medesimi sui tre lati sono vertici d'un altro triangolo rettangolo.
6. La somma dei perimetri d'un quadrato e d'un triangolo equilatero è a m e la somma dei quadrati degli apotemi dei medesimi è b m^2. Calcolare i lati del quadrato e del triangolo.
7. Costruire un trapezio che abbia l'altezza, le due diagonali e la differenza delle basi eguali, rispettivamente, a quattro segmenti dati.
8. Due sfere dividono il segmento che unisce i loro centri in parti proporzionali ai numeri 6, 9, 11 e la somma delle loro superficie è eguale a quella d'un cerchio che ha raggio di a m. Calcolare i raggi delle due sfere.
9. Formare un'equazione di 2° grado le cui radici siano sestuple di quelle dell'equazione
$$x^2-\frac{9}{2}x+2=0.$$
10. In una progressione aritmetica il 12° termine è 40 ed il 22° è 70. Trovare il primo termine, la ragione e la somma dei primi 12 termini.
11. Sia un triangolo equilatero ABC: si divida il lato $\overline{AB}$ in tre parti eguali $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EB}$, il lato $\overline{BC}$ in tre parti eguali $\overline{BF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GC}$, il lato $\overline{CA}$ pure in tre parti eguali $\overline{CH}$, $\overline{HK}$, $\overline{KA}$, e si tirino $\overline{DK}$, $\overline{HG}$, $\overline{FE}$. Dimostrare che l'esagono DEFGHK è regolare.
12. Sia un triangolo BAC: si divida il lato $\overline{BC}$ in due parti $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ la prima delle quali sia doppia della seconda; si tiri $\overline{AD}$ e si divida anche $\overline{AD}$ in due parti $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ la prima delle quali sia doppia della seconda; infine si conduca la retta CE e la parallela ad essa nel punto D e siano F, G i punti in cui queste incontrano il lato $\overline{AB}$. Dimostrare che dei segmenti $\overline{BG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FA}$ ciascuno è doppio del seguente.

C. Prove assegnate all'esame di maturità dell'Istituto Magistrale

In questa appendice abbiamo raccolto un'ampia selezione delle prove di Matematica assegnate all'esame di Maturità dell'Istituto Magistrale dal 1956 al 2001.

È interessante effettuare un raffronto tra queste prove e quelle assegnate al Liceo Scientifico.

Tutte queste prove ci sono state fornite da Roberto Carosi, vedi [6].

C.1. Anno scolastico 1955-1956

C.1.1. Sessione estiva

Nel triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{BC}$ lunga 80 cm, il cateto $\overline{AC}$ è diviso dal punto M in due parti: quella adiacente all'altro cateto $\overline{AB}$ è i 7/9 dell'altra, la quale a sua volta supera di 12 cm il quadruplo dei 3/14 della prima. Condotta da M la parallela MN al cateto $\overline{AB}$, si determini il rapporto tra il volume del cono generato dalla rotazione del triangolo ABC attorno al cateto $\overline{AB}$ e il volume del tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio ABNM attorno ad AM.

C.1.2. Sessione autunnale

La somma delle diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ del rombo ABCD è di 442 cm e la differenza tra il triplo della diagonale $\overline{AC}$ e il doppio della diagonale $\overline{BD}$ è di 676 cm. Si trovi il lato del rombo e il raggio del cerchio in esso inscritto. Condotta per il vertice A la perpendicolare al piano del rombo e staccato su di essa il segmento $\overline{AE}$ di 50 cm, si consideri la piramide di base $ABCD$ e di vertice E e se ne calcoli il volume e l'area della superficie laterale.

C.2. Anno scolastico 1956-1957

C.2.1. Sessione estiva

La base di una piramide è un rettangolo, le cui diagonali si secano nel piede dell'altezza. Sapendo che il perimetro della base è di 124 cm, che la differenza tra 1/3 del maggiore dei lati di base e la metà del minore è 9 cm e che il rapporto tra lo spigolo laterale e la diagonale di base è 1.3, si determini il volume della piramide e l'area della sua superficie laterale.

A quale distanza dal vertice si deve condurre un piano secante parallelo alla base, in modo che il rapporto tra i volumi della piramide e del tronco di piramide così ottenuti sia 1/7?

C.2.2. Sessione autunnale

Sapendo che il trapezio ABCD ha la base maggiore $\overline{AB}$ di lunghezza a, che gli angoli in A e in D sono retti, che l'angolo in B è di 60° e che la diagonale $\overline{AC}$ è perpendicolare al lato obliquo $\overline{CB}$, si determinino le lunghezze di $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$. Si calcoli il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il trapezio di un giro completo attorno al lato obliquo $\overline{CB}$.

C.3. Anno scolastico 1957-1958

C.3.1. Sessione estiva

Il triangolo rettangolo ABC ha i cateti $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ di lunghezza 4 e 3 rispettivamente. Siano:

— D il punto di $\overline{AB}$ che lo divide nei due segmenti $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ che stanno come 9 a 7;

— E il piede della perpendicolare condotta da D su $\overline{BC}$;

— F il piede della perpendicolare condotta da E su $\overline{AB}$.

Si determinino i volumi dei solidi descritti dai triangoli ADC, DEF in una rotazione completa attorno ad $\overline{AB}$.

Facoltativamente si determini il volume del solido descritto dal triangolo DEC mediante la predetta rotazione.

C.3.2. Sessione autunnale

Calcolare il lato e la base di un triangolo isoscele sapendo che il perimetro è di 80 cm e l'altezza di 20 cm. Successivamente si determinino:

a) il rapporto tra la superficie della sfera circoscritta e quella della sfera inscritta nel cono ottenuto facendo ruotare il triangolo attorno all'altezza;

b) il rapporto tra il volume della sfera inscritta nel cono e quello del cono stesso.

C.4. Anno scolastico 1958-1959

C.4.1. Sessione estiva

L'altezza $\overline{AH}$ del triangolo ABC è di 3 cm ed il lato $\overline{AB}$ di 5 cm. Sapendo che il piede H dell'altezza divide la base $\overline{BC}$ in due parti $\overline{BH}$ ed $\overline{HC}$ proporzionali ai numeri 2 e 3, calcolare il perimetro e l'area del triangolo dato. Successivamente si determini su $\overline{AH}$ un punto M tale che il segmento $\overline{BM}$ risulti medio proporzionale tra $\overline{BA}$ e $\overline{BH}$ e si trovi il rapporto tra i perimetri dei due triangoli ABC e MBC.

C.4.2. Sessione autunnale

La misura (espressa in metri) del lato del triangolo equilatero ABC è la radice della equazione:

$$(3x+1)^2-5x^2+2=(2x-3)^2+168.6$$

Si determini sul lato $\overline{AB}$ un punto M tale che, condotta da esso la perpendicolare $\overline{MH}$ su $\overline{BC}$ e fatto ruotare il triangolo rettangolo MBH attorno al cateto $\overline{MH}$, il volume del cono che così si ottiene stia nel rapporto 0.0173 con quello del cilindro di raggio $\overline{BM}$ e di altezza il lato del triangolo ABC. Successivamente si determini il rapporto tra i perimetri e quello tra le aree del triangolo MBH e del quadrilatero ACHM in cui il triangolo ABC è diviso dal segmento $\overline{MH}$.

C.5. Anno scolastico 1959-1960

C.5.1. Sessione estiva

È data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 16\,\mathrm{cm}$ sulla quale sono assegnate due corde: $\overline{AC} = 4\,\mathrm{cm}$ e $\overline{BD} = 12\,\mathrm{cm}$. Se con C′ e D′ si denotano le proiezioni ortogonali di C e D su $\overline{AB}$, si determinino il volume e l'area della superficie totale del tronco di cono descritto dal trapezio CC′D′D in una rotazione completa attorno ad $\overline{AB}$.

C.5.2. Sessione autunnale

Un triangolo rettangolo ruota di un giro completo attorno alla parallela all'ipotenusa condotta per il vertice dell'angolo retto.

Si determini l'area della superficie e il volume del solido generato, sapendo che il rapporto tra i cateti del triangolo è 7/24 e che il suo perimetro è di 224 m.

C.6. Anno scolastico 1960-1961

C.6.1. Sessione estiva

È dato un triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa sia di $2a$ cm. Determinare il raggio delle due semicirconferenze uguali che hanno i centri sull'ipotenusa e sono tangenti tra loro e tangenti ciascuna ad un cateto. Calcolare poi il rapporto tra l'area della superficie descritta in una rotazione completa attorno all'ipotenusa delle due semicirconferenze e del triangolo dato. Infine si determini a sotto forma decimale a guisa che la differenza tra l'area del semicerchio circoscritto al triangolo e l'area dei semicerchi suddetti sia uguale all'area di un quadrato avente la diagonale di 2 cm assumendo per π il valore approssimativo 3.1416.

C.6.2. Sessione autunnale

Nel triangolo rettangolo ABC si indichi con A' il punto di contatto della circonferenza inscritta con l'ipotenusa BC. Ricordando che un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo avente per lati i due segmenti in cui l'ipotenusa e divisa dal punto di contatto con la circonferenza inscritta e sapendo che, nel nostro caso, è $|\overline{A'B}| = 35a$ e $|\overline{A'C}| = 18a$, si esprimano per mezzo di a le lunghezze della mediana relativa all'ipotenusa, dei cateti e del raggio del cerchio inscritto.

Successivamente si trovi il valore di a in guisa che l'area del cerchio inscritto risulti di $165.046250\,\mathrm{cm}^2$, assumendo per π il valore di 3.14.

C.7. Anno scolastico 1961-1962

C.7.1. Sessione estiva

I due triangoli ABC e ADE, rettangoli in B e in D, hanno le ipotenuse $\overline{CA}$ e $\overline{AE}$ allineate, giacciono entrambi in uno stesso semipiano di origine CE e si sa che i cateti $\overline{CB}$, $\overline{BA}$, $\overline{AD}$ sono segmenti uguali tra loro e che l'angolo $A\widehat{E}D$ è di 30°. Indicata con s la lunghezza del segmento $\overline{CE}$, somma delle due ipotenuse, si esprimano per mezzo di essa le lunghezze dei cateti, delle ipotenuse e delle relative altezze dei due triangoli, nonché l'area del quadrilatero CBDE. Si determini infine s in guisa che l'altezza del triangolo ADE abbia lunghezza $4(\sqrt{2}-1)/\sqrt{3}$.

C.7.2. Sessione autunnale

Le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono inversamente proporzionali ai numeri 12, 15, 20. Calcolare il volume, sapendo che la sua superficie totale è di $3008\,\mathrm{cm}^2$. Successivamente si determini il raggio e l'area della superficie della sfera circoscritta al parallelepipedo.

C.8. Anno scolastico 1962-1963

C.8.1. Sessione estiva

Il trapezio ABCD ha la base maggiore di lunghezza a e gli angoli alla base maggiore $\overline{AB}$ sono rispettivamente di 120° e di 30° . La base minore è uguale al minore dei due lati obliqui.

1. Trovare in funzione di a gli altri lati e l'area del trapezio.
2. Determinare a in modo che il perimetro del trapezio risulti di 1433 cm.
3. Calcolare l'area della superficie del solido ottenuto con la rotazione del trapezio di un giro completo attorno al lato obliquo maggiore.

C.8.2. Sessione autunnale

Sia dato il triangolo ABC, i cui lati abbiano lunghezza $|\overline{BC}| = 14\,\mathrm{m}$, $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = 25\,\mathrm{m}$.

Segnati sulle bisettrici dei tre angoli in A, in B e in C rispettivamente i punti A', B', C', aventi dai lati del triangolo distanze uguali ad un segmento s, minore del raggio del cerchio inscritto, si calcolino le lunghezze dei lati e l'area del triangolo $A'B'C'$ in funzione della lunghezza s. Si trovi poi il valore di s in modo che il perimetro del triangolo $A'B'C'$ sia lungo 8 m.

NB. Si ricordi che il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è uguale al rapporto tra la sua area e il suo semiperimetro.

C.9. Anno scolastico 1963-1964

C.9.1. Sessione estiva

Il trapezio ABCD ha il lato $\overline{AD}$ perpendicolare alle basi $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, le lunghezze delle quali sono rispettivamente di 27 cm e 12 cm. Supponendo che le bisettrici degli angoli in B e in C si incontrino nel punto O del lato $\overline{AD}$, si dimostri che il punto O è equidistante dai tre lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Indi si determini:

a) il perimetro e l'area del trapezio;
b) le distanze del punto O dai vertici B e C;
c) l'area della superficie laterale e il volume del tronco di cono ottenuto facendo ruotare il trapezio attorno al lato $\overline{AD}$;
d) il volume del solido descritto dal triangolo BOC nella rotazione sopraddetta;
e) il volume della sfera inscritta nel tronco di cono.

C.9.2. Sessione autunnale

Il triangolo rettangolo ABC ha i cateti $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ di 30 cm e di 40 cm rispettivamente. Sia r una retta del piano del triangolo parallela all'ipotenusa $\overline{AB}$, distante k da essa ed appartenente al semipiano di origine AB, opposto a quello che contiene il triangolo. Dette poi A_0, B_0, C_0 le proiezioni ortogonali di A, B, C su r, si trovino i volumi dei solidi descritti in una rotazione completa attorno ad r del triangolo A_0B_0C e del quadrilatero $ACBC_0$ e, successivamente, si determini k in modo che il rapporto tra i volumi sia 3/4.

C.10. Anno scolastico 1964-1965

C.10.1. Sessione estiva

Una piramide OABC ha per base il triangolo OAB, i cui lati $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ sono di 2 cm e l'angolo $\hat{O}$ è di 120°. Lo spigolo $\overline{OC}$ è perpendicolare alla base ed è di k cm. Indicato con D il punto dello spigolo $\overline{AC}$ che dista ugualmente dagli spigoli $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$, si determini la distanza di D dai detti spigoli e successivamente si sechi la piramide con un piano parallelo alla base OAB, condotto da D, e si determini l'area della superficie della sezione ottenuta. Si trovi poi k in modo che tale sezione risulti di $(9/4)^3$ cm^2.

Facoltativamente si trovi il volume o l'area della superficie totale del prisma che ha per base la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano OAB.

C.10.2. Sessione autunnale

Data una sfera di raggio r, Si considerino due cubi ad essa rispettivamente inscritto e circoscritto e si esprimano per mezzo di r: i volumi dei solidi limitati dalla sfera e da ciascuno dei due cubi, l'area totale dei due solidi e lo spigolo del cubo equivalente al solido limitato dai due cubi. Nel caso che i due cubi abbiano le facce parallele, si trovi la più piccola tra le distanze di un vertice dell'uno dai vertici dell'altro.

C.11. Anno scolastico 1965-1966

C.11.1. Sessione estiva

Dato il triangolo isoscele acutangolo ABC, di base $\overline{BC}$, si dica come si può determinare, sul prolungamento di $\overline{AC}$, il punto O tale che la circonferenza di centro O e raggio $\overline{OB}$ risulti tangente ad $\overline{AB}$ in B. Designando con D l'ulteriore punto comune alla retta BC e alla circonferenza, si dimostri che $\overline{AO}$ è perpendicolare ad $\overline{OD}$. Supposto poi che le misure in metri dei segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ siano rispettivamente 2 e $\sqrt{2}$, si determinino il perimetro e l'area del quadrilatero ABOD. Considerata infine la piramide avente per base questo quadrilatero e il vertice V appartenente alla retta perpendicolare condotta per O alla base e tale che $\overline{OV} = \overline{OB}$, se ne determini l'area della superficie laterale.

C.11.2. Sessione autunnale

Dato un triangolo isoscele ABC di base uguale a $2a$ e avente l'angolo $B\hat{A}C$ di 30°:

1. si traccino le due rette perpendicolari tra loro BO e CO, che si incontrino in un punto O dell'altezza relativa a $\overline{BC}$ e se ne indichi la costruzione geometrica. Si determini il perimetro e l'area del triangolo BOC cosi ottenuto;
2. detti P e Q i punti in cui le rette BO e CO intersecano rispettivamente i lati $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, si dimostri che la retta PQ risulta parallela alla base $\overline{BC}$. Si determini la lunghezza comune dei segmenti $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ ed il perimetro del quadrilatero APOQ;
3. si calcoli quale deve essere la lunghezza di a affinché il perimetro del predetto quadrilatero risulti uguale a $(3+2\sqrt{3})/\sqrt{2}$;
4. nel precedente caso particolare si determini il volume del solido generato dal triangolo BPC in una rotazione completa attorno alla retta BC.

C.12. Anno scolastico 1966-1967

C.12.1. Sessione estiva

Del trapezio ABCD, rettangolo in A e in D, si conoscono le lunghezze $45a$, 24a, $28a$ delle basi $\overline{AB}$, $\overline{DC}$, e dell'altezza $\overline{AD}$. Indicata con E l'intersezione dei prolungamenti dei lati non paralleli, si determinino le lunghezze dei lati e l'area della superficie del triangolo DBE e si calcoli il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il detto triangolo di un angolo giro completo attorno al lato $\overline{BE}$. Infine si determini il valore di a per il quale l'area della superficie del predetto solido sia uguale a quella di una sfera di raggio 1 cm.

C.12.2. Sessione autunnale

In un triangolo ABC, rettangolo in A, l'ipotenusa è di $4a\sqrt{3}$ cm e l'altezza $\overline{AH}$ di $4/3a\sqrt{6}$ cm; si calcolino le lunghezze dei cateti. Si consideri poi un triangolo rettangolo $A'B'C'$ simile al dato, essendo $\sqrt{6}$ il rapporto di similitudine, e si calcoli la somma dei prodotti delle lunghezze dei cateti omologhi. Si determini inoltre il rapporto tra le superfici dei solidi generati dai due triangoli in una rotazione completa attorno alle ipotenuse. Proprietà da dimostrare: In due triangoli rettangoli simili, il prodotto delle lunghezze delle ipotenuse è uguale alla somma dei prodotti delle lunghezze dei cateti omologhi.

C.13. Anno scolastico 1967-1968

C.13.1. Sessione estiva

Sia ABC un triangolo rettangolo in A, avente l'angolo acuto $\hat{B}$ di 60° , e sia H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{BC}$ ed L il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{AB}$ del triangolo BAH. Si conduca da L la parallela a $\overline{BC}$, si denoti con M la sua intersezione con $\overline{AC}$ e da M si tracci la parallela ad $\overline{AB}$, indicando con K l'intersezione di quest'ultima con l'ipotenusa $\overline{BC}$. Supposto che il segmento $\overline{HL}$ abbia lunghezza a, si determinino:

1. le lunghezze dei lati del triangolo ABC e dell'altezza $\overline{AH}$;
2. il perimetro e l'area del trapezio BCML;
3. l'area del pentagono HKMAL;
4. le lunghezze del lato del triangolo equilatero e del lato dell'esagono regolare entrambi equivalenti al predetto pentagono;
5. l'area totale della piramide che ha per base il triangolo ABC e per altezza il segmento $\overline{HV} = \overline{HL}$.

C.13.2. Sessione autunnale

Sia dato un trapezio rettangolo nel quale la base maggiore è doppia di quella minore. Supposto che le misure in centimetri dell'altezza e della base minore siano rispettivamente h ed m, si determinino l'area della superficie e il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il trapezio di un giro completo attorno al lato obliquo. Nel caso particolare che l'angolo formato dalla base maggiore con il lato obliquo sia di 45° , si esprimano l'area della superficie e il volume del solido per mezzo di h e successivamente si calcoli h in guisa che la superficie del solido sia equivalente a quella di una sfera il cui raggio è di 3 cm.

Il candidato può facoltativamente dimostrare che il volume di un tronco di cono di altezza h e raggi di base R e r, è dato dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr).$$

C.14. Anno scolastico 1968-1969

C.14.1. Sessione estiva

Una piramide a base quadrata che ha gli spigoli laterali uguali tra loro è retta. Per quale ragione?

Sapendo che i suoi spigoli laterali hanno la stessa lunghezza s del lato di base, se ne trovi l'altezza.

Se si seca la piramide con un piano parallelo alla base si ottengono una piramide e un tronco di piramide. Sapendo che il volume della piramide così ottenuta è 1/7 di quello del tronco, si trovino le altezze dei due solidi.

Considerato il cilindro circolare retto che ha la stessa altezza del tronco e una base inscritta nella base minore del tronco stesso, se ne esprima il volume per mezzo di s. Si determini s in modo che l'area della superficie totale del cilindro stia nel rapporto $1 + \sqrt{2}$ con quella della sfera avente il raggio di mezzo metro.

C.15. Anno scolastico 1969-1970

C.15.1. Sessione estiva

Sia dato il triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro $|\overline{BC}| = 2r$, tale che $|\overline{AB}| = r$. Con centri in B e C e con raggi $\overline{BA}$ e $\overline{CA}$ si descrivano due archi di circonferenza che intersechino rispettivamente ed internamente l'ipotenusa nei punti D ed E: si osservi che l'angolo $\mathsf{D\widehat{A}E}$ ha ampiezza di 45°. Si calcolino il volume e l'area della superficie del solido generato dalla rotazione di un giro completo del triangolo DAE attorno all'ipotenusa del triangolo dato. Per semplificare il calcolo della superficie si può tenere presente l'identità:

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

di immediata verifica.

C.15.2. Sessione suppletiva

Si tagli una sfera di raggio r con due piani paralleli, aventi dal centro distanza $2/3r$. Nel segmento sferico a due basi così ottenuto, si considerino le due piramidi aventi per vertice il centro della sfera e per basi, rispettivamente, il triangolo equilatero ed il quadrato inscritti nei due cerchi sezione, e si esprimano per mezzo di r l'area e il volume del solido costituito dalle due piramidi.

C.16. Anno scolastico 1970-1971

C.16.1. Sessione estiva

Un trapezio isoscele ha gli angoli alla base maggiore di 60°, la sua base maggiore è B, la minore è b.

Facendo ruotare il trapezio di un giro completo attorno alla bisettrice di uno degli angoli formati da un lato obliquo col prolungamento della base maggiore, si ottiene un solido del quale si chiede la descrizione.

Nell'ipotesi che sia $B=2b$, si calcoli il volume del solido.

C.17. Anno scolastico 1971-1972

C.17.1. Sessione estiva

Dato un quadrato ABCD di lato a, si determini il punto P su $\overline{\mathsf{DC}}$, tale che il triangolo APD sia gli m/n del trapezio ABCP. Dire per quale valore di m/n i solidi generati dalla rotazione completa del triangolo APD e del trapezio ABCP, attorno ad $\overline{\mathsf{AB}}$ sono equivalenti.

Calcolare infine il rapporto tra le superfici dei due solidi.

C.18. Anno scolastico 1973-1974

C.18.1. Sessione estiva

Dato il triangolo equilatero ABC, di lato $2a$, si prenda internamente al lato $\overline{\mathsf{BC}}$ il punto P in modo che la differenza tra il solido generato dal triangolo ABP in una rotazione completa attorno alla retta BC e il solido generato dal triangolo APC nella stessa rotazione sia equivalente alla sfera di raggio uguale a quello della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

C.19. Anno scolastico 1975-1976

C.19.1. Sessione estiva

Siano date due circonferenze tangenti internamente in un punto P ed aventi raggi rispettivamente r e $3r$ e sia $|\overline{PA}| = r$ una corda della prima e $\overline{PB}$ la corda ad essa perpendicolare; se $\overline{PA'}$ e $\overline{PB'}$ sono le corde determinate sulla seconda circonferenza dalle rette PA e PB rispettivamente, si calcoli il perimetro e l'area del quadrilatero $ABB'A'$, dopo aver dimostrato che le due circonferenze staccano sulle secanti comuni corde proporzionali.

Si calcoli inoltre il volume del solido generato da tale quadrilatero in una rotazione completa attorno alla retta di $\overline{PA}$.

Quesito. Si dimostri la proprietà invariantiva della sottrazione, illustrandola con esempi significativi, anche con numeri scritti in base due.

C.19.2. Sessione estiva-2

Prendendo spunto dalla dimostrazione richiesta nel problema precedente, dimostrare, in genere, che: "Due circonferenze tangenti (internamente o esternamente) staccano sulle secanti comuni corde proporzionali".

C.19.3. Sessione suppletiva

E' dato il parallelogrammo ABCD; esso è diviso dalla diagonale minore $\overline{BD}$ in due triangoli; si sa che l'angolo $A\widehat{D}B$ è retto, che il rapporto fra la diagonale $\overline{BD}$ ed il lato $\overline{AD}$ è $4/3$ e che la misura della diagonale maggiore $\overline{AC}$ è $30\,\mathrm{cm}$.

Si calcolino i lati del parallelogrammo.

Dal punto d'incontro H delle diagonali si innalzi il segmento $\overline{OH}$ perpendicolare al piano α del parallelogrammo e tale che $\overline{OH} = 2/3\overline{BD}$. Si determini l'area della superficie laterale della piramide OABCD.

Si costruisca il triangolo CBO' uguale e parallelo al triangolo DAO in modo che O' ed O appartengano allo stesso semispazio rispetto ad α e si unisca O con O'. Si dimostri che la piramide OBCO è equivalente alla metà della piramide OABCD.

Quesito. Il candidato dimostri almeno due delle proprietà formali della sottrazione dei numeri naturali.

C.20. Anno scolastico 1977-1978

C.20.1. Sessione estiva

Dato il triangolo rettangolo ABC si traccino:

1. l'altezza $\overline{AH}$ relativa all'ipotenusa $\overline{BC}$;
2.) la circonferenza avente centro in A e raggio $\overline{A}$H;
3. le tangenti $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ alla circonferenza condotte dagli estremi dell'ipotenusa $\overline{BC}$.

Si dimostri che il segmento $\overline{DE}$ è un diametro della circonferenza.

Sapendo che $|\overline{BC}| = 20\,\text{cm}$ e $\overline{BH} = 1/4\overline{HC}$, si determinino i lati del triangolo ABC e si calcoli il rapporto tra i due solidi generati dal quadrilatero BCDE in una rotazione completa attorno alle rette BE e CD rispettivamente.

Il candidato facoltativamente può risolvere il problema supponendo $|\overline{BC}| = 5a$.

Quesito. Scritto un numero qualsiasi in base dieci, il candidato lo trascriva in una base diversa, giustificando razionalmente il procedimento.

C.21. Anno scolastico 1978-1979

C.21.1. Sessione estiva

Dato un rombo, si fa compiere ad esso successivamente una rotazione di 180° attorno all'una e all'altra delle due diagonali. Si dimostri che il rapporto tra i volumi generati uguaglia quello delle due superfici. Nel caso particolare in cui tale rapporto è 4/3 ed il raggio della circonferenza inscritta nel rombo è di 12 cm, si determinino i lati del rombo.

Si calcoli poi il volume del solido ottenuto facendo compiere al rombo una rotazione completa attorno alla retta di uno dei suoi lati.

Quesito. Si giustifichi razionalmente la proprietà invariantiva delle frazioni.

C.21.2. Sessione suppletiva

Dato il triangolo equilatero ABC di lato $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, si costruisca la circonferenza tangente ai due lati $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ nei punti B e C rispettivamente. Si calcolino il raggio della circonferenza e la distanza $\overline{AO}$, essendo O il centro. Se P è il punto in cui il segmento $\overline{AO}$ incontra la circonferenza, si conduca per P la tangente e siano D ed E i punti in cui questa incontra i due lati $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$ rispettivamente. Si determinino il perimetro e l'area del quadrilatero BCED ed il volume del solido da esso generato in una rotazione di 180° attorno alla retta AO.

Il candidato facoltativamente può risolvere il problema supponendo $|\overline{AB}| = a$

Quesito. Si giustifichi razionalmente la regola di addizione delle frazioni.

C.22. Anno scolastico 1980-1981

C.22.1. Sessione estiva

Sono dati due triangoli isosceli simili ABC ed $A'B'C'$, le cui basi $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ stanno nel rapporto 2. Sapendo che la somma delle basi è 18 m e che la somma delle aree è $60\,\text{m}^2$, si calcoli il perimetro di ciascun triangolo. Da un punto P della base $\overline{AB}$ si tracci la parallela ad un lato del triangolo e si faccia compiere al trapezio ottenuto una rotazione completa attorno alla retta $\overline{AB}$. Come deve essere scelto il punto P affinché il volume del solido così formato sia uguale al volume del solido generato dal triangolo $A'B'C'$ in una rotazione completa attorno alla retta $A'B'$?

Quesito. Si giustifichi razionalmente la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

C.23. Anno scolastico 1982-1983

C.23.1. Sessione estiva

Nel triangolo rettangolo ABC, con angolo retto in A, si indichi con $\overline{AH}$ l'altezza relativa all'ipotenusa e si considerino le bisettrici interne degli angoli $B\widehat{A}H$ e $H\widehat{A}C$ che incontrano rispettivamente l'ipotenusa $\overline{BC}$ nei punti D ed E.

a) Si dimostri che il triangolo ABE è isoscele sulla base $\overline{AE}$ e che il triangolo ACD è isoscele sulla base $\overline{AD}$ e si verifichi l'uguaglianza
$$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{DE}.$$

b) Posto $|\overline{AH}| = 4/5l$ e sapendo che $\overline{AB} = 3/4$ di $\overline{AC}$, si calcoli il perimetro del triangolo ABC.

c) Si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo il triangolo DAE attorno alla base $\overline{DE}$.

d) Condotta per E la parallela all'altezza $\overline{AH}$, si calcoli in quale rapporto stanno le parti in cui il triangolo ABC viene diviso da tale segmento.

Quesito. Dopo aver costruito la tavola pitagorica dei numeri naturali in base 5, si esegua la moltiplicazione di due numeri di almeno tre cifre (diverse tra loro) scritti in tale base e si trascriva il prodotto in base 10.

C.24. Anno scolastico 1983-1984

C.24.1. Sessione estiva

Si determinino le misure dei lati di un triangolo ABC rettangolo in A, con $\overline{AB} < \overline{AC}$ sapendo che esse sono, espresse in metri, tre numeri consecutivi (si suggerisce di assumere come incognita la misura di $\overline{AC}$). Sulla perpendicolare al piano del triangolo per il vertice B, si prenda il punto D e si dimostri che AD è perpendicolare ad AC.

Supposto che sia $\overline{AD} = 2\overline{AB}$, si calcoli l'area della superficie e il volume della piramide ABCD. Si considerino poi i due piani paralleli alla base della piramide tali che la piramide stessa risulti divisa in tre parti equivalenti.

Quesito. Si esplicitino le proprietà formali dell'addizione che in un sistema di numerazione posizionale si utilizzano per effettuare l'addizione di due numeri naturali di due o più cifre e se ne faccia un'esemplificazione.

C.25. Anno scolastico 1985-1986

C.25.1. Sessione estiva

Siano A, B, C, D i vertici di un trapezio, ordinati in verso antiorario, con $|\overline{AB}| = a$ base maggiore, $|\overline{CD}| = b$ base minore e con altezza h. Sia P un punto appartenente alla base maggiore. Congiungendo P con C e con D. il trapezio resta diviso in tre triangoli: sia T_1 il triangolo PCD, T_2 e T_3 i restanti triangoli PAD e PBC.

a) Facendo ruotare il trapezio di un giro completo attorno alla retta AB, i tre triangoli T_1, T_2, T_3 generano altrettanti solidi; siano V_1, V_2, V_3 i rispettivi volumi. Si verifichi che il valore del rapporto

$$\frac{V_2+V_3}{V_1}$$

non dipende dalla scelta del punto P, ne dalla misura dell'altezza h.

b) Si dimostri che, se tutti i tre triangoli T_l, T_2, T_3 sono isosceli, rispetto alle loro basi $\overline{\mathsf{CD}}$, $\overline{\mathsf{AD}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$, allora il trapezio è necessariamente isoscele e P è il punto medio del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$.

c) Sia ora $a=26\,\text{cm}$, $b=24\,\text{cm}$ e sia P il punto medio del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$. Si determini h in modo tale che, nel trapezio isoscele avente queste misure, i tre triangoli T_1, T_2, T_3 risultino isosceli rispetto alle loro basi $\overline{\mathsf{CD}}$, $\overline{\mathsf{AD}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$.

Quesito. Dato un numero decimale n, sia $I(n)$ il più grande numero intero relativo che non supera n. Si determinino i valori di $I(n)$ corrispondenti ai seguenti valori di n: 6.35, 0.27, —2.16.

Si dica poi se le uguaglianze:

1. $I(m+n)=I(m)+I(n)$,
2. $I(mn)=I(m)I(n)$,
3. $I(-n)=-I(n)$

sono sempre vere (quali che siano i numeri decimali m ed n), motivando le risposte e fornendo opportuni esempi.

C.26. Anno scolastico 1986-1987

C.26.1. Sessione estiva

Nel triangolo rettangolo ABC, i cui cateti $\overline{\mathsf{AB}}$ ed $\overline{\mathsf{AC}}$ misurano rispettivamente 6 cm e 8 cm, si prenda sull'ipotenusa il punto D, tale che sia $\overline{\mathsf{BD}}=4\overline{\mathsf{DC}}$. Condotta per D la perpendicolare all'ipotenusa e dette rispettivamente F e G le sue intersezioni con le rette AB e AC, si calcolino le misure dei segmenti $\overline{\mathsf{DF}}$ e $\overline{\mathsf{DG}}$. Detta E l'intersezione del segmento $\overline{\mathsf{DF}}$ con la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, si calcolino l'area e il perimetro del triangolo BCE. Si dimostri che i triangoli BDF e DCG sono simili e che $\overline{\mathsf{DE}}$ è medio proporzionale tra $\overline{\mathsf{DF}}$ e $\overline{\mathsf{DG}}$. Si calcoli il rapporto dei solidi ottenuti dalla rotazione dei triangoli ABC e EBC di un giro completo attorno all'ipotenusa $\overline{\mathsf{BC}}$.

Quesito. Si descriva e si giustifichi il procedimento del calcolo (algoritmo) della moltiplicazione di due numeri naturali di almeno due cifre, scelti a piacere.

C.27. Anno scolastico 1989-1990

C.27.1. Sessione estiva

A) E' assegnato il tetraedro regolare di vertici A, B, C, D e di spigolo lungo s.

1. Calcolare il suo volume.

2. Dopo aver dato sufficiente spiegazione della costruzione geometrica del piano α, condotto per il punto D perpendicolarmente alla retta dello spigolo $\overline{AB}$, calcolare l'area della sezione S' di α con il tetraedro e la distanza del punto A dal piano α.
3. Indicato con E il punto dello spigolo $\overline{AC}$ che a partire da A lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, condurre per E il piano β parallelo ad α e, indicata con S'' la sezione di β con il tetraedro, calcolare il volume della piramide avente come vertice A e come base S''.
4. Chiamati X, Y, Z, T i punti medi rispettivamente degli spigoli $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, dimostrare che la figura XYZT è un parallelogrammo.
5. (facoltativo) Dimostrare che il parallelogrammo XYZT è un quadrato.

B) Dimostrare che, nel sistema di numerazione decimale, non esiste una frazione che generi un numero decimale periodico con periodo 9.

C.28. Anno scolastico 1990-1991

C.28.1. Sessione estiva

1) Il quadrangolo ABCD ha le diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ tra loro perpendicolari e tali che, detto E il loro punto d'incontro, risulta: $|\overline{DE}| = |\overline{EB}| = 2\,|\overline{CE}| = |\overline{EA}|/2 = 2$.

Si dimostri che i triangoli DEC, DEA e DAC sono tra loro simili.

Si iscriva nel quadrangolo ABCD un rettangolo con i lati paralleli alle diagonali di questi e si calcoli il perimetro del rettangolo quando:

a) detto rettangolo è un quadrato;
b) la sua diagonale lo divide in due triangoli simili al triangolo DAC;
c) la sua diagonale forma con uno dei lati del rettangolo stesso un angolo di 30°.

Si calcoli il rapporto dei volumi dei solidi che si ottengono facendo ruotare di un giro completo il quadrangolo intorno a due suoi lati diseguali.

2) Si dia la definizione di numeri naturali primi fra loro e si dimostri che se n è un numero naturale, esso e il numero naturale successivo sono primi tra loro.

C.29. Anno scolastico 1993-1994

C.29.1. Sessione estiva

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. Nel parallelepipedo rettangolo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD ed EFGH sono opposte e i segmenti $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ sono spigoli.

   Inoltre: $|\overline{AB}| = 15\,\text{cm}$, $|\overline{AD}| = 20\,\text{cm}$, $|\overline{AE}| = 5\,\text{cm}$.

   Chiamato P il piede della perpendicolare condotta da A alla retta FH, considerare il poliedro S avente per vertici i punti A, B, F, E, P.

   Del poliedro S calcolare il volume e l'area della superficie.

2. Prendere in esame i seguenti enunciati:

   a) I numeri 1500000 e 1300001 sono primi tra loro.

   b) Qualunque siano i numeri naturali m, a, b, con $b \neq 0$ risulta:

   $$\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}.$$

   c) Non esiste alcun numero naturale n tale che n^2+1 sia divisibile per 3.

   Stabilire quali di essi sono veri e quali falsi dando esauriente spiegazione della risposta.

C.30. Anno scolastico 1994-1995

C.30.1. Sessione estiva

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. Sulla perpendicolare al piano del rombo ABCD, condotta per il vertice A, prendere un punto V tale che: $|\overline{AV}| = (80/13)a$ dove a è una lunghezza nota.

   Il piano α, contenente la diagonale $\overline{BD}$ del rombo e perpendicolare al piano del rombo medesimo, divide la piramide P di vertice V e base ABCD in due solidi, S' ed S'', il minore dei quali, S', ha volume: $(200/13)a^3$.

   a) Calcolare il volume del solido S''.

   b) Posto che la distanza tra due lati opposti del rombo ABCD sia: $(60/13)a$, far vedere che le diagonali del rombo sono lunghe: $12a$ e $5a$

   c) Calcolare l'area totale della piramide P.

   d) Determinare, infine, la distanza del vertice B dal piano della faccia VCD.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire quali sono veri e quali falsi e fornire un'esauriente spiegazione della risposta:

   a) Il massimo comun divisore dei numeri 2400000 e 4200002 è 2.

   b) Condizione necessaria affinchè due numeri siano primi tra loro è che siano primi.

   c) Se a, b (con $a < b$) sono due qualsiasi numeri naturali consecutivi, il numero $b^3 - a^3$ non è divisibile per 2 ne per 3.

C.31. Anno scolastico 1997-1998

C.31.1. Sessione estiva

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. In una sala ben arredata fa bella mostra di sè un vaso il cui interno ha la forma di un cono circolare retto di apotema 30 cm e altezza 24 cm. Nel vaso è adagiata una sfera che tocca le pareti del cono ad una distanza di 10 cm dal vertice,
   — si calcoli il raggio della sfera;
   — si dica, data anche l'impenetrabilità della sfera, se nel vaso possono essere versati sei litri di acqua e, nel caso affermativo, l'altezza, approssimata ai decimi di millimetro, da questa raggiunta.
2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:
   a) se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato, l'angolo al vertice è un quinto d'angolo piatto;
   b) la somma delle facce di un angoloide è minore o uguale ad un angolo giro;
   c) perché due numeri a, b ($a \geq b$) divisi per un terzo numero k diano resti uguali, è necessario e sufficiente che la loro differenza sia divisibile per k.

C.32. Anno scolastico 1997-1998 (PNI)

C.32.1. Sessione estiva

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. Di una curva continua $y = f(x)$ si sa che:
$$f(-2) = 8, \quad f'(2) = f'(-2) = 0, \quad f(0) = 4, \quad f'(x) < 0 \text{ per } |x| < 2,$$
$$f(2) = 0, \quad f''(x) < 0 \text{ per } x < 0, \quad f'(x) > 0 \text{ per } |x| > 2, \quad f''(x) > 0 \text{ per } x > 0.$$
   Il candidato:
   a) disegni il grafico di una curva siffatta;
   b) trovi una espressione polinomiale di grado minimo che presenti le caratteristiche assegnate per la funzione $f(x)$;
   c) calcoli l'area della parte finita di piano, compresa fra il grafico e l'asse delle x;
   d) con riferimento alla cubica $y = x^3$ ne illustri le variazioni del grafico per l'aggiunta di un termine kx al variare di k nell'insieme dei numeri reali;
   e) dimostri che ogni curva di equazione $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ha uno ed un solo punto di flesso, rispetto a cui è simmetrica.
2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:
   a) se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato, l'angolo al vertice è un quinto d'angolo piatto;

b) la somma delle facce di un angoloide è minore o uguale ad un angolo giro;

c) perché due numeri a, b ($a \geq b$) divisi per un terzo numero k diano resti uguali, è necessario e sufficiente che la loro differenza sia divisibile per k.

C.33. Anno scolastico 1998-1999

C.33.1. Sessione estiva

Il candidato risolva le seguenti questioni:

1. Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro (peso specifico = 19.32) e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di altezza $\sqrt{3}$ cm. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro se la sua quotazione al momento della realizzazione era di 8.35 Euro per grammo?
2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:
   a) Dovendo sommare più prodotti con un fattore comune, possiamo moltiplicare questo per la somma degli altri.
   b) Se la somma dei reciproci di due numeri positivo è 1, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto.
   c) Una coppia di rette sghembe è data da due rette non incidenti.

C.34. Anno scolastico 2000-2001

C.34.1. Sessione estiva

Il candidato risolva i seguenti problemi:

1. La misura, in decimetri, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell' equazione:

$$(x-1)^3 + x^2 = x(x-1)^2 + 4.$$

   Nella sfera sono inscritti due coni circolari retti aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto $3/4$.

   Il candidato calcoli:
   a) il rapporto tra i volumi dei due coni;
   b) la misura del raggio della base comune dei due coni;
   c) il peso, approssimato ai grammi, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0.82.
2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri motivando esaurientemente la risposta:

a) Se a e b sono numeri diversi da zero e diversi tra loro, si ha:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2. \qquad (1)$$

Come va corretta la (1) se si elimina la condizione per a e b di essere “diversi tra loro”?

b) Il numero decimale periodico misto $1.2\bar{3}$ (periodo 3) ha $118/99$ come frazione generatrice.

c) Un numero di tre cifre tutte uguali è divisibile per 37.

C.35. Anno scolastico 2000-2001 (PNI)

C.35.1. Sessione estiva

Il candidato risolva i seguenti problemi:

1. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $\overline{\mathsf{AB}}=2\overline{\mathsf{AC}}$, $|\overline{\mathsf{BC}}|=a$, essendo a una lunghezza nota.

   a) Stabilire se la bisettrice $\overline{\mathsf{AD}}$ e la mediana $\overline{\mathsf{CE}}$ del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.

   b) Dopo aver riferito il piano del triangolo ABC ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti A, B, C e del punto in cui si secano le rette AD e CE.

   c) Preso un punto F sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del triangolo ABC in modo che sia $|\overline{\mathsf{EF}}|=4a/\sqrt{5}$, calcolare la distanza del punto A dal piano BCF.

   d) Dell'angolo formato dai due piani BCF a ABC calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata e meno di un grado.

2. Dopo aver preso in esame i seguenti enunciati, stabilire se sono veri o falsi motivando esaurientemente ogni risposta:

   a) Posto che a sia un numero reale qualsiasi, risulta

   $$\sqrt{a^2+2a+1}=a+1.$$

   b) Risulta:

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots.+n}{n^2}=0.$$

   c) Si considera l'esperimento del lancio di una moneta “Testa-Croce” con le due facce che hanno le stesse probabilità di uscita. La probabilità che in 4 lanci esca “Testa” al più due volte è minore di quella che esca “Testa” almeno due volte.

C.36. Anno scolastico

C.36.1. Sessione estiva

C.36.2. Sessione autunnale

C.37. Anno scolastico

C.37.1. Sessione estiva

C.37.2. Sessione autunnale

C.38. Anno scolastico

C.38.1. Sessione estiva

C.38.2. Sessione autunnale

D. Osservazioni e commenti

Questo capitolo raccoglie una serie di osservazioni e commenti sugli esami di stato, anche con riferimento a quesiti e problemi che ci sono parsi formulati in maniera non ottimale o con errori. Scopo di queste pagine non è una critica sterile quanto piuttosto un contributo alla discussione. Molte delle osservazioni che proponiamo sono nate da discussioni in classe con gli studenti che si accingevano a sostenere le prove d'esame.

Iniziamo riportando alcune considerazioni di Aldo Morelli in un articolo presentato ad un convegno sulla prova scritta di matematica agli esami di stato, svoltosi ad Agerola nel 2002 [vedi 18].

> "Le prove scritte degli esami di stato sono da molti decenni, forse da quando esistono, materia di discussione, polemiche, critiche e, perché no, di apprezzamenti e di riferimento per l'insegnamento della matematica.
>
> Bisogna riconoscere un grande merito agli estensori dei temi: ogni anno vengono proposti decine di temi per i vari tipi di scuola (si è avuta una grossa complicazione da quando sono stati introdotti i corsi sperimentali per i nuovi programmi, PNI, Brocca, ecc.) soddisfacendo a moltissime condizioni: che i compiti non siano troppo facili, né troppo difficili; che siano graduati, che rispettino i programmi, e la tradizione, ma che presentino qualche innovazione, ecc. E gli estensori dei temi, dopo il lavoro e dopo aver affrontato gli immancabili problemi che nascono nelle commissioni, devono anche sorbirsi le altrettanto immancabili critiche e polemiche che vengono da parte di docenti e giornalisti. Comunque ben vengano qualche critica costruttiva e una seria discussione, a cui far intervenire anche gli studenti. Nelle ultime classi di Scuola secondaria superiore, invece di perdere tempo per seguire la discutibile moda delle "simulazioni", a mio avviso, gli insegnanti farebbero meglio ad analizzare, discutere ed anche criticare, insieme agli studenti, i compiti più interessanti assegnati nel passato, non escludendo quelli, molto rari, contenenti qualche svista o errori, sempre molto utili ed educativi."

La complicazione citata nell'articolo di Morelli è evidente, soprattutto da quando la struttura della prova prevede la formulazione di due problemi e dieci quesiti (otto per le scuole all'estero). Per esempio in questa raccolta abbiamo reperito 13 diverse[1] tracce d'esame relative al 2013, tra il corso di ordinamento, il corso PNI, il liceo della comunicazione e le varie sessioni per le scuole all'estero: anche se alcuni problemi si ripetono (data la contemporaneità della somministrazione) questo comporta la stesura di non meno di 20 problemi e un centinaio di quesiti!

Ci pare anche da condividere l'idea che si dovrebbe dedicare più tempo alla analisi e discussione dei compiti più interessanti assegnati nel passato ed è questo uno degli scopi di questa raccolta.

Bisogna sempre tenere conto che è molto facile, sia nella formulazione di testi di compiti che, ancora di più, nella stesura di libri o appunti, incorrere in errori e sviste, e questo nostro lavoro sicuramente

[1] E non sono tutte quelle assegnate in quell'anno.

non è esente da queste pecche. Tuttavia questo è forse un po' più grave in occasione di temi d'esame a valenza nazionale che poi hanno, ovviamente, una enorme diffusione su tutti i testi del settore.

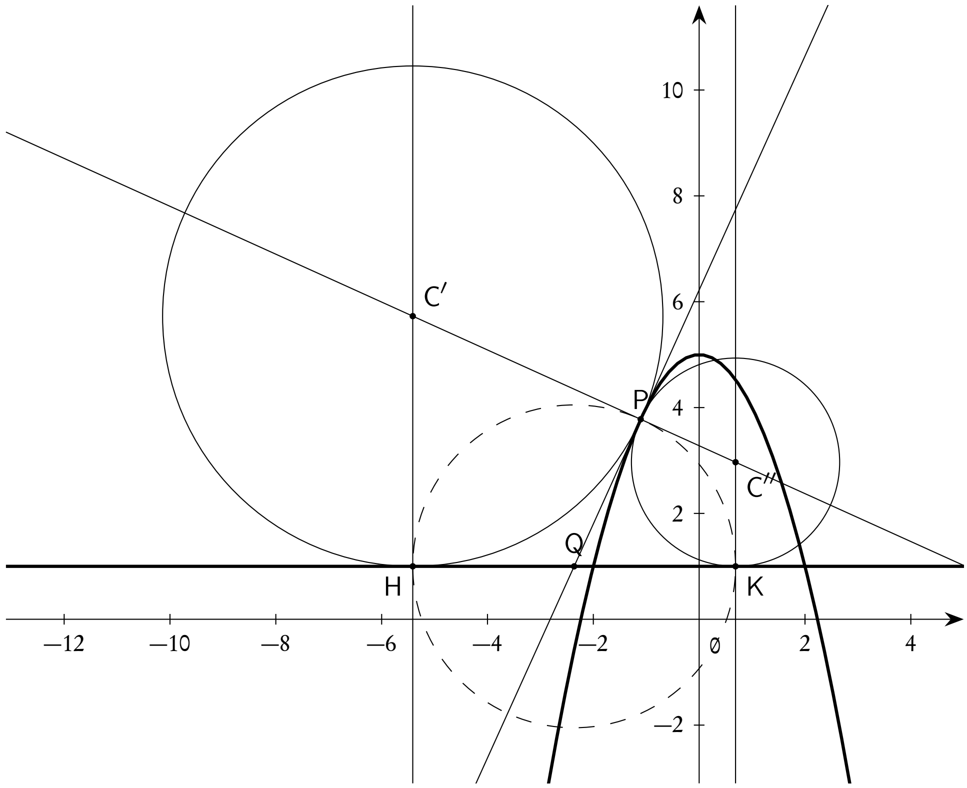
In ogni caso, al di là di possibili critiche, riteniamo che quello che conta è il fatto che la traccia sia comunque risolubile (e questo ci pare il caso in tutte le segnalazioni che ci accingiamo a fare): anzi a volte un errore o una formulazione non del tutto corretta può stuzzicare l'interesse degli studenti più volenterosi e capaci. In ogni caso i docenti presenti dovrebbero essere in grado di fornire eventuali delucidazioni.

Tra gli scopi di queste pagine poi c'è anche quello di "sfatare il mito" dell'esame di stato, invitando lo studente ad affrontare la prova con i necessari impegno, serietà e preparazione, ma senza troppi patemi d'animo, osservando che anche nella comunità dei docenti ci possono essere visioni e interpretazioni diverse e che, in ogni caso, anche "i docenti possono sbagliare".

Passiamo ora all'esame di alcuni quesiti e problemi, proposti in ordine cronologico.

D.1. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1973, quesito 1

Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ ed alla retta di equazione $y = 1$ e si indichino con r' ed r'' $(r' > r'')$ i rispettivi raggi...



Il problema è che di circonferenze come quelle richieste ce ne sono infinite e non solo due. Ci si può cominciare a rendere conto di questo fatto osservando che l'equazione canonica di una circonferenza nel piano cartesiano è del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0,$$

ove a, b e c sono tre parametri tali da soddisfare la disuguaglianza la disuguaglianza

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0.$$

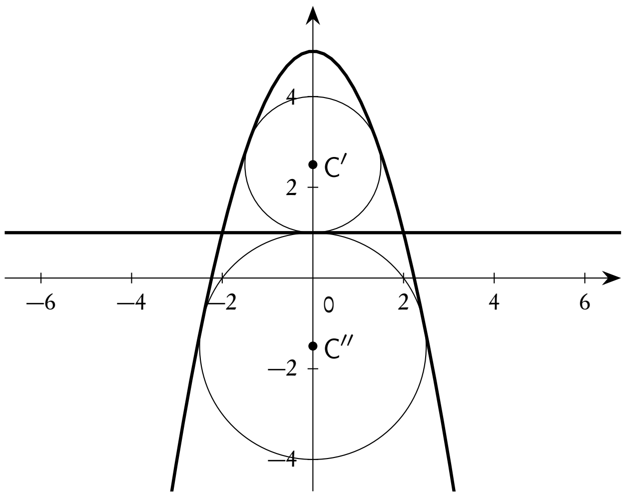
In linea di principio dunque, dovendo determinare *tre* parametri, serviranno tre condizioni indipendenti e non *due* come nel testo del problema. Tuttavia questo ragionamento non è conclusivo perché le condizioni poste dal testo portano ad un sistema, di grado superiore al primo, di due equazioni in tre incognite ed è noto che non è facile prevedere il numero di soluzioni di un tale sistema.

Molto più interessante la considerazione di tipo geometrico seguente.

Tracciamo, nel piano cartesiano Oxy, la parabola di equazione $y = 5 - x^2$ e la retta di equazione $y = 1$. Siano P un punto generico della parabola, diverso dal vertice e dai punti di intersezione tra la parabola e la retta date, t e n, rispettivamente, la tangente e la normale in P alla parabola. Con centro nel punto Q intersezione tra la retta $y = 1$ e la tangente t, tracciamo la circonferenza passante per P e siano H e K i suoi punti di intersezione con la retta $y = 1$. Le perpendicolari in H e K alla retta $y = 1$ incontrano la normale n in C' e C'' che sono centri di due circonferenze tangenti sia alla parabola che alla retta date. Poiché la costruzione è possibile qualunque sia il punto P, diverso dal vertice, si conclude subito che sono infinite le circonferenze tangenti alla parabola e alla retta data, anzi, una "doppia infinità" in quanto si ottiene una circonferenza in ognuno dei due semipiani individuati dalla tangente t.

Notiamo che se P coincide con uno dei due punti di intersezione tra la parabola e la retta date la costruzione proposta produce due circonferenze "degeneri", ovvero con raggio nullo. La costruzione invece non funziona se il punto P coincide con il vertice della parabola. In questo caso risulta geometricamente evidente che di circonferenze tangenti in P alla parabola e contemporaneamente tangenti alla retta $y = 1$ ce n'è una sola, che ha il centro sull'asse delle ordinate e precisamente nel punto di coordinate $(0, 3)$ e raggio 2.

La costruzione proposta e la simmetria della figura rispetto all'asse y, fa capire che tra tutte le circonferenze tangenti alla parabola e alla retta data ce ne sono precisamente due di "speciali": sono quelle che hanno il centro sull'asse delle ordinate e sono tutte interne alla parabola. Esse sono speciali in quanto sono "bitangenti" alla parabola stessa. Forse era proprio a queste due che intendeva riferirsi l'estensore del quesito proposto.



D.2. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1977, quesito 3

Data la funzione $y = a\sin x + b\cos x$, si determinino i coefficienti a, b in modo che per

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

sia $y = 1$ e che i valori estremanti di y siano -2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$. ...

Una prima osservazione riguarda la nomenclatura: abitualmente il termine "estremante" è riservato alle ascisse dei punti di estremo di una curva e non alle ordinate, cioè ai valori di estremo vero e proprio (e questa è una osservazione che può essere ripetuta molte volte nella storia dei testi degli esami di maturità).

Il problema grosso[2] è invece che di funzioni che soddisfano le condizioni poste nel testo ce ne sono due e precisamente

$$f(x) = -2\cos x \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

È evidente che scegliendo la prima delle due la restante parte del quesito diventa banale: come si dovevano comportare gli esaminatori nel correggere un tema in cui fosse stata fatta questa scelta?

D.3. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1980, quesito 3

In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione

$$y = x^2 + \sqrt{3}x + 1.$$

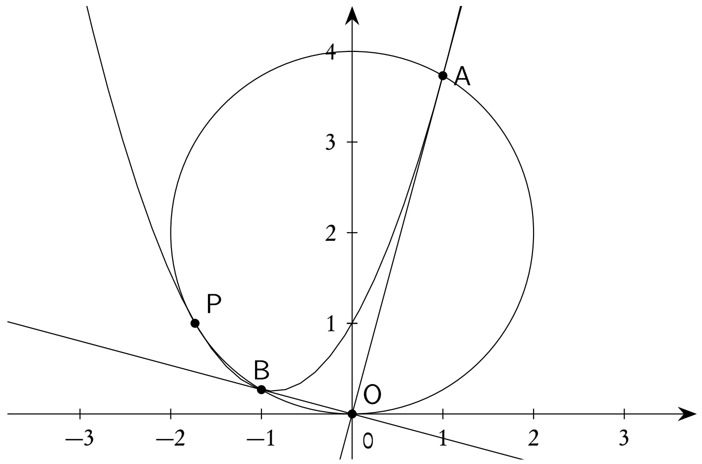
Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

Le regioni finite di piano delimitate dalle due curve sono in realtà 3 e non due, come dice il testo. Si tratta di un errore diventato famoso, tanto che la maggior parte dei testi in commercio parlano proprio di 3 regioni. L'errore appare evidente dalla figura che segue.

[2] Una nota di carattere personale. Uno degli autori di questa raccolta (Ercole Suppa), sostenne l'esame di stato proprio nella sessione in cui era assegnato il presente quesito. Per evitare di proporre una soluzione banale, scelse la seconda delle due funzioni, scrivendola nella forma

$$g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right),$$

nonostante l'insegnante non avesse mai trattato in classe il problema di trasformare in questo modo una funzione lineare in seno e coseno (problema spesso presentato con la dicitura "metodo dell'angolo aggiunto").



La figura evidenzia che, oltre ai due punti A e B di tangenza, la parabola data e la circonferenza trovata hanno in comune anche un terzo punto P (dove sono addirittura tangenti) e quindi individuano una terza regione finita di piano, seppure molto piccola).

D.4. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1980, quesito 4

Si enuncino le condizioni di derivabilità e di integrabilità delle funzioni e si dia qualche esempio di funzione integrabile ma non derivabile.

Le "condizioni di derivabilità" di una funzione si possono riassumere nell'enunciato: *una funzione è derivabile se, ..., è derivabile*! Al di là del gioco di parole non esiste un elenco di "condizioni di derivabilità" per una funzione o un teorema che classifichi le funzioni derivabili: l'unica condizione certa di derivabilità è il fatto che il limite del rapporto incrementale esista finito. Nemmeno le funzioni "elementari" sono derivabili nel loro dominio naturale (si pensi, per esempio, alla funzione *radice quadrata* o alle funzioni *trigonometriche inverse*). È dunque poco chiaro che cosa si intenda con *condizioni di derivabilità*: meglio sarebbe stata una formulazione del tipo "si dica quando una funzione (reale di variabile reale) è derivabile in un punto".

La situazione è diversa per quanto riguarda l'integrabilità. Bisognerebbe però precisare che cosa si intende con "condizioni di integrabilità": a livello di scuola media superiore infatti, per "integrale" si intende sia il concetto di integrale di Riemann che quello di primitiva, e le "condizioni di integrabilità" sono diverse per i due concetti. Una funzione può essere integrabile secondo Riemann, senza ammettere primitive (basta prendere una funzione con discontinuità a salto) e, viceversa, può ammettere primitive senza essere integrabile secondo Riemann (basta considerare una funzione illimitata). Se, come è probabile anche se non esplicitamente dichiarato, il quesito si riferiva all'integrabilità secondo Riemann, allora l'unico teorema proposto in alcuni (pochi) testi di scuola media superiore è quello che riguarda la somma

$$\sum \omega_i h_i$$

dei prodotti dell'oscillazione ω_i della funzione in ciascuno degli intervalli della suddivisione del dominio $[a, b]$, per l'ampiezza h_i degli stessi intervalli, somma che deve essere possibile rendere minore di ε, per qualunque $\varepsilon > 0$.

Non sappiamo quanti candidati all'esame di stato abbiano questo teorema nel loro curriculum.

È anche possibile che l'estensore del quesito volesse riferirsi a condizioni *sufficienti* di integrabilità per funzioni limitate su intervalli limitati (come per esempio la continuità, la monotonia, il fatto che l'insieme delle discontinuità[3] sia finito, ecc.), ma sarebbe stato bene esplicitarlo.

D.5. Scuole all'estero, II gruppo, sessione ordinaria 1980, quesito 2

Si determinino i coefficienti dell'equazione

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

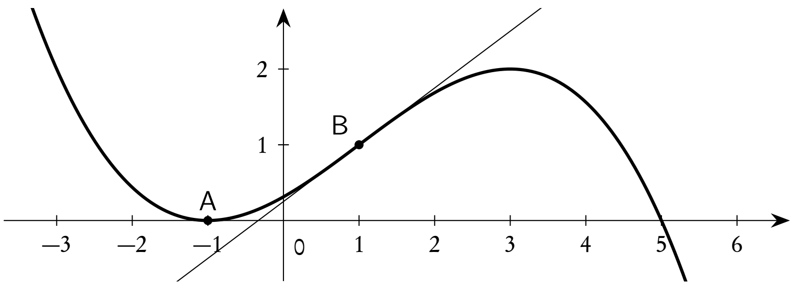
in maniera che la curva che la rappresenta passi per il punto A$(-1,0)$, *abbia il flesso nel punto* B$(1,1)$ *e per tangente inflessionale la retta di equazione* $4y = 3x + 1$.

Se ne disegni il grafico.

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dalla curva, dall'asse delle ascisse e dalla tangente inflessionale.

L'errore in questo quesito è dello stesso tipo di quello presente nella sessione ordinaria della maturità in Italia, vedi D.3, dello stesso anno, a cui si rimanda per i commenti.

In questo caso le regioni sono due e non una, come si vede dalla figura che segue.



D.6. Scuole all'estero, Buenos Aires, sessione ordinaria 1980, quesito 3

Si studi la funzione

$$y = 3x^4 - 6x^3$$

e se ne disegni il grafico.

Determinati punti di flesso, si scriva l'equazione della tangente alla curva nel punto di flesso F *di ascissa positiva.*

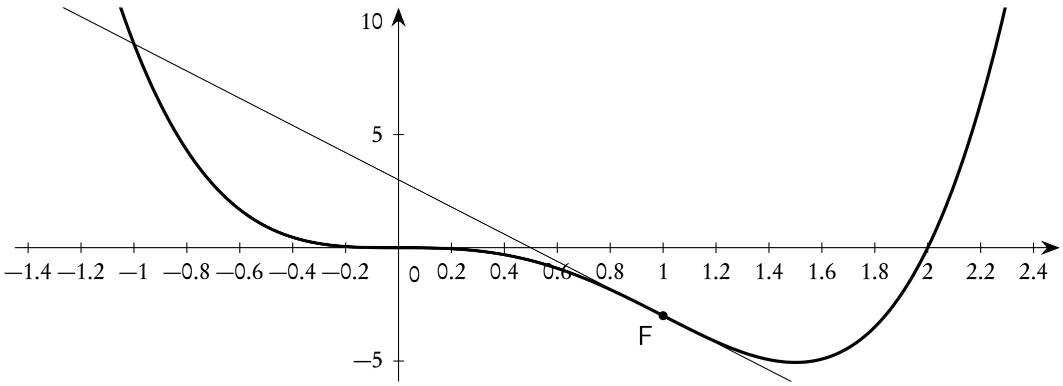
Si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, l'asse delle x e la tangente condotta per il punto F.

Anche in questo quesito l'errore è dello stesso tipo di quello presente nella sessione ordinaria della maturità in italia, vedi D.3, dello stesso anno[4], a cui si rimanda per i commenti.

[3] Riteniamo che quasi nessuno dei candidati possa essere a conoscenza del fatto che esiste anche una condizione necessaria e sufficiente (il famoso teorema di Vitali-Lebesgue) sull'insieme delle discontinuità, teorema che garantisce l'integrabilità secondo Riemann.

[4] Annus horribilis per questo tipo di domande!

In questo caso le regioni sono addirittura tre invece di una, come mostra la figura che segue. Si noti che abbiamo usato unità di misura diverse sui due assi per rendere più leggibile la figura.



D.7. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1982, quesito 4

Si verifichi che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{\cos x-1}=2.$$

Il quesito è uno dei quattro proposti in questa sessione d'esami, dove si richiedeva al candidato di trattare le questioni "più adatte alla sua preparazione", senza precisarne il numero e senza dare indicazioni sulla loro relativa importanza: in realtà questo quesito è decisamente banale in confronto con gli altri tre (una semplice applicazione del teorema di l'Hôpital consente in un passaggio di giungere alla soluzione). C'è comunque da segnalare il fatto che, normalmente, la richiesta di "verificare un limite" sottintende l'uso della definizione di limite (quella, per intenderci, dell'ε-δ): con questo limite una tal verifica sarebbe stata decisamente complessa e sicuramente non alla portata dei candidati

Tuttavia non è su questo che vogliamo concentrare la nostra attenzione, quanto piuttosto sul problema delle notazioni, problema che si presenta anche in altri testi d'esame. Come è noto non vi è accordo universale sulla scrittura dei logaritmi; in particolare la scrittura $\log x$ può significare, a seconda delle convenzioni, $\log_e x$ ($=\ln x$), oppure $\log_{10} x$. In molti degli esercizi assegnati nelle prove d'esame è indifferente quale delle due convenzioni si segue, molte altre volte è presente un'indicazione esplicita di quale convenzione si debba seguire. In questo caso non è presente alcuna indicazione, però il limite proposto vale 2 solo se il logaritmo è da intendersi come logaritmo naturale. Sarebbe bene che, in presenza di notazioni non "standard", ci fosse sempre una chiara indicazione sul loro significato.

D.8. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1985, quesito 4

Si dia la definizione di limite di una funzione e si portino esempi di funzioni convergenti e divergenti in un punto di un intervallo finito.

Anche in questo caso si tratta di un problema di notazioni, o meglio di nomenclatura. Il concetto di "intervallo finito", seppure in uso in qualche testo, è poco comune e sicuramente non standard. Meglio sarebbe stato parlare di "intervallo limitato". In ogni caso si poteva anche tranquillamente parlare di convergenza e divergenza in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, senza scomodare gli intervalli.

D.9. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1993, quesito 3

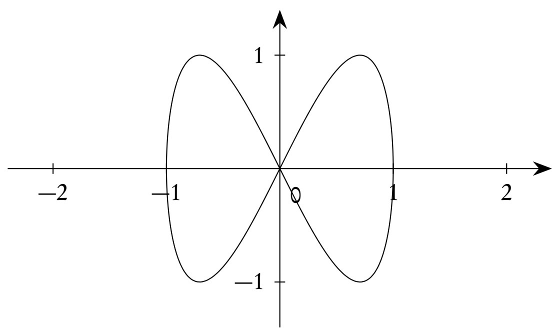
Sia

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}.$$

Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma $y = \pm f(x)$.

Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$).

La curva proposta ha come sostegno (grafico nel piano cartesiano) la figura seguente.



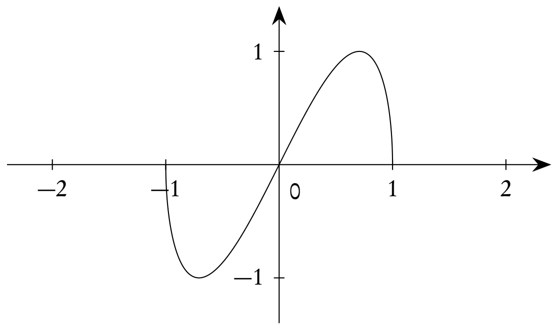
Un tale grafico non può essere pensato come grafico di una funzione reale di variabile reale e quindi è scorretto chiedere di "rappresentare graficamente tale funzione". Più corretta una formulazione del tipo: Il grafico della curva assegnata può essere pensato come l'unione del grafico di una funzione $y = f(x)$ e della sua opposta $y = -f(x)$...

Ci sono poi altri problemi, più delicati. Anche se questo tipo di questioni non vengono usualmente trattate a livello di scuola media superiore, è meglio non creare errate convenzioni nei possibili futuri studenti di facoltà scientifiche, dove questi argomenti sono invece estesamente presi in considerazione.

Un primo problema è legato al fatto che non sono stati forniti i limiti di variabilità del parametro t che compare nelle equazioni parametriche date. Se per esempio si considera solo l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, allora il sostegno della curva è esprimibile come grafico di un'unica funzione reale di variabile reale, precisamente come il grafico di

$$h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

In questo caso il sostegno della curva proposta (e il grafico della funzione $h(x)$) è il seguente.



Se poi si considera un intervallo più ampio di 2π, allora il sostegno è quello rappresentato nella figura precedente, ma viene "percorso più volte" (anche infinite) dal punto P che ha le coordinate date dal testo del problema: come è ben noto, nella teoria della curve è sempre bene distinguere il concetto di *curva* (l'insieme delle due equazioni parametriche che la definiscono) da quello di *sostegno della curva* (l'insieme dei punti del piano descritto dal punto P al variare di t, ovvero la *traiettoria* di P).

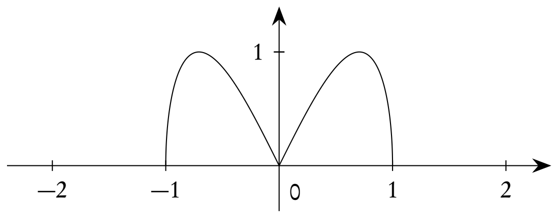
Un secondo problema è dato dal fatto che una coppia di funzioni "facili" (e tra di loro opposte) tali che l'unione dei loro grafici coincida con il sostegno della curva data è costituito da

$$y = \pm f(x) = \pm 2x\sqrt{1-x^2},$$

e sicuramente a queste pensava l'estensore del quesito. Però ci sono infinite altre coppie di funzioni reali di variabile reale con la stessa proprietà. Un esempio elementare è

$$g(x) = \begin{cases} -2x\sqrt{1-x^2}, & \text{se } -1 \le x < 0, \\ 2x\sqrt{1-x^2}, & \text{se } 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

e la sua opposta. Il grafico di $g(x)$ è qui di seguito rappresentato.



D.10. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1994, quesito 2

Considerato il rettangolo ABCD, *il cui lato* $\overline{\mathsf{AB}}$ *è lungo* a, *condurre per* B *la perpendicolare alla retta* AC *e chiamare* H *ed* E *i punti in cui essa seca le rette* AC *e* AD *nell'ordine. Condurre quindi per* H *la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto* P *tale che:*

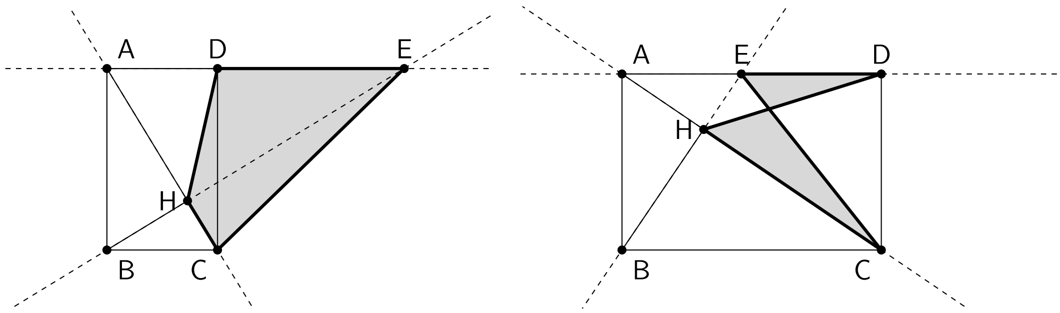
$$|\overline{\mathsf{HP}}| = 6 \cdot |\overline{\mathsf{AE}}|.$$

Esprimere il volume della piramide, avente per vertice il punto P *e per base il quadrilatero* HDEC, *in funzione della lunghezza* x *del segmento* $\overline{\mathsf{BH}}$.

Studiare, indipendentemente dalla questione geometrica, la funzione $f(x)$ fornita dall'espressione del volume suddetto quando $a=1$ e disegnarne il grafico G in un piano cartesiano ortogonale Oxy.

Calcolare infine l'area di ciascuna delle due regioni piane delimitate da G e dalla retta di equazione $4y-9=0$.

Il testo proposto non dà alcuna indicazione sul rettangolo ABCD, per cui il lato più lungo può essere sia $\overline{AB}$ che $\overline{BC}$. Il problema è che se $|\overline{AB}| \geq |\overline{BC}|$ allora il quadrilatero HDEC viene semplice, se invece $|\overline{AB}| < |\overline{BC}|$ lo stesso diventa intrecciato, come mostra chiaramente la figura che segue.



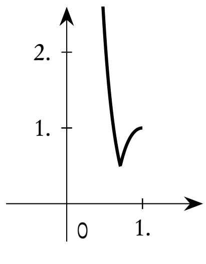
Il calcolo dell'area del quadrilatero (indispensabile per calcolare il volume della piramide) nel primo caso, pur se abbastanza complesso, è fattibile, decisamente complesso invece nel secondo caso.

Le (poche) soluzioni che abbiamo trovato in letteratura considerano, nel secondo caso, il quadrilatero convesso HEDC, per il quale il calcolo dell'area non comporta ulteriori difficoltà rispetto al primo caso.

Con questa scelta si perviene alla funzione

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^2}(x^2-a^2)^2, & \text{se } 0<x\leq \dfrac{a}{\sqrt{2}}; \\ \dfrac{a}{x^2}(3a^2x^2-a^4-x^4), & \text{se } \dfrac{a}{\sqrt{2}}<x<a. \end{cases}$$

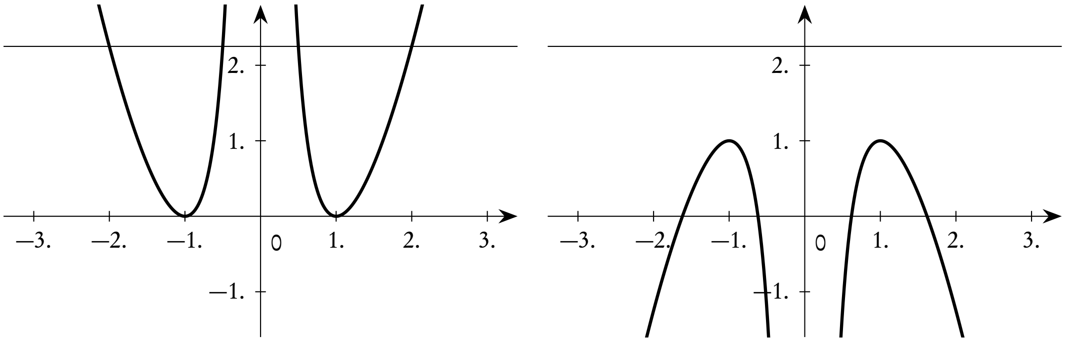
Posto $a=1$, questa funzione, nei limiti posti del problema, ha il grafico che segue.



Sorge ora il problema di interpretare le restanti parti del quesito. In particolare non ci pare possa avere alcun significato la richiesta di "studiare la funzione, indipendentemente dalla questione geometrica".

Probabilmente l'estensore del quesito aveva in mente solo uno dei due casi considerati. Le funzioni ottenute nei due casi, prolungate a tutto il loro dominio naturale, hanno i due grafici che seguono, rispettivamente a sinistra quella ottenuta nel primo caso, a destra quella ottenuta nel secondo. In entrambi i casi abbiamo anche tracciato la retta $4y-9=0$ che interviene nell'ultima parte del quesito.

Come i grafici evidenziano chiaramente, solo nel primo caso la retta $4y-9=0$ delimita con il grafico della funzione due regioni finite di piano (identiche vista la simmetria della funzione stessa). Se ne può dedurre che solo il primo dei due casi era stato considerato, anche se, a parer nostro, è molto più probabile che uno studente possa partire da una figura come quella del secondo caso, non riuscendo più a completare il quesito.



D.11. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 1999, quesito 2

In un piano…

…

stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a

$$\frac{32+22\pi-15\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}^2.$$

In questo caso si tratta di un classico “errore di calcolo”: quasi certamente al posto di 22π ci doveva essere 10π. I dati forniti portano infatti a trovare un valore di r dato da

$$r=2\sqrt{\frac{32+22\pi-15\sqrt{3}}{32+10\pi-15\sqrt{3}}}.$$

Anche se questo risultato non viene più utilizzato nel seguito, sicuramente deve avere causato panico nello studente.

D.12. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 1999, quesito 2

Si deve costruire un recipiente a forma di cilindro circolare retto che abbia una capacità di $16\pi\,\mathrm{cm}^3$. *Il candidato determini le dimensioni del recipiente che richiederanno la quantità minima di materiale.*

Verificato che il cilindro cercato è quello equilatero, si determinino la superficie ed il volume della sfera ad esso circoscritta.

Considerate infine le formule:

$$V=\frac{4}{3}\pi x^3 \qquad , \qquad S=\pi x^2$$

che danno rispettivamente il volume di una sfera di raggio x e l'area di un cerchio sempre di raggio x se ne illustrino i risultati della derivazione rispetto a x.

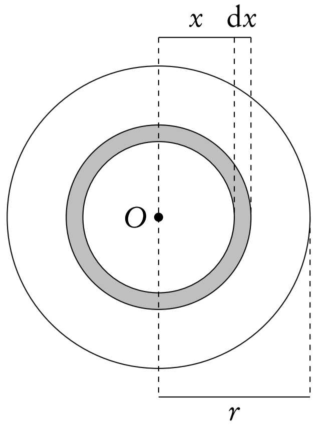
Vogliamo fissare la nostra attenzione sull'ultima domanda del quesito, che ci è parsa interessante, ma forse non alla portata dello studente a cui è rivolta, soprattutto per il modo in cui è formulata.

È infatti elementare calcolare le derivate sia di V che S rispetto a x

$$V' = 4\pi x^2 \quad \text{e} \quad S' = 2\pi x$$

ed osservare che V' esprime l'area della superficie sferica di raggio x, mentre S' esprime la lunghezza della circonferenza di raggio x. A questo punto i "risultati della derivazione" paiono essere sufficientemente "illustrati", ma, vista la banalità di questa osservazione, non si capisce se questo era il vero senso della domanda. Probabilmente si chiedeva al candidato una spiegazione del perché la derivata del volume è la superficie della sfera e la derivata dell'area del cerchio è la lunghezza della circonferenza. Il ragionamento, che riportiamo schematicamente di seguito, pur elementare, non è usuale(5) per uno studente di quinta liceo, in particolare del corso di ordinamento, dove gli integrali (siamo nel 1999) sono trattati nell'ultima parte dell'anno scolastico, quasi a ridosso dell'esame di stato.

Cominciamo dalla superficie del cerchio e dal suo legame con la lunghezza della circonferenza. Consideriamo una circonferenza di centro O e raggio r e due circonferenze, ad essa concentriche, di raggio x e $x + \mathrm{d}x$ rispettivamente. Se $\mathrm{d}x$ è "molto piccolo", il prodotto $2\pi x\,\mathrm{d}x$ fornisce l'area della corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio x e $x + \mathrm{d}x$ rispettivamente. Integrando tra 0 ed r questo prodotto, cioè "sommando" le aree di tutte queste corone circolari "infinitesime", si ottiene πr^2, che è proprio l'area del cerchio di raggio r.



In maniera perfettamente analoga si trova che il volume della sfera è l'integrale, tra 0 ed r, di $4\pi x^2\,\mathrm{d}x$, cioè è la somma dei volumi di tutte le corone sferiche "infinitesime", contenute nella sfera di raggio r e aventi raggio interno x.

D.13. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2000, problema 2

...

[5] Questo tipo di osservazione vale in molte altre situazioni: sarebbe veramente opportuno che venisse redatto un syllabus contenente un elenco dettagliato di quanto gli studenti devono sapere e saper fare, in riferimento alla prova scritta dell'esame di stato.

Determinare i valori dei parametri m ed n in modo che risulti:

$$\int_0^1 e^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{e^n}{m}$$

e che l'integrale fra 1 *e* 2 *della stessa funzione sia doppio dell'integrale precedente.*

Interpretare geometricamente la questione posta sopra.

Una primitiva della funzione assegnata è

$$\frac{\mathrm{e}^n \mathrm{e}^{mx}}{m}.$$

Le due condizioni poste forniscono le seguenti equazioni in m ed n.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^n\mathrm{e}^m}{m} - \dfrac{\mathrm{e}^n}{m} = \dfrac{\mathrm{e}^n}{m} \\ \dfrac{\mathrm{e}^n\mathrm{e}^{2m}}{m} - \dfrac{\mathrm{e}^n\mathrm{e}^m}{m} = 2\,\dfrac{\mathrm{e}^n}{m} \end{cases}.$$

Si verifica subito che e^n si semplifica, per cui il valore di n risulta indeterminato, cosa abbastanza inusuale in una domanda di questo tipo, mentre sia dalla prima che dalla seconda si ricava

$$\mathrm{e}^m = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \ln 2.$$

La funzione integranda diventa dunque

$$\mathrm{e}^{x\ln 2+n} = \mathrm{e}^{x\ln 2}\mathrm{e}^n = \mathrm{e}^n\,2^x.$$

Non è ben chiaro che cosa si intenda con la richiesta di interpretare geometricamente questa questione: infatti i due integrali rappresentano aree nel piano cartesiano, ma la cosa ci pare banale...

D.14. Corso PNI, sessione ordinaria 2000, problema 3

Assegnata la funzione

$$f(x) = a\log^2 x + b\log x$$

dove il logaritmo si intende in base e*, il candidato:*

a) *determini per quali valori di a e b la $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto*

$$\left(\sqrt{\mathrm{e}}, -\frac{1}{4}\right);$$

b) *disegni la curva grafico della $f(x)$ per i valori di a e di b così ottenuti e calcoli l'area della regione finita da essa delimitata con l'asse x.*

Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte esca per tre volte lo stesso numero.

In questo caso l'osservazione che vogliamo fare è sulla coerenza interna del quesito proposto. La traccia inizia infatti con "Assegnata la funzione ... il candidato:" e termina con "Calcoli infine la probabilità che lanciando un dado cinque volte esca per tre volte lo stesso numero." Sicuramente ai candidati sarà venuto il sospetto che la domanda sulla probabilità fosse in qualche modo legata al resto del quesito, mentre ovviamente non c'è alcun legame.

Come altre volte, viene il sospetto che si sia solo voluto inserire ad ogni costo all'ultimo momento una domanda sulla probabilità, forse per giustificare la presenza di questo argomento nel programma di studio.

D.15. Corso PNI, sessione ordinaria 2002, quesito 9

Trovare $f(4)$ *sapendo che*

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x).$$

L'errore presente in questo quesito è, secondo noi, uno dei peggiori, perché si tratta di uno di quegli errori logici molto difficili da scoprire. In effetti non abbiamo trovato, tra le soluzioni presenti in rete, alcuna segnalazione di questo fatto

Il problema è che l'integrale di Riemann di una funzione non dipende dai valori che la funzione integranda assume su un insieme finito di punti (in realtà nemmeno su opportuni insiemi infiniti, ma la cosa esula dal nostro contesto, riferito ai programmi di Scuola media superiore). Pertanto non si può affermare nulla sul valore della funzione nel punto 4.

Per essere più precisi consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x) & \text{se} \quad x \neq 4, \\ \text{qualsiasi numero reale} & \text{se} \quad x = 4 \end{cases} .$$

Essa soddisfa interamente le ipotesi del testo, ma il suo valore in 4 non è determinabile. Il problema è che, quando esistono, le funzioni integrale di funzioni che differiscono tra di loro su un insieme finito di punti coincidono.

Sicuramente l'estensore del quesito aveva in mente la continuità della funzione integranda, continuità che però non è esplicitamente indicata: nel caso di funzione integranda continua, allora il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che la funzione integrale ha ovunque come derivata la funzione integranda e allora si ha

$$\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = (x\cos(\pi x))' = \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x) = f(x),$$

da cui $f(4) = 1$.

D.16. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2003, quesito 7

Considerati i primi n *numeri naturali a partire da* 1*:*

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

a) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

b) $\frac{1}{3}n\left(n^2-1\right)$;

c) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$;

d) $\frac{1}{24}n\left(n^2-1\right)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Possiamo innanzitutto osservare che non è chiaro di che tipo di prodotti parli il testo del quesito: prodotti a due a due, a tre a tre o in tutte le possibili combinazioni? Considerato che già la trattazione dei prodotti a due a due è complessa, si possono escludere (ma era meglio dirlo nel testo) le altre possibilità. Deciso questo si devono anche considerare i prodotti 1×1, 2×2, ecc., oppure solo quelli "misti". Tenendo conto che si parla di combinazioni, si può pensare che questi devono essere esclusi, ma la cosa, a nostro avviso, non era evidente dal testo (ci sono anche le combinazioni con ripetizione!).

Fatta questa premessa possiamo osservare che la soluzione non è semplice. Innanzitutto si deve riuscire a capire che prodotti di questo tipo si generano calcolando il quadrato della espressione polinomiale seguente

$$(1+2+3+\cdots+n)^2,$$

e già questo non è banale. C'è poi il fatto che in questo quadrato ciascuno dei prodotti richiesti si presenta due volte, mentre il testo chiede solo "combinazioni" e quindi, implicitamente, impone di non tenere conto dell'ordine. Inoltre nel quadrato indicato compaiono anche i termini 1^2, 2^2, ecc., che debbono essere scartati. Se ne deduce che la somma richiesta è data da

$$\frac{1}{2}\left[(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)\right].$$

Ora, mentre il calcolo di $1+2+3+\cdots+n$ è abbastanza famoso e si può ritenere noto alla maggior parte degli studenti, non altrettanto può dirsi del calcolo di

$$1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

Il quesito ci pare dunque *non* alla portata dei candidati, o perlomeno della loro quasi totalità. Segnaliamo che ci sono anche altre strategie risolutive, che però in ogni caso richiedono le conoscenze indicate.

D.17. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2004, quesito 3

Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1,3)$ e un minimo relativo in $(-1,2)$.

Nulla da eccepire sulla formulazione del quesito. Segnaliamo solo che uno studente scaltro (e molto preparato!) avrebbe potuto portare un esempio come il seguente:

$$f:\{-1,1\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} 2, & \text{se } x=-1;\\ 3, & \text{se } x=1.\end{cases}$$

Come doveva valutare una simile risposta la commissione?

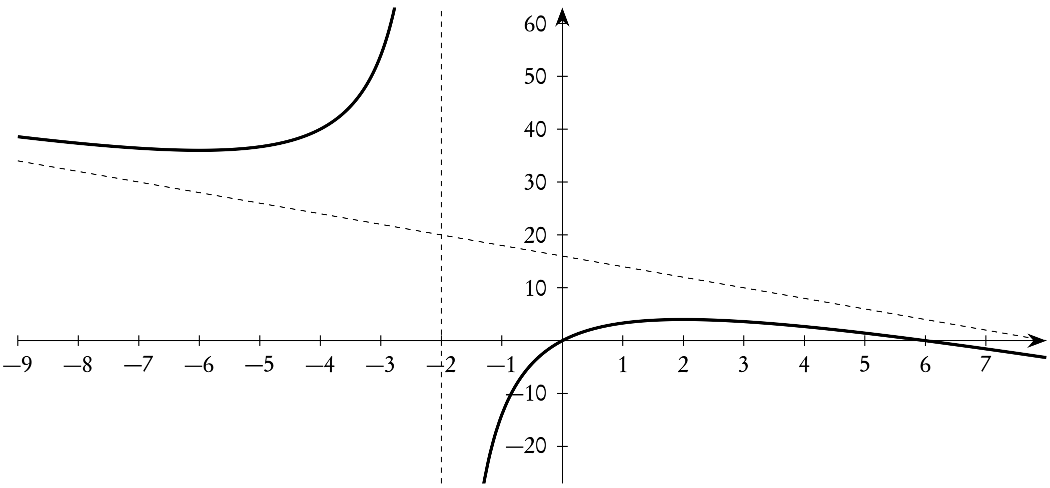
D.18. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2004, problema 1, domanda e)

Spiegare perché la funzione

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}$$

non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

La funzione ha il grafico proposto nella figura seguente.



Sicuramente si tratta di una funzione non invertibile. Il problema è che di restrizioni che rendano questa funzione invertibile ce ne sono sicuramente infinite (e la cosa è vera per ogni funzione che non sia invertibile). Oltre alle restrizioni agli insiemi $]-\infty,-6]\cup[2,+\infty[$ oppure $[-6,-2[\cup]-2,2]$, che producono due funzioni monotone e dall'apparenza "normale", si sarebbe potuta anche considerare la restrizione all'insieme $]-\infty,-6]\cup]-2,2]$, che produce una funzione non monotona, ma comunque ancora abbastanza "normale". Tuttavia come si sarebbe dovuta comportare la commissione nel valutare la risposta di un candidato che avesse proposto la restrizione (estrema!) per esempio al solo punto 0 del dominio che produce chiaramente una funzione invertibile (e addirittura coincidente con la sua inversa)?

D.19. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2004, quesito 1

La funzione

$$f(x) = \frac{3x-2\sin x}{2x-3\sin x}$$

è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo ∞/∞. Il limite della funzione per $x \to +\infty$

a) *non esiste;*

b) *è 2;*

c) *è* 3*;*

d) *è un valore diverso da* 2, 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

Anche in questo caso si tratta di un'osservazione sulla nomenclatura. Non ci pare corretto affermare che "la funzione è una forma indeterminata di tipo ∞/∞"; molto meglio dire "il limite della funzione si presenta nella forma indeterminata di tipo ∞/∞". Anche se può sembrare una sottigliezza, in realtà ci sembra corretto, soprattutto in un testo d'esame, usare un linguaggio quanto più rigoroso possibile.

D.20. Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2004, quesito 8

Calcolare il valore della seguente somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$.

In aggiunta alle considerazioni che abbiamo fatto a proposito di altri quesiti e problemi relativamente al calcolo della somma dei quadrati dei primi numeri naturali, qui è opportuna un'altra considerazione.

Poiché ai candidati è concesso l'uso di una calcolatrice tascabile (seppure "non programmabile"), il candidato che avesse fatto il conto usando una calcolatrice, ottenendo, senza grosse difficoltà, 338350 avrebbe risposto correttamente al quesito?

D.21. Corso PNI, sessione straordinaria 2004, problema 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{i,k=1}^{n} ik \quad , \quad b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 \quad , \quad c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ k \geq i}}^{n} ik \,.$$

...

A proposito di questo quesito potremmo ripetere, ampliandole, le osservazioni già fatte per il quesito 7 del corso di ordinamento, sessione ordinaria 2003. Tra le altre cose richieste per risolvere questo problema c'è la conoscenza della somma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \,,$$

che, seppure abbastanza famosa, non è nota alla grande maggioranza dei candidati agli esami.

In più, in questo problema, si chiedono anche altre conoscenze sulle successioni, ancora meno diffuse e l'uso, abbastanza estensivo, del principio di induzione, argomento quasi tabù nei Licei e, forse, anche in molti corsi universitari di matematica. Si veda per esempio, in [3], il commento alla risoluzione del tema di matematica della sessione ordinaria 2010 del corso PNI, pubblicato su Archimede.

Un commento analogo si può fare per il quesito 5 della sessione straordinaria del 2003, sempre del corso PNI: la scrittura della successione di termine generale

$$a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

in forma ricorsiva richiede sicuramente la conoscenza della già citata somma dei quadrati dei primi n numeri naturali.

Chissà se, a forza di insistere, il ministero sarà riuscito nell'intento di inserire questo argomento nei programmi di Liceo!

D.22. Scuole all'estero, America Latina, sessione suppletiva 2004, quesito 6

Di una funzione $g(x)$, *non costante, si sa che:*

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \quad e \quad g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di $g(x)$.

Non si capisce la necessità della precisazione sul fatto che $g(x)$ non sia costante: una funzione costante è sicuramente continua e dunque se

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3$$

necessariamente anche $g(2) = 3$.

Detto questo l'esempio poteva essere banale: basta prendere una funzione che valga sempre 3, tranne in 2 dove vale 4.

D.23. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2005, quesito 10

Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

È abbastanza facile calcolare la derivata della funzione assegnata, provando che essa si annulla in tutto il suo dominio naturale, cioè in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ma questo non permette affatto di concludere con la costanza della funzione. Il risultato teorico che dovrebbe essere applicato in questo caso è uno dei corollari del teorema di Lagrange, per la validità del quale occorre però che l'insieme in cui la derivata si annulla sia un intervallo (di qualunque tipo), cosa che non succede nel caso in esame.

Un esame ulteriore della funzione permette di concludere che, in effetti, essa non è costante: basta per esempio calcolarne i limiti a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{4}\pi.$$

La conclusione corretta è la seguente:

> La funzione in esame ha derivata nulla in tutto il suo dominio, pertanto essa sarà costante, ma *non* nel dominio, bensì in qualunque intervallo interamente contenuto nel dominio; in questo caso, per esempio, negli intervalli $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$, che sono i due intervalli "massimali" contenuti nel dominio.

È opportuno segnalare che qualche anno prima (esame 2001, PNI, quesito 4), era stata proposta una domanda dal contenuto analogo, riguardante la funzione $\arcsin x + \arccos x$, questa volta definita su un intervallo e quindi costante in quanto derivabile con derivata nulla. Nello stesso anno, nel corso di ordinamento, il quesito 5 chiedeva esplicitamente di verificare che se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora essa è costante sull'intervallo. Un problema sostanzialmente analogo era poi stato proposto, in maniera corretta, anche nel 2004 (corso di ordinamento, quesito 6). Il problema è riproposto anche successivamente, per esempio nella sessione ordinaria del 2006 delle scuole all'estero (Americhe), dove il quesito 6 è così formulato:

La funzione reale di variabile reale $f(x)$ ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo J, tranne che nel punto a di J, dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione $f(x)$ è costante in J? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

Forse a seguito anche delle polemiche suscitate con questo quesito, l'anno successivo nel tema riservato alle scuole italiane all'estero, Europa, è stata riproposta una variante dello stesso quesito correttamente formulato come segue:

Il dominio della funzione

$$f(x) = 3\arctan x - \arctan \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

è l'unione di tre intervalli. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione è costante in ciascuno di essi; indi si calcoli il valore di tale costante.

Quest'ultimo quesito, in forma identica, è stato riproposto anche nella prova assegnata nella sessione ordinaria 2014 per l'America Latina.

Questa insistenza dimostra l'importanza attribuita, giustamente, a questo problema.

D.24. Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2005, quesito 4

Dimostrare che ogni funzione del tipo

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x,$$

dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

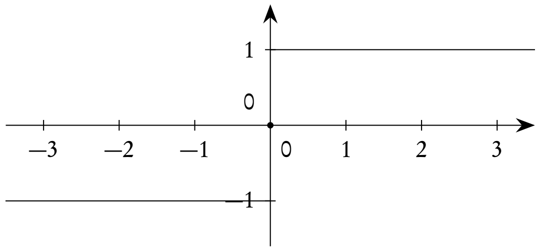
In questo caso si tratta solo di una imprecisione di linguaggio. Abitualmente si usa il termine *sinusoide* per il grafico della funzione $f(x) = \sin x$ (tant'è che per $\cos x$ si usa il termine *cosinusoide*, anche se $\cos x = \sin(x + \pi/2)$), mentre per il grafico delle funzioni del tipo $a\sin(bx + c)$ si usa il termine *grafico sinusoidale*. Anche se la differenza non è sostanziale, sarebbe opportuno in temi d'esame una assoluta precisione di linguaggio: in questo caso il grafico della funzione proposta non è, quasi mai, una sinusoide, mentre è, salvo eccezioni, un grafico sinusoidale.

D.25. Corso PNI, sessione suppletiva 2005, quesito 7

Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.

Il problema richiede, nella sostanza, di distinguere tra il concetto di primitiva e quello di integrale: il nocciolo della questione è legato al fatto che una funzione che abbia discontinuità a salto in un intervallo, non può avere primitive nell'intervallo (teorema di Darboux). Si tratta, a parer nostro, di un problema che non viene abitualmente affrontato nella scuola media superiore, dove si considera, per lo più, il problema dell'integrale di Riemann solo per funzioni continue. Se questo esercizio vuole essere uno stimolo ad "ampliare gli orizzonti", ben venga, ma perché usare gli studenti candidati alla maturità come cavie?

Per fare un esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, il cui grafico è proposto di seguito.



Essa è integrabile, secondo Riemann, su un qualunque intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Per esempio si ha

$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(x)\,dx = 1,$$

come risulta evidente da semplici considerazioni geometriche riguardanti le aree comprese tra il grafico della funzione e l'asse delle x.

La stessa funzione non ha però primitive su tutto $\mathbb{R}$, nel senso che non esiste alcuna funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ la cui derivata coincida con la funzione $\operatorname{sgn}(x)$. Naturalmente questo non esclude che ci siano primitive su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non comprendenti l'origine. In effetti, per ogni h e ogni k reali, tutte le funzioni

$$F(x) = \begin{cases} -x + h, & \text{se } x < 0, \\ x + k, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

hanno come derivata $\operatorname{sgn}(x)$, ma, appunto, per $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ nessuna di esse è derivabile, nemmeno se $h = k$, condizione che le rende solo continue. È utile osservare che le precedenti funzioni $F(x)$, per $h = k$, coincidono con le funzioni $G(x) = |x| + c$.

A proposito di questo quesito è opportuno segnalare che il concetto tradizionale di primitiva (si dice "primitiva di una funzione f" una funzione F che abbia come derivata f in ogni punto del comune dominio) non è l'unico possibile: esistono anche altre definizioni che consentono eccezioni alla coincidenza tra la derivata di F e la funzione f; in questo caso però provare che una funzione integrabile può non avere primitive sarebbe decisamente più difficile, e sicuramente non alla portata di uno studente candidato all'esame di stato.

D.26. Corso PNI, sessione straordinaria 2005, quesito 7

Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione:

$$\int_{-x}^{2x} \frac{dx}{\sin x}.$$

Il problema è che la funzione proposta nel quesito ha come dominio l'insieme vuoto e quindi il problema della sua derivabilità non si pone nemmeno. Esaminiamo i dettagli.

La funzione integranda ha come dominio naturale l'insieme dei reali privato dei punti $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare non appartiene al dominio della funzione integranda il punto $t = 0$, in corrispondenza del quale essa ha un asintoto verticale, tendendo a $+\infty$ a destra di zero e a $-\infty$ a sinistra di zero. Non ha dunque alcun senso il calcolo dell'integrale di Riemann, per una funzione di questo tipo, in un intervallo contenente lo zero.

Potrebbe avere senso il calcolo di un integrale improprio, che comunque non sarebbe convergente come si può facilmente verificare tenendo conto che

$$\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + c\,.$$

Ma anche se l'integrale improprio convergesse, l'applicabilità del teorema fondamentale del calcolo, essenziale per ottenere le conclusioni richieste dal quesito, rimarrebbe tutta da provare...!.

Ora gli estremi dell'integrale proposto nel quesito sono $-x$ e $2x$. Dunque, in ogni caso, un intervallo comprendente l'origine. Se ne deduce che la funzione

$$\frac{1}{\sin t}$$

non è integrabile sull'intervallo proposto e che quindi la funzione $f(x)$ non è definita per nessun x.

A proposito di questo quesito segnaliamo che i riflettori dei media non si sono accesi, in quanto la sessione straordinaria impegna, ogni anno, un troppo esiguo numero di studenti perché qualunque evento ad essa connesso possa "fare notizia". Anche un numero veramente limitato delle soluzioni reperibili in rete o in letteratura segnalano questo errore, particolarmente insidioso a nostro avviso.

D.27. Corso PNI, sessione suppletiva 2006, quesito 6

Dire se è corretto o no affermare che

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c,$$

dove c è una costante arbitraria, e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Il quesito è perfettamente corretto, il problema è che il calcolo dell'insieme delle primitive di una funzione in un dominio diverso da un intervallo (in questo caso $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) è un problema abbastanza complesso, e raramente trattato a livello di scuola media superiore. In realtà la quasi totalità delle soluzioni a questo quesito che abbiamo reperito in letteratura o sulla rete sono, a nostro avviso, errate.

Il calcolo dell'insieme delle primitive di una funzione definita su un intervallo poggia su uno dei corollari del teorema di Lagrange, da cui si può concludere che due diverse primitive di una funzione *definita su un intervallo* differiscono per una costante. È però essenziale che la funzione sia definita su un intervallo, altrimenti due primitive possono anche non differire per una costante.

La risposta corretta a questo quesito è la seguente.

L'affermazione è falsa, in quanto l'insieme delle primitive della funzione $1/x$, su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è dato dalle funzioni

$$f_{(h,k)}(x) = \begin{cases} \ln x + h, & \text{se } x > 0, \\ \ln(-x) + k, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \forall h, k \in \mathbb{R}.$$

È molto importante sottolineare il fatto che non è assolutamente richiesto che le costanti h e k siano identiche. È *sbagliato* scrivere, come fanno moltissimi testi scolastici (anche a livello universitario), e come abbiamo letto sulla maggior parte delle soluzioni pubblicate a questo quesito, che si ha

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c.$$

Questa scrittura implica infatti che la costante arbitraria c è la stessa sia per gli x positivi che per quelli negativi, cosa che non è affatto vera.

La soluzione di questo quesito mostra proprio come la differenza tra due primitive di una funzione può non essere costante, se la funzione non è definita su un intervallo. Sempre in riferimento a questo quesito e a quanto sopra riportato, le due funzioni

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & \text{se } x > 0, \\ \ln(-x) + 2, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \begin{cases} \ln x + 3, & \text{se } x > 0, \\ \ln(-x) + 5, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

sono entrambe primitive di $1/x$ su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma la loro differenza è la funzione

$$g(x) = f_2(x) - f_1(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x > 0, \\ 3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

che non è costante.

La cosa diventa via via più complicata se il dominio della funzione integranda è fatto da più di due intervalli disgiunti. Per esempio si ha

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x^2-1| + h, & \text{se } x < -1, \\ \ln|x^2-1| + k, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \ln|x^2-1| + m, & \text{se } x > 1, \end{cases} = \begin{cases} \ln(x^2-1) + h, & \text{se } x < -1, \\ \ln(1-x^2) + k, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \ln(x^2-1) + m, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

e non è affatto richiesto che le tre costanti h, k, m coincidano.

D.28. Corso PNI, sessione straordinaria 2006, quesito 6

Si ricorda la seguente definizione: Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, definita in un intervallo I, ogni funzione $F(x)$, derivabile in I e tale che $F'(x) = f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in I. *Stabilire se la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & \textit{se } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo $[1,3]$.

Il problema è simile a quello già trattato in riferimento al quesito 7 della sessione suppletiva del corso PNI del 2005 (vedi D.25), a cui si rimanda per i commenti. Poiché la funzione data ha una discontinuità di prima specie (a salto) in un punto interno all'intervallo di definizione, essa non ammette primitive in quell'intervallo.

D.29. Corso PNI, sessione suppletiva 2007, quesito 5

Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ *ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.*

Purtroppo l'equazione proposta ha più di una radice. Abitualmente per iniziare la trattazione di problemi di questo tipo si utilizzano opportuni grafici di funzioni: in questo caso le due strade possibili sono quelle di confrontare il grafico di $f(x) = e^x$ con quello di $g(x) = x^3$, oppure quella di confrontare direttamente il grafico di $h(x) = e^x - x^3$ con l'asse delle ascisse. Osservato che l'equazione non può avere soluzioni per $x < 0$ (in quanto il primo membro è, per $x < 0$, strettamente positivo), seguendo la prima strada ci si imbatte in due funzioni entrambe strettamente crescenti che assumono, almeno per valori di x inferiori a 5, valori non molto diversi; seguendo invece la seconda strada ci si imbatte in una funzione di cui non è facile valutare gli intervalli di crescenza e decrescenza.

Si può, in alternativa, provare a costruire una tabella in cui si riportano i valori di $h(x) = e^x - x^3$ in corrispondenza di valori interi della x, valutando l'applicabilità eventuale del teorema degli zeri per funzioni continue. Si ottiene

$$h(0) = 1, \quad h(1) = e - 1 > 0, \quad h(2) = e^2 - 8 < 0.$$

Si può pertanto concludere che l'equazione ha almeno una radice nell'intervallo $]1,2[$. Graficamente ciò significa che, per $x = 1$ e^x "sta sopra" a x^3, mentre per $x = 2$ e^x "sta sotto" a x^3. Essendo però noto che, per $x \to +\infty$, la funzione esponenziale è infinito di ordine superiore a x^3, si può dedurre che la funzione esponenziale dovrà di nuovo "superare" la funzione x^3 e che quindi ci dovrà essere almeno un'altra radice. Proseguendo infatti con il calcolo dei valori di $h(x)$ per x intero si ottiene

$$h(3) = e^3 - 27 < 0, \quad h(4) = e^4 - 64 < 0, \quad h(5) = e^5 - 125 > 0.$$

Deve dunque esistere almeno un'altra radice tra 4 e 5. Non senza qualche difficoltà si può poi concludere che le radici nei due intervalli indicati sono uniche e che non ce ne sono altre.

In questo caso è probabile che il testo ministeriale contenesse un errore di segno: l'equazione $e^x + x^3$ ha infatti una sola radice. Sicuramente comunque, a nostro avviso, non era facile per uno studente di quinta liceo l'individuazione dell'errore presente nella traccia.

D.30. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2008, quesito 10

Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (vedi la figura sottostante) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.

Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km*, supera un dislivello di* 85 m*, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?*

Si tratta di un quesito semplice ma interessante, in quanto inserisce nelle domande d'esame un problema che si può definire, seppure in un senso esteso, di "matematica applicata".

L'osservazione che vogliamo fare qui non è quindi relativa al quesito in sè, quanto piuttosto al fatto che se rigorosamente la pendenza di un tratto di strada è il rapporto tra dislivello e avanzamento orizzontale[(6)], nella pratica invece si misura il dislivello (per esempio con un altimetro) e la lunghezza della strada: si sostituisce cioè il cateto "orizzontale" di un triangolo rettangolo con l'ipotenusa, che equivale a sostituire la tangente con il seno di un angolo. Siccome le pendenze usuali sono normalmente inferiori al 20%, l'errore che si commette con questa sostituzione è trascurabile, per esempio con una pendenza del 20% se il cateto orizzontale è lungo 100 m, l'ipotenusa misura circa 102 m.

Chissà se qualche studente era a conoscenza di questo fatto e ha fatto una considerazione di questo tipo?

Conviene notare che, comunque, forse anche il segnale stradale, sicuramente creato con l'intento di un significativo impatto visivo e non con quello di rispettare una definizione matematica precisa, poteva essere fuorviante, come osserva Claudio Bernardi [vedi 4].

D.31. Corso PNI, sessione straordinaria 2008, quesito 4

Si determini il campo di esistenza della funzione

$$y = (x^2 + 3x)^{\sqrt{-2-x}}.$$

Nulla da eccepire sulla formulazione di questo quesito. Segnaliamo solo che tutte le volte che si ha a che fare con funzioni del tipo

$$\big(f(x)\big)^{g(x)}$$

si possono presentare situazioni inaspettate e non valutabili a prima vista.

In questo caso la ricerca del dominio[(7)] avrebbe portato alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ -2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x < -3.$$

In realtà il dominio comprende anche il punto -3, per cui l'espressione data diventa 0^1, operazione perfettamente lecita, e, soprattutto, il punto -2, per cui l'espressione data diventa $(-2)^0$, anch'essa perfettamente lecita. Anche i comuni software di calcolo (per esempio Geogebra) accettano, giustamente, il valore -2 come appartenente al dominio.

[6] È infatti questa la definizione di pendenza di una retta ed è questa la risposta che, a nostro avviso, doveva essere data dal candidato.

[7] Il nome *dominio* è, oggi, più comune che non *campo di esistenza*: il dominio di una funzione reale di variabile reale non è quasi mai un *campo* (nel senso algebrico del termine).

D.32. Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2009, quesito 9

Il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

vale 0. *Si dica se quest'affermazione è vera o falsa e si fornisca un'esauriente spiegazione della risposta.*

Il limite proposto vale 1/2 e non 0, dunque l'affermazione è falsa. Ci pare che l'esauriente spiegazione di questo fatto possa solo consistere nel calcolo del limite proposto, calcolo tutt'altro che elementare e, a nostro avviso, non alla portata della maggior parte dei candidati. La strada più semplice praticabile consiste nell'applicazione di uno dei teoremi sulle medie (*Teoremi di Cesaro*) e precisamente del teorema seguente.

Teorema. *Date due successioni* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *la seconda monotona e divergente, sussite l'uguaglianza*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}},$$

se il limite a secondo membro esiste.

L'applicazione del teorema porta a concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Il problema è: quanti studenti hanno questo teorema, o uno simile, nel loro curriculum?

D.33. Corso PNI, sessione suppletiva 2009, problema 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

a) *Si determinino le costanti* a *e* b *in modo che risulti:*

$$\int_0^{2/3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{3} - 6\ln\frac{5}{3}.$$

b) *Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico* γ.

c) *Si conduca la tangente a* γ *nel punto di ascissa* $x = 0$ *e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.*

d) *La retta* $y = k$ *incontri* γ *in due punti di ascissa* x_1 *e* x_2. *Si esprimano, in funzione di* k, *la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità*

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$$

è indipendente dal valore di k *e se ne calcoli il valore.*

Purtroppo di costanti a e b che soddisfino la condizione posta nel testo ce ne sono infinite. Se infatti si calcola l'integrale indicato nel punto a) si ottiene facilmente

$$\int_0^{2/3}\left(2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+a\ln\frac{5}{3}+\frac{2}{5}\,b.$$

Si deve dunque avere

$$\frac{4}{3}+a\ln\frac{5}{3}+\frac{2}{5}\,b=\frac{10}{3}-6\ln\frac{5}{3}\quad\Rightarrow\quad(a+6)\ln\frac{5}{3}=\frac{2}{5}(5-b).$$

Se ne deduce subito che la coppia di valori più semplice (probabilmente l'unica coppia costituita da interi) è

$$a=-6,\quad b=5.$$

Poiché però la condizione è una equazione lineare in due incognite, essa ha infinite soluzioni, tra cui, per esempio,

$$b=0\quad\text{da cui}\quad a=\frac{2-6\ln(5/3)}{\ln(5/3)}.$$

Nonostante l'apparente complicazione del numero a, questa scelta avrebbe banalizzato il quesito b) (la funzione si sarebbe ridotta ad una semplice iperbole equilatera traslata) e avrebbe reso prive di senso le restanti due domande. In ogni caso, comunque, erano possibili anche infinite altre scelte che mantenevano la validità delle restanti domande del problema.

D.34. Corso PNI, sessione suppletiva 2009, quesito 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x)=\int_{\sqrt{2}/2}^{\sin(x/2)}\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{|t|+1}\,\mathrm{d}t$$

nel punto P *di ascissa* $x=\pi/2$.

Nulla da eccepire sulla formulazione di questo quesito, che anzi ci pare estremamente interessante. L'unica cosa che ci pare utile segnalare è che, di fronte a un integrale del genere, lo studente medio può essere stato preso dal panico, soprattutto in considerazione del fatto che la trattazione dettagliata delle funzioni integrali non è molto comune nella scuola media superiore: se si voleva accertare la conoscenza di questo argomento si sarebbe anche potuto scegliere un esercizio meno complesso dal punto di vista tecnico, come del resto è stato fatto molte altre volte.

D.35. Scuole all'estero, America Latina, sessione ordinaria 2009, quesito 2

Dopo aver illustrato il significato di funzione inversa si dica, motivando la risposta, se è vero che:

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

Il quesito ci è parso oltremodo interessante. Ci pare comunque giusto anche segnalare che la trattazione delle funzioni trigonometriche inverse è spesso molto sommaria e probabilmente non molti candidati saranno stati in grado di rispondere correttamente che l'uguaglianza è falsa, in quanto la funzione arcsin non è l'inversa della funzione sin, ma solo di una sua opportuna restrizione: a causa di questo si ha, correttamente,

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Analoga osservazione per il quesito 5 della prova della sessione suppletiva 2010 per l'America Latina.

D.36. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2010, quesito 3

Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

Tutti i risolutori hanno posto il cono circolare retto con la base poggiata al piano, ma dove è scritta questa indicazione sul testo del problema? Forse lo studente doveva intuirlo dal fatto che un cono poggiato per il vertice "sta difficilmente in piedi" e che la sezione con un piano orizzontale di un cono poggiato su una generatrice della superficie laterale è di difficile trattazione?

D.37. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2010, quesito 4

Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

vale la relazione

$$f'(x_1)+f'(x_2)=0$$

e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

Una funzione come quella assegnata non ha sempre due zeri: in assenza di zeri la relazione assegnata è, in $\mathbb{R}$, priva di senso e dunque non è possibile darne alcuna interpretazione geometrica.

D.38. Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2010, quesito 8

Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r, quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.

Si può sicuramente impostare un calcolo formale per "dimostrare" quanto richiesto nel quesito. Il problema è che la richiesta, come formulata, è logicamente errata, in quanto la lunghezza della circonferenza è, sostanzialmente per definizione, il limite della lunghezza del perimetro di un poligono regolare di n lati, al tendere all'infinito del numero dei lati. Non si può quindi fare una "dimostrazione", semmai soltanto una "verifica formale".

D.39. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2013, quesito 6

Con le cifre da 1 *a* 7 *è possibile formare* $7! = 5040$ *numeri corrispondenti alle permutazioni delle* 7 *cifre. Ad esempio i numeri* 1234567 *e* 3546712 *corrispondono a due di queste permutazioni. Se i* 5040 *numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la* 721*-esima posizione?*

Anche se può essere desunto dal contesto, forse era meglio precisare che i numeri di cui si parla sono formati da cifre tutte distinte.

D.40. Corso PNI, sessione straordinaria 2013, problema 1

…Si scriva l'equazione della retta s *che congiunge i punti estremanti relativi di* γ *e si verifichi che essa passa per il punto d'intersezione degli asintoti. Si calcoli inoltre, in gradi e primi (sessagesimali), l'ampiezza dell'angolo acuto* Φ *che* s *forma con l'asintoto obliquo. …*

La nomenclatura più comune usa il termine "estremante" per le ascisse dei punti di estremo di una funzione: in questo, e in numerosi altri testi d'esame, il termine è invece usato per indicare i punti estremi sul grafico della funzione.

D.41. Corso PNI, sessione straordinaria 2013, quesito 6

Si disegni la curva di equazione

$$y = |x^2 - 1|.$$

Si scrivano le equazioni delle tangenti condotte nei punti A *e* B *di ordinata nulla. Si verifichi che le due coppie di rette trovate individuano un rombo, del quale si chiedono le misure del perimetro e dell'area.*

I punti di ordinata nulla della funzione data sono punti di non derivabilità e abitualmente non si parla di tangenti in questi punti, ma, eventualmente, di tangente sinistra e destra: meglio sarebbe stato attenersi alla nomenclatura più diffusa.

D.42. Corso di ordinamento, sessione ordinaria 2015, problema 2, domanda a)

…

Nel caso $f(x)$ *fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.*

…

Questa domanda ha prodotto lunghe discussioni sia sulla stampa che sui siti specializzati. La risposta più semplice, che ci sentiamo di condividere, è la seguente.

"Dal grafico si evince che la funzione assegnata presenta tre zeri, situati nei punti di ascisse

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

Lo zero $x = 2$, essendo la funzione tangente all'asse delle ascisse, ha molteplicità due. Si conclude che il polinomio minimo che può rappresentare la funzione è di quarto grado."

Tra l'altro la cosa è confermata anche dal fatto che ci sono rette orizzontali, diverse dall'asse delle ascisse, che intersecano la curva in 4 punti.

Molti risolutori hanno osservato che un polinomio di quarto grado non può rispettare tutte le condizioni desumibili dal grafico proposto e che in realtà solo un polinomio di nono grado è adatto. Anche questa osservazione ci pare corretta, tuttavia riteniamo che la migliore osservazione sia quella di Emilio Ambrisi, pubblicata sul sito www.matmedia.it con il titolo "Che cosa risponderei e come valuterei" e che riportiamo integralmente di seguito.

> "[Il quesito] è l'invito a fare un'ipotesi, una congettura e a darne ragione. Spiegare il perché ipotizzo "un certo grado" a partire da un grafico del quale alcune cose sono precisate e altre no. Non rispondo né 1, né 2 né 3 perché i relativi grafici non si adattano a quell'andamento. Rispondo 4 perché mi dite che ha tre punti di stazionarietà, ma anche perché vedo che ha tre intersezioni (distinte, ma non precisate esplicitamente) di cui una in un punto stazionario. Potrei rispondere un numero maggiore di 4 perché ci sono altre informazioni che mi date, ma non so quanto e quali di esse incidono; dovrei andare a verificare, ma mi accorgo che ci vuole tempo e tranquillità che non ho e di alcuni dati non sono neppure certo (le intersezioni sono quelle? passa effettivamente per $O(0,0)$ o solo "vicino" ad O?). In ogni caso poiché mi chiedete quale potrebbe essere il grado minimo di un polinomio che riproduca la $f(x)$ in quell'intervallo, io dico che è 4 per i motivi esposti, cioè 4 è il grado minimo di un polinomio che possa avere quell'andamento.
>
> Così io risponderei, ma altri possono dare risposte diverse. È questa la ricchezza pedagogica del quesito che, *ineccepibile* nella formulazione, consente a chiunque di affrontarlo con il grado di libertà che la preparazione gli consente. Un quesito che è un esempio di come si fa matematica partendo da una congettura, tant'è che ha avuto successo perché ha spinto anche esperti di provata capacità ad andare avanti e proseguire il lavoro. A loro non possiamo che augurare di soddisfare appieno il desiderio che li anima, alle commissioni d'esame di trovare, nella correzione degli elaborati, risposte sorrette da buone argomentazioni."

D.43. Corso di ordinamento, sessione straordinaria 2015

L'intera traccia della prova straordinaria del 2015 è identica a quella assegnata, sempre nel 2015, nelle scuole italiane all'estero, calendario boreale 2 ("Americhe").

La cosa è abbastanza sorprendente, ed è, a quanto ci risulta, la prima volta che succede. Prima dell'avvento di Internet la cosa sarebbe forse anche passata inosservata: la diffusione delle tracce assegnate nelle scuole all'estero, particolarmente fuori dall'Europa, richiedeva un certo tempo e la probabilità che qualche candidato ne fosse venuto a conoscenza era praticamente nulla. In questo caso invece sia la traccia che addirittura la soluzione dettagliata erano già state pubblicate da oltre un mese e diffuse sulla rete.

C'è anche un ulteriore motivo di sorpresa nel registrare questo fatto. La struttura delle tracce d'esame è stata sostanzialmente modificata proprio nel corso del 2015 e sono ben pochi gli esempi "ufficiali" reperibili, per cui sicuramente i candidati avranno avuto modo di conoscere tutto quanto era disponibile in internet.

Anche se la sessione straordinaria coinvolge sempre un numero molto limitato di studenti, ci pare che si sia trattato di un errore assolutamente imperdonabile.

D.44. Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, considerazioni generali

Con questa simulazione della prova d'esame di matematica per i Licei comincia a giungere a maturazione l'idea di "contestualizzare" i problemi di matematica, cioè di inserire nei temi d'esame "l'interpretazione fisica e modellistica dei risultati matematici". Gli studenti per superare la prova, dovrebbero "avere ben compreso alcuni aspetti della matematica e come questi possano essere applicati in modelli reali, anche se piuttosto semplici".

Tuttavia la realizzazione di questa idea che traspare dai problemi proposti dal Ministero non è piaciuta a molti e sono state formulate molte critiche.

Michelangelo di Stasio su `www.matmedia.it` giunge, a proposito della simulazione del 10 dicembre 2015, a proporre una versione dei temi, riscritti secondo lo stile "classico". Riportiamo qui, a titolo d'esempio, la proposta di riscrittura del problema 2: il ghiaccio.

> Una ditta deve realizzare dei blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume $10\,\mathrm{dm}^3$, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.
>
> È noto che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.
>
> 1. Si studi la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e se ne rappresenti il grafico.
> 2. Si determini il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h; si commentino i risultati trovati.
>
> Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di $-18\,°\mathrm{C}$, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta dal luogo della produzione a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di $10\,°\mathrm{C}$; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente.
>
> 3. Si scelga una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della fusione ($T_a =$ temperatura ambiente, $T_g =$ temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t) =$ temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t =tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):
>
> $$T(t) = (T_g - T_a)\mathrm{e}^{-Kt}$$
> $$T(t) = (T_a - T_g)\cdot(1 - \mathrm{e}^{-Kt}) + T_g$$
> $$T(t) = (T_a - T_g)\mathrm{e}^{-Kt} - T_a$$
>
> e si determini il valore che deve avere il parametro K, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

Per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, si adopera un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm;

4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, si stabilisca se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Non possiamo non concordare con le conclusioni a cui Di Stasio giunge: la scrittura tradizionale del problema non fa scomparire per nulla l'interpretazione fisica e modellistica dei risultati matematici e i concetti esplicitati sono esattamente gli stessi di quelli esplicitati nella formulazione proposta dal Ministero. Le cose in più presenti in quest'ultima formulazione sono solo elementi e storie inessenziali (il gruppo di studenti in viaggio didattico che cosa centra con il problema o con l'interpretazione fisica e modellistica?) e un tono confidenziale falsamente rassicurante e che, aggiungiamo noi, può solo complicare la corretta comprensione del problema da parte del candidato.

Ancora una piccola, ma non secondaria, osservazione: il passaggio da solido a liquido si chiama *fusione*, non *liquefazione*, che è il termine usato invece per il passaggio da gas a liquido.

D.45. Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, problema 2, domanda 4

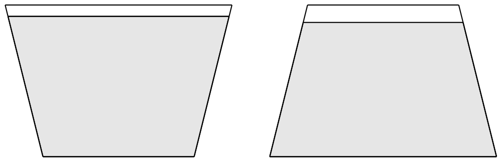
L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm*, raggio della base maggiore eguale a* 1,5 dm*, e altezza eguale a* 2 dm*;*

4. *sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del* 9,05%*, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.*

La forma troncoconica del contenitore dell'acqua rende il problema della determinazione dell'altezza non banale, in quanto il raggio della base superiore del "tronco d'acqua" che si va formando, varia al variare dell'altezza. Tuttavia il problema è risolubile, anche se con qualche difficoltà.

La cosa che vogliamo qui segnalare è che il Ministero, poco dopo la conclusione della prova, ha pubblicato un'ipotesi di soluzione della stessa: ebbene, relativamente al quesito in esame la prima soluzione proposta era se non errata, almeno "imprecisa", tanto che è stata pubblicata una seconda soluzione, presentata come soluzione alternativa, e che invece corregge nella sostanza la precedente!

C'è poi un'ultima osservazione da fare: il testo non precisa affatto se la "bocca" del contenitore dell'acqua è costituita dalla base minore o dalla base maggiore. Sia la soluzione del ministero che le altre che abbiamo reperito sulla rete assumono che essa sia la base maggiore, ma la cosa non è assolutamente evidente dal testo, e una scelta piuttosto che l'altra avrebbe portato a risultati diversi, come risulta evidente esaminando la figura che segue, dove il contenitore è rappresentato in sezione. Anche se, nella sostanza, la logica risolutiva non cambia, riteniamo sarebbe stata corretta una precisazione in tal senso.

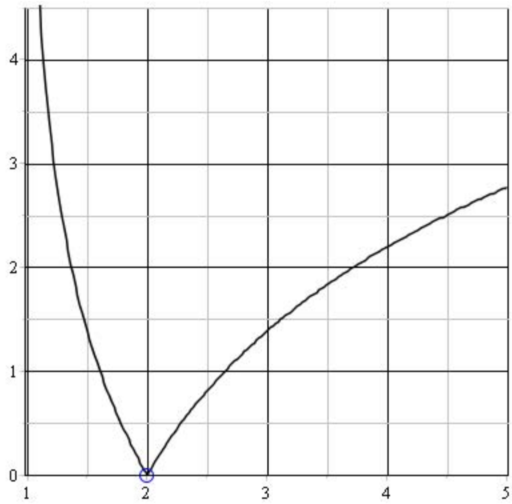


D.46. Corso di ordinamento, simulazione del 10 dicembre 2015, quesito 10

Il testo ministeriale della simulazione, a proposito della funzione

$$y = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$$

di cui si chiede di analizzare il grafico, pubblica la seguente immagine:



Il grafico proposto è palesemente errato, in quanto $f(5) \simeq 1.39$, e non $\simeq 2.75$ come pare leggersi dall'immagine. Anche se questo particolare del grafico non ha influenza sulla soluzione del quesito, ci pare scorretto proporre un'immagine errata, tanto più che, sicuramente, essa è stata prodotta con un software che può aver fornito risultati sbagliati solo a seguito dell'immissione di dati errati.

C'è anche un'altra osservazione da fare a proposito sempre di questa immagine, in quanto il sistema coordinato utilizzato non ha l'origine in $(0,0)$, ma in $(1,0)$, cosa perfettamente legittima, ma, forse, non abituale per lo studente.

Un'ultima osservazione relativamente a questo quesito riguarda la nomenclatura utilizzata. Tutti concordano sul fatto che il concetto di *continuità* di una funzione si può porre solo per i punti del dominio della stessa: la definizione infatti richiede che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

cosa che ha senso solo se x_0 appartiene al dominio. Dunque anche il concetto di *discontinuità* si dovrebbe porre solo per punti del dominio. La gran parte dei libri di testo, però, introduce il concetto di discontinuità anche per punti di accumulazione del dominio, ma non appartenenti al dominio (e questo è il caso dei punti $x = 1$ e $x = 2$ per la funzione del quesito). Tuttavia moltissimi testi, in particolare universitari, fanno notare l'illogicità di una tal nomenclatura. Riteniamo dunque che, anche se la formulazione di questo quesito è lecita in quanto comune in molta letteratura, sarebbe bene che non si utilizzasse in temi ministeriali una nomenclatura non universalmente accettata.

Queste stesse considerazioni si applicano anche ad altri problemi e quesiti posti all'esame di stato (si veda per esempio il quesito 2 della sessione suppletiva dell'esame PNI del 2011).

È utile anche segnalare che, per esempio, dalla formulazione del quesito 1 della sessione straordinaria del corso di ordinamento del 2002, si evince proprio come il concetto di discontinuità, esattamente come quello di continuità, abbia senso solo per punti del dominio di una funzione. Il quesito recita infatti:

Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ *e sia* $x_0 \in D$*: definire la continuità e discontinuità di* $f(x)$ *in* x_0 *e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.*

D.47. Corso di ordinamento, sessione suppletiva 2016, problema 1

In questo caso il commento che vogliamo fare riguarda le soluzioni proposte in rete a questo problema. Infatti nel testo del problema non è fatto alcun cenno al tipo di funzione che delimita il lato sinistro dello spazio condominiale dove deve essere costruita la sala riunioni. Molte delle soluzioni che abbiamo reperito in rete lo trattano come un arco di parabola, avente vertice in $(2,0)$ e passante per $(0,5)$. Anche se la cosa appare legittima, tuttavia non è un'informazione fornita nel testo. Per risolvere il problema in realtà non è indispensabile conoscere l'equazione di questo arco di curva: è sufficiente fare una stima dell'area della regione (e quindi del volume della costruenda sala) tra un minimo e un massimo: si veda, per esempio, la soluzione proposta in un blog del Liceo Cavour di Roma, al link https://alabis.wordpress.com/.

D.48. A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018, quesiti

Questa simulazione, precedente la decisione del Ministero di scegliere, per l'A.S. 2018-2019, proprio una prova mista di Matematica e Fisica, ha suscitato numerose polemiche e proteste, sia da parte di gruppi di studenti, che di singoli insegnanti, che di associazioni di matematici. Ma la ciliegina sulla torta che ha fatto scoppiare una vera e propria sollevazione nell'ambiente è la scoperta che ben 6 quesiti su 8 presenti nel questionario sono integralmente copiati dal testo *Problems in General Physics*, di Igor Evgenyevich Irodov, nella versione del 1979 delle Edizioni MIR di Mosca, tradotto in inglese da Yuri Atanov, traduzione pubblicata sempre dalle Edizioni MIR nel 1981. Addirittura per quanto riguarda il primo quesito la figura è la semplice scansione di quella presente sul testo di Irodov. Come giustamente osserva, in un articolo apparso su *Repubblica* del 20 gennaio 2019, Roberto Natalini, matematico del Cnr, responsabile della comunicazione dell'Unione Matematica Italiana, nonché direttore di *Archimede, rivista per insegnanti e cultori di matematiche pure e applicate*,"Capisco che si possa prendere spunto da un manuale per poi adattare gli esercizi al contesto didattico in cui devono essere proposti, ma qui c'è stato un pedissequo lavoro di copiatura".

È altresì degno di nota il fatto che nel testo ministeriale non ci sia alcun riferimento all'originale da cui i quesiti sono stati copiati.

In ogni caso la cosa più sorprendente è il fatto che il testo di Irodov sia esplicitamente scritto per "students at higher educational institutions studying advanced course in physics", in altre parole per studenti universitari, non di certo per studenti di Liceo Scientifico.

Pubblichiamo qui seguito i testi originali come compaiono sul volume di Irodov, con riferimento ai quesiti proposti dal Ministero nella simulazione.

Probl. 3.288, a pag. 148 di Irodov, identico al quesito 1. A wire bent as a parabola $y = ax^2$ is located in a uniform magnetic field of induction B, the vector $\mathbf{B}$ being perpendicular to the plane x, y. At the moment $t = 0$ a connector starts sliding translationwise from the parabola apex with a constant acceleration w (Fig. 3.78). Find the emf of electromagnetic induction in the loop thus formed as a function of y.

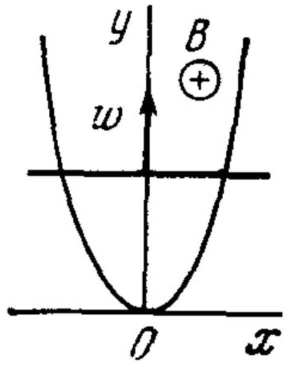


Fig. 3.78.

A proposito di questa figura notiamo che in russo *accelerazione* si traduce in "ускорение", la cui lettera iniziale corrisponde alla nostra "u", ed è questo il motivo del simbolo w (per noi abbastanza strano) per l'accelerazione. Si veda anche il quesito seguente.

Probl. 1.20, a pag. 14 di Irodov, identico al quesito 2. A radius vector of a particle varies with time t as

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\,t(1-\alpha t),$$

where $\mathbf{a}$ is a constant vector and α is a positive factor. Find:

a) the velocity $\mathbf{v}$ and the acceleration $\mathbf{w}$ of the particle as a function of time;

b) the time interval Δt taken by the particle to return to the initial points, and the distance s covered during that time.

Probl. 1.26, a pag. 15 di Irodov, identico al quesito 4. A point moves in the plane xy according to the law

$$x = a \in \omega t, \quad y = a(1-\cos\omega t),$$

where a and ω are positive constants. Find:

a) the distance s traversed by the point during the time τ;

b) the angle between the point's velocity and acceleration vectors.

Probl. 3.375, a pag. 160 di Irodov, identico al quesito 5. An electron starts moving in a uniform electric field of strength $E = 10\,\mathrm{kV/cm}$. How soon after the start will the kinetic energy of the electron become equal to its rest energy?

Probl. 4.150, a pagina 189 di Irodov, identico al quesito 6. How long will it take sound to travel the distance l between the points A and B if the air temperature between them varies linearly form T_1 to T_2? The velocity of sound propagation in air is equal to

$$v = \alpha\sqrt{T},$$

where α is a constant.

Probl. 4.2, a pag. 166 di Irodov, quasi identico al quesito 8. A point moves along the x axis according to the law

$$x = a\sin^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Find:

a) the amplitude and period of oscillations; draw the plot $x(t)$;

b) the velocity projection v_x as a function of the coordinate x; draw the plot $v_x(x)$.

Approfittiamo di questo commento per segnalare che il citato testo di Irodov è veramente una miniera di esercizi per prepararsi ad un esame di fisica (a livello universitario!). Per gli interessati segnaliamo anche il testo, in due volumi, contenente le soluzioni a tutti i problemi proposti da Irodov: *Solutions to I.E.Irodov's Problems in General Physics*, di Abhay Kumar Singh, CBS Publishers & Distributors, New Delhi, India, 1995.

D.49. A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 20 dicembre 2018, problema 2

Come se non bastasse quanto già osservato a proposito dei quesiti relativi a questa simulazione, anche il testo del problema 2 è tutt'altro che originale. Esso infatti proviene, quasi integralmente, da una prova proposta agli esami di maturità francese ESABAC, maturità per scuole di eccellenza. In realtà non è sbagliato prendere spunto da altri esami per preparare le prove di maturità: tuttavia si dovrebbero utilizzare prove per esami comparabili e, soprattutto, si dovrebbero citare le fonti. In tempo di internet è ben difficile fare dei plagi senza che qualcuno se ne accorga.

Pubblichiamo, in lingua originale, il testo della maturità francese, liberamente reperibile online[(8)], per un utile confronto, anche relativamente al modo in cui i temi sono formulati nella versione italiana e in quella francese. Allo stesso link potete trovare la soluzione dettagliata.

[8] https://www.annabac.com/annales-bac/les-trois-records-de-felix-baumgartner.

LES TROIS RECORDS DE FÉLIX BAUMGARTNER

Le 14 octobre 2012, Félix Baumgartner a réalisée un saut historique en inscrivant trois records à son tableau de chasse: celui de la plus haute altitude atteinte par un homme en ballon soit 39045 m d'altitude, le record du plus haut saut en chute libre, et le record de vitesse en chute libre soit $1341,9\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Après une ascension dans un ballon gonflé à l'hélium, il a sauté vers la Terre, vêtu d'une combinaison spécifique en ouvrant son parachute au bout de 4 min et 20 s.

Le saut a duré en totalité 9 min et 3 s.

Document 1 - Ascension du ballon

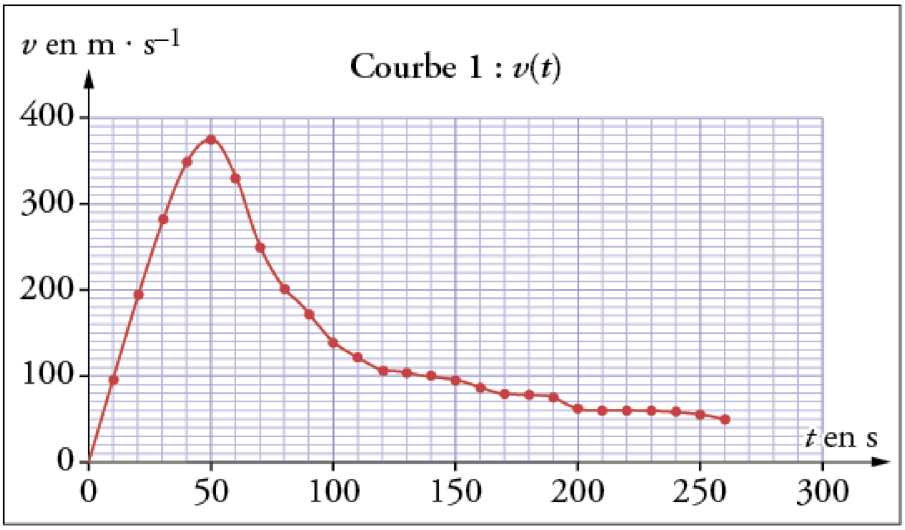
Il a fallu concevoir un ballon déformable gigantesque, faisant 10 m de hauteur et 130 m de diamètre lors de son extension maximale. En raison de la diminution de la densité de l'air avec l'altitude, le volume du ballon augmente lors de l'ascension de façon à ce que la poussée d'Archimède reste constante.

"Pour assurer une vitesse d'ascension suffisante, le volume initial d'hélium utilisé était de 5100 mètres cubes, c'est-à-dire le double du nécessaire pour la sustentation (*Sustentation*: état d'un corps maintenu à faible distance au-dessus d'une surface, sans contact avec celle-ci). En pratique, si l'on ajoute à la masse de l'équipage celle du ballon et de l'hélium, c'est environ 3 tonnes qu'il a fallu soulever."

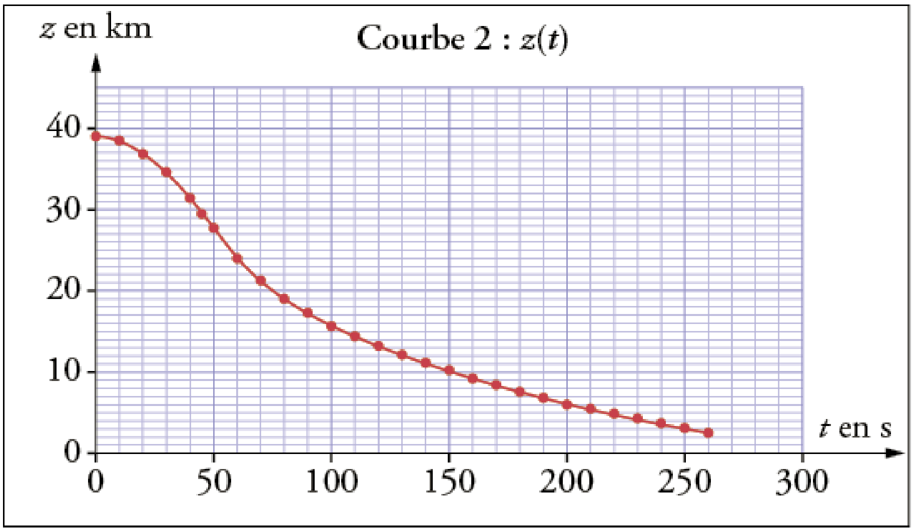
D'après un article de *Pour la Science*, janvier 2013.

Document 2 - Étude du saut de Félix Baumgartner

La masse de Félix Baumgartner et de son équipement est $m = 120\,\mathrm{kg}$. La date $t = 0$ correspond au début du saut de Félix Baumgartner.



Courbe 1. Évolution temporelle de la vitesse v de Félix Baumgartner, dans le référentiel terrestre, jusqu'à l'ouverture du parachute.



Courbe 2. Évolution temporelle de l'altitude z par rapport au sol de Félix Baumgartner, jusqu'à l'ouverture du parachute.

D'apres http://www.dailymotion.com/video/x15z8eh_the-full-red-bull-stratos-mission-multi-angle-cameras_sport.

Données

— L'expression de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur un corps est la suivante:

$$\overrightarrow{F_A} = \varrho_{\text{air}} V g \overrightarrow{u_z}$$

avec $\overrightarrow{u_z}$ vecteur unitaire vertical vers le haut, $\varrho_{\text{air}}(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ masse volumique de l'air dans lequel est plongé le corps, $V(\text{m}^3)$ volume du corps placé dans l'air et g intensité du champ de pesanteur.

— L'intensité du champ de pesanteur est considérée comme constante entre le niveau de la mer et l'altitude de 39 km: $g = 9.8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

— La stratosphère est la couche de l'atmosphère qui s'étend de 10 km à 50 km d'altitude environ.

— La masse volumique de la partie supérieure de la stratosphère est de l'ordre de $0.015\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, celle de la troposphère au niveau du sol est $1,22\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

— La célérité du son dans l'air en fonction de l'altitude est donnée dans le tableau ci-dessous.

Altitude (km)	10	20	30	40
Célérité du son (m/s)	305	297	301	318

— La vitesse d'un mobile dans un fluide est dite supersonique si elle est supérieure à la célérité du son dans ce fluide.

1. Ascension en ballon sonde de Félix Baumgartner

Le volume de l'équipage est négligeable par rapport au volume du ballon.

1. Indiquer la force qui est responsable de l'ascension du ballon. (0.5 *point*)

2. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système ballon; équipage juste après le décollage, en négligeant les forces de frottement. Illustrer ce bilan de forces par un schéma, sans souci d'échelle mais cohérent avec la situation physique. (1 *point*)
3. En utilisant les données, les informations du texte et les connaissances acquises, vérifier par un calcul que le ballon peut décoller. (1 *point*)
4. Après quelques minutes d'ascension, le mouvement du système ballon; équipage est considéré comme rectiligne uniforme. Déterminer alors la valeur de la force de frottement de l'air. (0.5 *point*)

2. Saut de Félix Baumgartner

On étudie maintenant le système Félix Baumgartner et son équipement en chute verticale dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. On choisit un axe $(\mathrm{O}z)$ vertical vers le haut dont l'origine O est prise au niveau du sol. Le système étudié, noté S, a une vitesse initiale nulle.

1. Utiliser l'étude du saut de Félix Baumgartner (courbe 1 du document 2) afin de déterminer la valeur de son accélération si $t < 20\,\mathrm{s}$. Commenter le résultat obtenu. (0.5 *point*)
2. Lors de son saut, Félix Baumgartner a-t-il atteint une vitesse supersonique? Justifier. (0.5 *point*)
3. Calculer la variation d'énergie mécanique ΔE_m entre le moment où Félix Baumgartner saute et le moment où il atteint sa vitesse maximale. Interpréter le résultat. (1 *point*)
4. Les schémas ci-dessous représentent à trois instants les forces appliquées au système S lors du saut: le poids et la force modélisant les frottements. Affecter un schéma à chacune des dates: $t_1 = 40\,\mathrm{s}$, $t_2 = 50\,\mathrm{s}$ et $t_3 = 60\,\mathrm{s}$. (1 *point*)

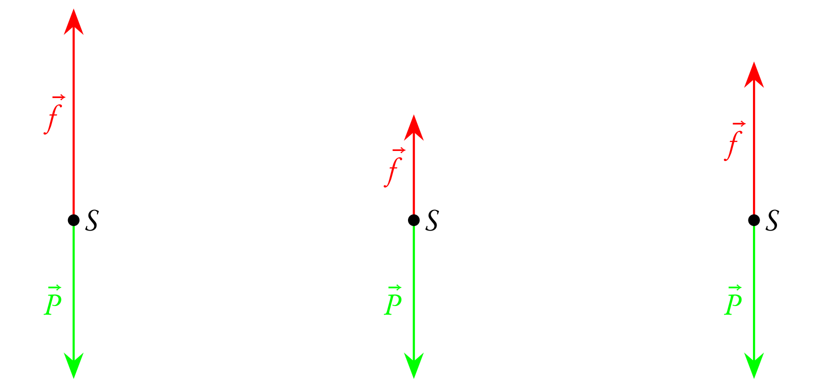


Schéma A Schéma B Schéma C

5. Déterminer l'altitude à laquelle Félix Baumgartner ouvre son parachute. En supposant que le système a un mouvement rectiligne et uniforme après l'ouverture du parachute et jusqu'à l'arrivée au sol, déterminer la valeur de la vitesse du système durant cette phase du mouvement. On rappelle que le saut a duré en totalité 9 min et 3 s. (0.5 *point*)
6. Pour acquérir la même vitesse à l'arrivée au sol, de quel étage d'un immeuble Félix Baumgartner aurait-il dû sauter? Commenter. (1 *point*)

Les clés du sujet

Notions et compétences en jeu: Cinématique et dynamique newtonienne.

Conseils du correcteur: Pour calculer la poussée d'Archimède, prenez la valeur de g de la troposphère car on est au décollage donc au sol. Puis comparez-la à la valeur du poids.

D.50. A.S. 2018/2019, simulazione di Matematica e Fisica del 28 febbraio 2019

Il commento che riportiamo qui è un estratto di quanto scritto il 3 marzo 2019 dal prof. Alberto Meroni, presidente AIF, sul sito ufficiale della Associazione per l'Insegnamento della Fisica, https://www.aif.it/ancora-seconda-prova-quel-delicato-sapore-di-fisica/.

> Ancora seconda prova: quel delicato sapore di fisica ... che ho percepito appena ho letto i problemi della nuova simulazione di matematica e fisica diffusa dal MIUR. Come la petite madeleine di Proust, mi ha fatto ricordare i problemi dell'Esame di Maturità (allora si chiamava così) degli anni Settanta, quando lo studente ero io e questo stile di formulare i testi era etichettato come "Applicazione della matematica alla fisica". Perché di questo si tratta, e neanche, i problemi, formulati tanto bene, anzi.
>
> Ma andiamo con ordine, partendo dalle competenze di fisica che la prova dovrebbe verificare.
>
> "In particolare, lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: osservare e identificare fenomeni; formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi; formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo sperimentale, dove l'esperimento è inteso come interrogazione ragionata dei fenomeni naturali, scelta delle variabili significative, raccolta e analisi critica dei dati e dell'affidabilità di un processo di misura, costruzione e/o validazione di modelli; comprendere e valutare le scelte scientifiche e tecnologiche che interessano la società in cui vive."
>
> Si tratta di richieste eccessive? Sono d'accordo, e l'AIF lo ha sottolineato anche quando le Indicazioni Nazionali vennero diffuse. Ma se si ritiene che questo sia il caso si abbia il coraggio di riconoscerlo, correggendole, come peraltro previsto dalla norma.
>
> Tutto quello che viene richiesto in questi problemi è, invece, che lo studente ricordi qualche formula (e nemmeno tante, campo elettrico generato da una carica, energia potenziale di due cariche, principio di sovrapposizione) e qualche relazione matematica (relazione tra carica e corrente). E dove è la scelta delle variabili significative, raccolta e analisi dei dati sperimentali se persino la costante di Coulomb è ridotta ad essere una "una costante positiva" di cui si danno le unità di misura? Oppure vogliamo parlare del significato fisico del minimo di una corrente? Come se prendere una scarica elettrica da una corrente di $-1\,\mathrm{A}$ fosse meglio di una scarica da $1\,\mathrm{A}$. Oppure del concetto incomprensibile di "... carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore..."? Mi domando come sia possibile che la cosa sia passata sostanzialmente sotto silenzio. Come è possibile che chi dice di occuparsi delle scienze matematiche e fisiche non abbia notato lo svarione. Forse sarebbe il caso che il MIUR facesse ricorso, in maniera trasparente e dichiarata, ai professionisti della materia. Certo l'AIF, se il suo ruolo venisse esplicitamente riconosciuto, non si sottrarrebbe ad un tale compito.

> …
>
> Veniamo ai quesiti. Divisi in cinque di matematica e tre di fisica, quasi in una sorta di manuale Cencelli della seconda prova, in proporzione al numero di ore della disciplina, secondo un concetto di prova "equilibrata" dove l'equilibrio non è nella difficoltà delle richieste fatte agli studenti in rapporto a quanto si può da loro pretendere, ma in una quantificazione numerica, molto più semplice da accertare. Dei tre quesiti di fisica il primo potrebbe riguardare altrettanto bene il prezzo della frutta in funzione del tempo, il secondo riguarda un argomento di fisica svolto nel terzo anno, e finalmente nel terzo, compare un frammento di fisica del quinto anno. Sempre nella forma "prendi una formula con una derivata e calcola". Si poteva per lo meno chiedere il verso della corrente indotta, o una qualche riflessione sulla legge di Lenz, ma forse si correva il rischio di porre una domanda di fisica.
>
> Da questa prova emerge quindi una visione della fisica come ancella della matematica, la cui conoscenza è assolutamente discrezionale per ottenere il punteggio massimo. Con la matematica ricondotta quasi esclusivamente ad applicazione del calcolo integrale e differenziale.
>
> …

La nostra opinione[(9)] su queste simulazioni di matematica e fisica è che i tempi non siano ancora maturi per una prova scritta di fisica, per vari motivi (le indicazioni troppo vaghe, il linguaggio usato, gli errori nella formulazione). Forse non lo saranno mai…

In quest'ottica non possiamo che condividere le opinioni di Alberto Meroni relativamente alle Indicazioni Nazionali sulle competenze richieste per la prova di fisica all'esame di stato.

[9] Suggeritaci da Roberto Carosi, ma non solo.

Osservazioni sulle notazioni

Questa raccolta di temi d'esame copre un periodo di tempo di quasi 120 anni. È evidente che questo ha comportato una evoluzione delle notazioni utilizzate nelle tracce provenienti dal Ministero.

La ricerca di uno standard nella scrittura di testi, in particolare di contenuto scientifico matematico, è sempre stata una preoccupazione nella comunità scientifica, a causa della grande diffusione che hanno di norma opere di questo tipo, che possono essere lette anche da gente di lingua e cultura diversa da chi le ha composte. La necessità di convenzioni condivise e universalmente accettate è divenuta particolarmente pressante dopo l'avvento di Internet e la diffusione dei supporti non cartacei per la memorizzazione e distribuzione di articoli, libri, riviste.

A tutt'oggi non esiste una normativa ufficiale "obbligatoria" per redigere le formule matematiche, almeno per i "matematici puri". Tuttavia per chi usa la matematica per motivi tecnici: fisici, ingegneri, ecc., è in vigore la normativa ufficiale UNI CEI ISO 80000-2 : 2013 . In questa raccolta abbiamo deciso di adottare, per tutte le tracce riportate, le semplici regole previste da questo insieme di indicazioni, che ci paiono molto sensate, anche perché esse sono ormai adottate dalla maggior parte dei sistemi elettronici di videocomposizione dei testi. Questo significa che in molti casi i testi proposti non sono "esteticamente" identici a quelli ufficiali del Ministero: nulla cambia, comunque, nella sostanza.

Riportiamo di seguito, per quanto attiene al contenuto di questo testo, quelle che sono le regole che abbiamo seguito.

Innanzitutto un po' di nomenclatura sugli stili dei caratteri alfabetici. Quelli che ci interessano sono:

— Tondo: il normale carattere "diritto", senza modifiche allo spessore. In inglese è detto *Roman* o *Upright*.

— *Corsivo*: il carattere inclinato a destra, senza modiche allo spessore. In inglese è detto *Italics*.

— **Grassetto**: il carattere tondo, con spessore maggiore. In inglese è detto *Bold*.

— *Corsivo matematico*: uno speciale carattere corsivo usato per le formule matematiche. Può essere sostituito dal normale *Corsivo*, se questa versione non è disponibile. In inglese è detto *Slanted*.

— Senza grazie, oppure a bastoncino: un carattere, che può essere tondo, corsivo o neretto, senza abbellimenti. In inglese è detto *Sans serif*.

— $\mathbb{BLACKBOARD}$: usato per indicare particolari insiemi.

Proseguiamo con alcune regole di carattere generale.

— I numeri si scrivono sempre in carattere tondo, anche quando fanno parte di un testo scritto completamente in corsivo.

— Le costanti numeriche si scrivono sempre in carattere tondo. Questo vale in particolare per il numero di Nepero "e" e il pi greco "π".

— Le variabili si indicano con lettere corsive, generalmente minuscole: x, y, ...

— I vettori si indicano con lettere corsive, generalmente minuscole, in grassetto: $\mathbf{v}$, oppure con lettera corsive minuscole senza grassetto, ma sormontate da una freccia: $\vec{v}$.

— Gli insiemi si indicano con lettere corsive maiuscole, mentre gli elementi degli insiemi con lettere corsive minuscole.

— I punti del piano e dello spazio si indicano con lettere maiuscole in carattere sans serif.

— I simboli generici di funzione si indicano in corsivo: $f(x)$.

— I nomi specifici di funzioni[1] e di operatori si indicano in tondo, e con un'opportuna spaziatura (spazio sottile) sia prima che dopo, per separarli dal loro argomento: $\sin x$, $a \sin x$.

— Anche l'operatore differenziale "d" deve essere indicato in carattere tondo, ma senza separarlo dal suo argomento: $\mathrm{d}x$, $a\,\mathrm{d}x$.

Alcune notazioni usate e relativo significato con eventuali commenti

"," - "."	Separatore decimale. Le regole prescrivono l'uso della virgola come separatore decimale nelle lingue diverse dall'inglese, dove invece si deve usare il punto.
N, **Z**, **Q**, **R**, **C**, **P**	Insieme dei naturali (compreso lo zero), degli interi, dei razionali, dei reali, dei complessi, dei primi; si possono usare anche i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, e noi in questo testo abbiamo sempre usato questi.

Continua nella pagina successiva

[1] A proposito di questa regola si noti che i programmi di videocomposizione testi la applicano automaticamente, se si usano i nomi "ufficiali" per le funzioni, altrimenti trattano i nomi di funzioni come testo normale. Si veda, per esempio, il testo ufficiale della prova d'esame della sessione ordinaria 2013 per il Corso di ordinamento, dove, nella domanda 9 del questionario si legge

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{senx\cos x - senx}{x^2}.$$

La scrittura corretta sarebbe, invece,

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{\sin x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Il tutto è legato al fatto che il software riconosce, in una formula matematica, la scrittura "cos" come simbolo di funzione e usa i caratteri e la spaziatura corretta, mentre la scrittura "sen" non è riconosciuta come simbolo di funzione e quindi trattata come un normale testo. Tutti i programmi di videocomposizione consentono comunque di estendere l'insieme dei "nomi ufficiali" e sarebbe bene servirsi di questa opportunità, se si vogliono usare scritture non previste dagli standard internazionali:

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

Non si pensi che queste siano solo pignolerie: innanzitutto un testo ben scritto, anche dal punto di vista grafico, è più leggibile (anche l'occhio vuole la sua parte!) e poi, a nostro avviso c'è da tenere conto del fatto che l'adozione di regole standard rende prevedibilmente più semplice l'implementazione di algoritmi di lettura automatica dei testi elettronici, in particolare a beneficio dei disabili visivi, ma non solo.

Segue dalla pagina precedente

$[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$	Intervallo di reali chiuso, aperto a sinistra, aperto a destra, aperto; la normativa prevede anche i simboli $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) per gli intervalli aperti a sinistra, aperti a destra, aperti: riteniamo che questi simboli vadano evitati, soprattutto l'ultimo per la confusione che può sorgere con il simbolo di coppia di reali.
$]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$	Intervallo inferiormente illimitato chiuso, intervallo inferiormente illimitato aperto.
$[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$	Intervallo superiormente illimitato chiuso, intervallo superiormente illimitato aperto.
$\overline{\mathsf{AB}}$	Segmento di estremi A e B.
$\overrightarrow{\mathsf{AB}}$	Vettore da A a B.
$d(\mathsf{A},\mathsf{B})$	Distanza tra A e B, lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$, modulo del vettore $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$. Per la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ abbiamo usato la notazione più compatta $\lvert\overline{\mathsf{AB}}\rvert$, anche se non prevista nella normativa ISO.
$\lvert\overrightarrow{\mathsf{AB}}\rvert$, $\lVert\overrightarrow{\mathsf{AB}}\rVert$	Modulo o norma del vettore $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$, anche in alternativa al simbolo $d(\mathsf{A},\mathsf{B})$.
$\overset{\frown}{\mathsf{AB}}$	Arco di estremi A e B.
$\mathsf{A}\hat{\mathsf{O}}\mathsf{B}$	Angolo di vertice O, individuato dalle semirette OA ed OB.
$\sin x$, $\cos x$	Le funzioni seno e coseno.
$\tan x$	La funzione tangente.
$\cot x$	La funzione cotangente.
$\sec x$	La funzione secante.
$\csc x$, $\operatorname{cosec} x$	La funzione cosecante.
$\arcsin x$	La funzione arcoseno.
$\arccos x$	La funzione arcocoseno.
$\arctan x$	La funzione arcotangente; evitare la scrittura $\operatorname{arctg} x$.
$\operatorname{arccot} x$	La funzione arcocotangente.
$\operatorname{arcsec} x$	La funzione arcsecante.
$\operatorname{arccsc} x$	La funzione arccosecante.
$\sinh x$	La funzione seno iperbolico.
$\cosh x$	La funzione coseno iperbolico.
$\tanh x$	La funzione tangente iperbolica.
$\operatorname{arsinh} x$	La funzione inversa del seno iperbolico.
$\operatorname{arcosh} x$	La funzione inversa del coseno iperbolico.
$\operatorname{artanh} x$	La funzione inversa della tangente iperbolica.
$f : A \to B$	Funzione di dominio A e codominio B (B non è l'insieme delle immagini).
$f : x \mapsto f(x)$	La funzione f manda $x \in A$ su $f(x) \in B$; $f(x)$ è un'espressione (di natura qualsiasi) che fornisce il valore della funzione f su x.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$g \circ f$	Composizione della funzione f con la funzione g.
e^x, $\exp x$	Esponenziale di x in base e.
a^x, $\exp_a x$	Esponenziale di x in base a.
$\log x$	Logaritmo di x, da usare quando non è necessario precisare la base; da notare che in molti testi (e spesso anche nelle calcolatrici e nei software) questa scrittura è usata per il logaritmo in base 10; purtroppo la stessa scrittura è usata anche in alcuni testi per il logaritmo naturale: è meglio attenersi alla norma ufficiale.
$\ln x$, $\log_{\mathrm{e}} x$	Logaritmo di x in base e.
$\lg x$, $\log_{10} x$	Logaritmo di x in base 10.
$\log_a x$	Logaritmo di x in base a.
$\mathrm{lb}\, x$, $\log_2 x$	Logaritmo binario (in base 2).

Un discorso speciale merita il caso dei simboli usati per i logaritmi.

La normativa ufficiale prevederebbe la scrittura $\log x$ da usare quando non è necessario precisare la base, la scrittura $\ln x$ da usare quando la base è il numero di Nepero, e l'indicazione esplicita della base in tutti gli altri casi: $\log_a x$. Purtroppo la scrittura $\log x$ è usata (sia in molti testi che nelle calcolatrici e in alcuni software) per indicare il logaritmo in una base generica oppure il logaritmo in base e, oppure ancora il logaritmo in base 10; per indicare il logaritmo in base 10 si usa anche la scrittura $\mathrm{Log}\, x$. Tutto questo è spesso fonte di confusione. In questo testo abbiamo deciso di mantenere *sempre* le scritture dei testi ufficiali del ministero: quasi sempre risulta chiaro dal contesto (o è esplicitamente indicato) a quale base ci si riferisca.

Bibliografia

[1] Raffaele Barbarito e Elsa Giacconi Canni. *Geometria ad uso dei Licei Scientifici*. Vol. 3. Torino: Paravia, 1958 (cit. alle pp. 27–32).

[2] Raffaele Barbarito, Alba Rossi dell'Acqua e Elsa Giacconi Canni. *Trigonometria piana per le Scuole Medie Superiori*. Roma: Angelo Signorelli, 1965 (cit. alle pp. 26, 28–30).

[3] Luciano Battaia. «Esame di Stato 2010. Seconda prova scritta per i Licei Scientifici a indirizzo sperimentale». In: *Archimede* 4 (2010), pp. 185–194 (cit. a p. 681).

[4] Claudio Bernardi. *La struttura della prova scritta di matematica all'esame di Stato: dubbi e proposte*. 2015. URL: `http://www.matematicaerealta.it/mediateca/documenti/materiali_roma_23_febbraio_2015/bernardi/bernardi.pdf` (cit. a p. 688).

[5] Elena Bertonelli e Giaime Rodano. *Le riforme nella scuola italiana dal 1859 al 2003*. 2003. URL: `http://www2.indire.it/materiali_dirigenti/1_bertonelli.pdf` (cit. a p. 1).

[6] Roberto Carosi. *Temi di Maturità per l'Istituto Magistrale*. Comunicazione privata. 2019 (cit. a p. 647).

[7] Giorgia Casadei. «L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria dall'unità d'Italia». Tesi di laurea magistrale in Matematica. Università di Bologna, 2014 (cit. a p. 23).

[8] Sebastiano Catania. *Problemi di matematica dati agli esami di licenza d'Istituto Tecnico, con le loro risoluzioni*. Livorno: Giusti, 1914 (cit. alle pp. 16, 19–24, 28).

[9] Bruno De Finetti. «Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite?» In: *Periodico di Matematiche* 4 (1965), p. 325 (cit. a p. 13).

[10] Bruno De Finetti. «Contro la matematica per deficienti». In: *Periodico di Matematiche* 1-2 (1974), p. 95 (cit. a p. 13).

[11] Antonetta De Gennaro e Agostino Miele. *L'esame di Matematica per i licei scientifici*. Milano: Etas, 2001.

[12] Enrico Ducci. *Trattazione degli ultimi 26 temi assegnati dal Ministero dell'Istruzione per la prova scritta di matematica agli esami di licenza dall'Istituto tecnico*. Foggia: Domenico Zobel, 1909 (cit. alle pp. 23–28).

[13] Enrico Ducci. *Trattazione dei temi assegnati per la prova scritta di matematica agli esami di licenza dall'Istituto tecnico dal Luglio 1909 all'Ottobre 1913*. Napoli: L. Pierro, 1914.

[14] Carlo G. Lacaita e Mariachiara Fugazza. *L'istruzione secondaria nell'Italia unita. 1861-1901*. Milano: Franco Angeli, 2013.

[15] Aurelio Lugli. *Raccolta di temi di matematica redatti dalla Giunta centrale esaminatrice per la licenza d'Istituto tecnico nella sezione fisico-matematica*. Roma: Tipografia Elzeviriana, 1890.

[16] Giovanni Massa. «Temi di Matematica dati agli esami di Licenza Liceale». In: *Rivista di Matematica Elementare* IV (1877), pp. 13–17 (cit. a p. 635).

[17] Mathesis, cur. *Periodico di Matematica/Periodico di Matematiche* (1886 et seq.) (cit. alle pp. 15–23, 635).

[18] Aldo Morelli. *Sulle prove scritte degli esami di stato: ieri ed oggi*. 2002. URL: `http://www.matmedia.it/Joomla/Agerola%20-%20Morelli.pdf` (cit. a p. 665).

[19] Paolo Negrini e Maria Ragagni. *Formulario e temi di matematica per l'esame di stato*. Milano: Edizioni Clio, 2007.

[20] Attilio Palatini e Virginia Faggioli Reverberi. *Complementi di matematica per i licei scientifici*. Milano: Ghisetti e Corvi, 1973 (cit. alle pp. 23–26, 28–31).

[21] Elisa Patergnani. *Matematica e istruzione tecnica in Italia (1861-1940), note e documenti*. 2011. URL: `http://dm.unife.it/matematicainsieme/ist_tecn/index.htm` (cit. a p. 1).

[22] Ornella Pompeo Faracovi. *150 anni di scuola pubblica in Italia*. e-book del Centro Studi Enriques. Livorno, 2012. URL: `http://www.centrostudienriques.it/pubblicazioni_digitali/ebook-1_CSE_150anni_di_scuola_pubblica_in_Italia.pdf` (cit. alle pp. 2–4).

[23] Pietro Rebbi. «Sui temi di matematica di maturità scientifica». In: *Archimede* 1-2 (1968), pp. 56–59.

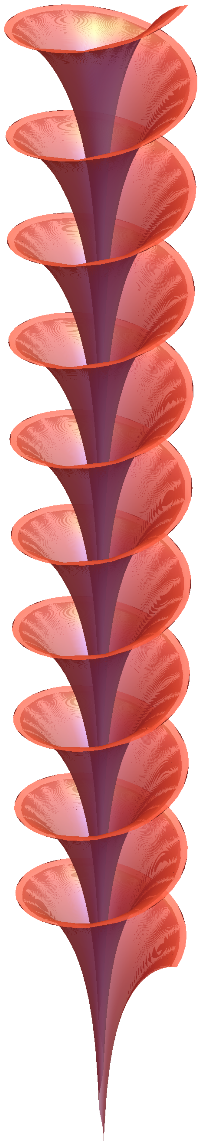
[24] Antonio Sartori e Fernando Laurenti. *Problemi di secondo grado risolti e discussi*. Torino: Paravia, 1981 (cit. alle pp. 27–30, 32).

[25] Alfredo Sessa. *Il problema risolto*. Torino: Petrini, 1993.

[26] Vitale Zani. *Risoluzione dei problemi di matematica assegnati agli esami di licenza d'Istituto Tecnico nell'ultimo sessennio*. Torino: Utet, 1923.

[27] Giuseppe Zwirner. *Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica per i licei scientifici*. Padova: Cedam, 1975.

In ultima di copertina
Una superficie di Dini, o elicoide di Dini. Immagine ottenuta con Mathematica.



Matematica alla maturità

Tracce dei temi assegnati agli esami di stato di Liceo Scientifico, con appendice contenente le prove di Fisica

Luciano Battaia - Ercole Suppa

http://www.batmath.it-http://www.rotupitti.it

Versione 5.1 del 30 giugno 2022

Questa raccolta contiene tutte le tracce dei temi di matematica assegnati nelle varie sessioni nel corso di ordinamento e nel corso sperimentale PNI del Liceo Scientifico dalla sua origine alla data di pubblicazione del volume. È inoltre presente un'ampia selezione dei temi assegnati nelle scuole italiane all'estero e in altre sperimentazioni, una selezione delle prove assegnate negli esani di licenza della sessione Fisico-Matematica dell'Istituto Tecnico, prima della riforma Gentile, e un'appendice contenente le prove di Fisica assegnate negli anni più recenti come seconda prova all'esame di Stato di Liceo Scientifico.
Ci auguriamo che essa possa essere di aiuto agli studenti che si accingono ad affrontare questa importante prova della loro carriera scolastica.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'ISIA di Roma, Sede di Pordenone.

Ercole Suppa

Già docente di matematica applicata in ITC ad indirizzo programmatori. Attualmente docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Einstein di Teramo. Responsabile distrettuale dell'UMI per le Olimpiadi Matematica, Teramo. Membro del team organizzativo della gara locale di matematica di Teramo.